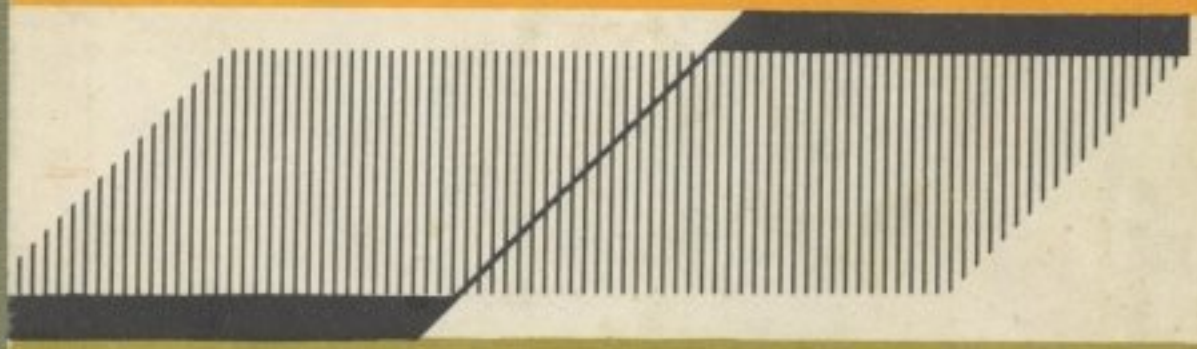
TRAIAN I. CREȚU, DAN ANGHELESCU, IOAN VIEROȘANU

PROBLEME DE FIZICĂ

PENTRU ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR

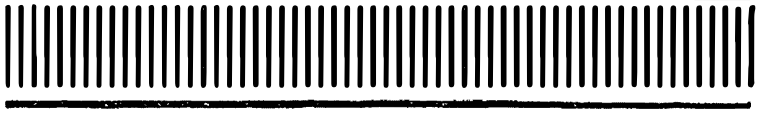


EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ - BUCUREȘTI, 1980

TRAIAN I. CRETU DAN ANGHELESCU IOAN VIEROȘANU

PROBLEME DE FIZICĂ

PENTRU ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Tehnoredactor ION MIREA
Coperta: FLORIN IONESCU

PREFAȚĂ

Prezenta carte de probleme reprezintă o ediție revăzută și completată a lucrării Culegere de probleme de fizică pentru admiterea în învățămîntul superior tehnic, *apărută în 1974; majoritatea problemelor conținute în prezenta lucrare sînt diferite de cele din ediția precedentă.*

Fiecare capitol al cărții este precedat de cîte un breviar care, fără să reproducă manualul, reprezintă un rezumat aproape complet al teoriei, prin relațiile de bază din capitolele respective.

Majoritatea problemelor prezentate sînt apropiate, ca dificultate, de cele ce se propun la concursurile de admitere în institutele de învățămînt superior, iar unele sînt dintre cele care au fost propuse la concursurile din ultimii ani.

Atît felul în care sînt redactate problemele, precum și indicațiile date pentru rezolvarea acestora considerăm că vor constitui o complementare a manualelor de liceu, precum și o familiarizare a celor ce vor folosi cartea, cu modul de a gîndi pentru înțelegerea și rezolvarea problemelor de fizică.

Lucrarea conține probleme din toate capitolele prevăzute în programa pentru predarea fizicii în liceu. Majoritatea problemelor, pentru a fi rezolvate, impun o atentă revedere a teoriei referitoare la fenomenul respectiv și totodată, o deosebită atenție în scopul înțelegerii fenomenului. Pentru problemele mai dificile sînt date rezolvări detaliate și unele interpretări. Recomandăm însă să se treacă la folosirea acestora numai după ce, în prealabil, candidatul a făcut toate încercările de a găsi singur soluția.

Lucrarea se adresează candidaților la concursurile de admitere în institutele de învățămînt superior la care se cere fizica, elevilor din toate clasele de liceu și în special, elevilor care vor să se consacre învățării acestei discipline, precum și profesorilor de liceu. Felul cum sînt selecționate problemele, precum și indicațiile date pentru rezolvarea acestora completează cunoștințele elevilor de la licee din localitățile unde nu există centre universitare și deci, care nu pot beneficia de acele cursuri de îndrumare organizate pe lîngă institutele de învățămînt superior pentru candidații la concursurile de admitere.

AUTORII

Observație. Acolo unde în enunțul problemei nu sînt date valorile constantelor de care este nevoie pentru rezolvare, se vor lua valorile acestora din tabelul anexă de la finele cărții.

CUPRINS

1. **Mecanică** — Traian Creţu 5
   1.0. Breviar 5
   1.1. Probleme cu rezolvări 23
   1.2. Probleme cu indicaţii şi rezultate 49
   Rezolvări şi soluţii 94

2. **Fizică moleculară şi termodinamică** — Dan Anghelescu 156
   2.0. Breviar 156
   2.1. Probleme cu rezolvări 164
   2.2. Probleme cu indicaţii şi rezultate 176
   Rezolvări şi soluţii 188

3. **Electricitate şi magnetism** — Traian Creţu şi Ion Vieroşanu 211
   3.0. Breviar — Traian Creţu 211
   3.1. Probleme cu rezolvări — Traian Creţu 233
   3.2. Probleme cu indicaţii şi rezultate — Ion Vieroşanu 250
   Rezolvări şi soluţii 289

4. **Optică** — Ion Vieroşanu 330
   4.0. Breviar 330
   4.1. Probleme cu rezolvări 341
   4.2. Probleme cu indicaţii şi rezultate 353
   Rezolvări şi soluţii 362

5. **Teoria relativităţii şi fizică cuantică elementară** — Ion Vieroşanu 397
   5.0. Breviar 397
   5.1. Probleme cu rezolvări 405
   Rezolvări 415

6. **Tabele cu constante fizice** 434

1. MECANICĂ

1.0. BREVIAR

1.0.1. CINEMATICA

Poziția unui punct material P în spațiu este caracterizată de vectorul de poziție $\vec{r}$ (fig. 1.1) sau de proiecțiile x, y, z ale acestui vector pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz. Notînd cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vectorii unitate cu originile în punctul O și orientați în lungul axelor Ox, Oy, Oz, se poate scrie:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \tag{1.0.1}$$

Dacă deplasarea punctului material P în spațiu are loc în așa fel încît una din cele trei coordonate, de exemplu z, rămîne constantă, traiectoria acestuia va fi o curbă oarecare în planul xOy.

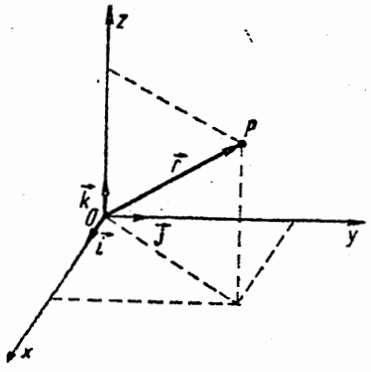


Fig. 1.1.

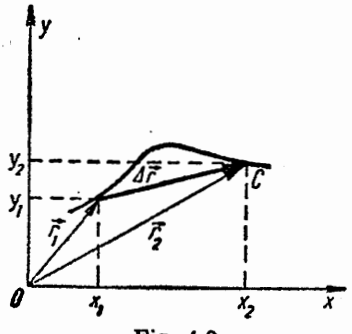


Fig. 1.2.

Considerăm că la un moment t_1 poziția punctului material este dată de coordonatele x_1, y_1, iar la momentul $t_1 + \Delta t$ coordonatele poziției punctului material P sînt x_2, y_2 (fig. 1.2). Traiectoria punctului P este curba C în planul xOy.

Din figura 1.2 rezultă:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overrightarrow{\Delta r}. \tag{1.0.2}$$

Vectorul $\overrightarrow{\Delta r}$ caracterizează variația poziției punctului P în intervalul de timp Δt și se numește *vectorul deplasării*. Lungimea vectorului deplasării nu

este totdeauna egală cu lungimea drumului parcurs de punctul material în intervalul de timp Δt. Se poate uşor arăta că lungimea vectorului deplasării $\overrightarrow{\Delta r}$ este:

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \qquad (1.0.3)$$

Viteza medie este raportul dintre vectorul deplasării $\overrightarrow{\Delta r}$ şi intervalul de timp Δt, în care s-a produs această deplasare:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}. \qquad (1.0.4)$$

Viteza instantanee este:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}. \qquad (1.0.5)$$

În planul xOy, viteza $\vec{v}$ o putem considera ca sumă vectorială a vectorilor $\vec{v}_x$ şi $\vec{v}_y$ (fig. 1.3), unde:

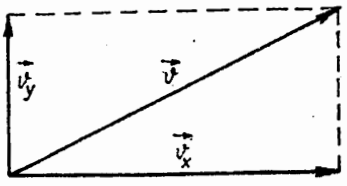


Fig. 1.3.

$$|\overrightarrow{v_x}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}; \qquad (1.0.6)$$

Iar

$$|\overrightarrow{v_y}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}. \qquad (1.0.7)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\overrightarrow{v_x}|^2 + |\overrightarrow{v_y}|^2}. \qquad (1.0.8)$$

Analog cu formula (1.0.1) putem scrie:

$$\vec{v} = \vec{i}\,|\vec{v}_x| + \vec{j}\,|\vec{v}_y|. \qquad (1.0.9)$$

Dacă intervalul de timp Δt este suficient de mic, adică dacă $\Delta t \to 0$ atunci lungimea vectorului deplasării $\overrightarrow{\Delta r}$ va fi practic egală cu drumul Δs parcurs de punctul material.

$$|\overrightarrow{v_m}| \equiv v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ iar } |\vec{v}| \equiv v = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.0.10)$$

Considerăm că la momentul t_1 punctul material are viteza $\vec{v}_1$, iar la momentul $t_2 = t_1 + \Delta t$, viteza $\vec{v}_2$. Variaţia vitezei va fi:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \qquad (1.0.11)$$

Raportul dintre variaţia vitezei $\Delta\vec{v}$ şi intervalul de timp Δt se numeşte *acceleraţie medie:*

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1.0.12)$$

Accelerația instantanee este:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.0.13}$$

În cazul cînd mișcarea corpului are loc în planul xOy, accelerația $\vec{a}$ poate fi considerată ca sumă vectorială a vectorilor $\vec{a}_x$ și $\vec{a}_y$ unde:

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{v}_x}{dt}; \quad \vec{a}_y = \frac{d\vec{v}_y}{dt}, \tag{1.0.14}$$

iar

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2}. \tag{1.0.15}$$

În sistemul de unități SI, spațiul parcurs de un punct material se măsoară în metri (m), viteza în metri pe secundă (m/s), iar accelerația în metri pe secundă la pătrat (ms^{-2}).

Pentru mișcarea rectilinie și uniformă:

$$\vec{a} = 0, \qquad \vec{v} = \text{const} \tag{1.0.16}$$

și deci

$$s = s_0 + vt, \tag{1.0.17}$$

unde s_0 este distanța, la momentul $t = 0$, de la un punct O considerat ca origine.

În cazul mișcării rectilinii și uniform variate

$$\vec{a} = \text{const}. \tag{1.0.18}$$

Considerînd v_0, viteza punctului material la momentul $t = 0$ și luînd $s_0 = 0$, obținem:

$$v = v_0 \pm at; \tag{1.0.19}$$

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \tag{1.0.20}$$

Se ia semnul plus pentru mișcarea uniform accelerată și minus pentru mișcarea uniform încetinită.

Excluzînd timpul t din (1.0.19) și (1.0.20) obținem formula lui Galilei:

$$v = \sqrt{v_0^2 \pm 2as}. \tag{1.0.21}$$

Dacă corpul ce posedă viteza v_0 intră într-un mediu în care este frînat cu accelerația a, el va parcurge distanța maximă:

$$s_{max} = \frac{v_0^2}{2a}. \tag{1.0.22}$$

Formula (1.0.20) mai poate fi scrisă sub forma:

$$s = v_m t = \frac{v_0 + v}{2} t. \tag{1.0.23}$$

În cazul mișcării corpului pe verticală, în formulele de mai sus trebuie înlocuită accelerația a cu accelerația gravitațională g. Dacă corpul este

lansat cu viteza v_0, orientată pe verticală în jos, de la înălțimea h de la sol, va ajunge la sol cu viteza:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{1.0.24}$$

Un corp lansat de la sol, în sus pe verticală, cu viteza inițială v_0, va atinge înălțimea maximă:

$$h_{max} = v_0^2/2g, \tag{1.0.25}$$

iar la o înălțime $h < h_{max}$ va avea viteza:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{1.0.26}$$

Dacă un corp este lansat de la sol cu viteza $\vec{v}_0$ ce face unghiul α cu orizontala (fig. 1.4), atunci corpul va avea o mișcare uniformă cu viteza $v_0 \cos \alpha$ pe axa Ox, iar pe verticală se va deplasa uniform încetinit pînă ajunge la înălțimea h_{max}, iar apoi uniform accelerat pînă atinge solul. Înălțimea maximă este:

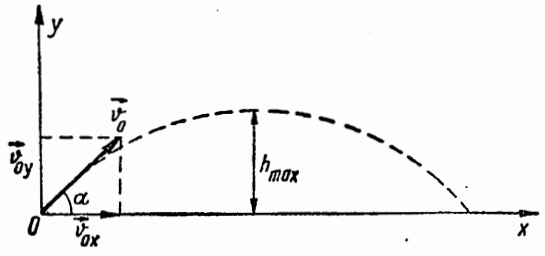


Fig. 1.4.

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{1.0.27}$$

Distanța maximă parcursă pe orizontală, sau bătaia, este:

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{1.0.28}$$

Din ecuațiile mișcării pe axele Ox și Oy:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \; y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

aflăm ecuația traiectoriei corpului

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \tag{1.0.29}$$

Deci corpul aruncat sub un unghi α cu orizontala se deplasează după o traiectorie parabolică.

1.0.2. LEGILE DINAMICII

Ansamblul datelor experimentale arată că variația vitezei unui corp, adică accelerația corpului dat, este întotdeauna condiționată de acțiunea altor corpuri asupra corpului considerat. Această afirmație fundamentală a mecanicii este valabilă numai față de sistemele de referință inerțiale. Putem considera că referențialele legate de Pămînt sînt inerțiale, iar sistemele de referință ce se deplasează accelerat față de Pămînt sînt neinerțiale. În sistemele neinerțiale, în afară de forțele condiționate de acțiunea altor corpuri, mai apar *forțe de inerție* care depind de accelerația sistemului de referință considerat față de un referențial inerțial.

La baza dinamicii stau cele trei legi (sau principii) ale lui Newton (1642—1727).

Prima lege a lui Newton sau legea inerției se formulează astfel: *orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atîta timp cît asupra lui nu acționează alte corpuri.*

Proprietatea corpurilor de a-și păstra starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă se numește *inerție*, iar măsura inerției corpurilor față de mișcarea de translație este mărimea scalară numită *masa* corpului.

A doua lege a lui Newton afirmă că *accelerația unui corp este direct proporțională cu forța ce acționează asupra lui:*

$$\vec{a} \sim \vec{F}. \tag{1.0.30}$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{F}$ sînt orientați în același sens.

Dacă asupra corpului acționează mai multe forțe:

$$\vec{a} \sim (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.0.31}$$

Coeficientul de proporționalitate este masa corpului, ca măsură cantitativă a inerției lui, adică a capacității corpului de a avea o accelerație sau alta sub acțiunea unei forțe date.

Prin introducerea noțiunii de masă m se ajunge din (1.0.31) la formularea completă a legii a doua a lui Newton:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.0.32}$$

Impulsul este produsul dintre masa corpului și viteza lui $\vec{v}$

$$\vec{H} = m\vec{v}. \tag{1.0.33}$$

Dacă la momentul t_1 corpul are viteza $\vec{v}_1$, iar la momentul $t_2 = t_1 + \Delta t$ viteza $\vec{v}_2$ atunci:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} \right) = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.0.34}$$

Se obține că derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor ce acționează asupra corpului. Formula (1.0.34) reprezintă o altă formulare a legii a doua a lui Newton.

Mai putem scrie:

$$d\vec{H} = \vec{R}\, dt, \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.0.35}$$

Produsul dintre forța $\vec{R}$ și intervalul de timp dt se numește *impulsul forței.* Deci variația impulsului în timpul Δt este egală cu impulsul forței:

$$\Delta\vec{H} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{R}\Delta t. \tag{1.0.36}$$

Pînă aici, am considerat că avem de-a face cu sisteme de referință inerțiale. Dacă mișcarea are loc față de un referențial neinerțial, formulele de

mai sus trebuie schimbate. Vom nota accelerația corpului față de un referențial inerțial cu $\vec{a}$, iar accelerația față de sistemul neinerțial cu $\vec{a}_i$. Pentru scrierea legii a doua a lui Newton față de un referențial neinerțial trebuie să introducem *forțele de inerție* $\vec{F}_i$:

$$m\vec{a}_i = \vec{R} + \vec{F}_i. \tag{1.0.37}$$

Pentru ca din relația (1.0.37) să se obțină relația (1.0.32) forțele de inerție trebuie exprimate sub forma:

$$\vec{F}_i = m(\vec{a}_i - \vec{a}). \tag{1.0.38}$$

Dacă sistemul neinerțial se deplasează rectiliniu cu accelerația $\vec{a}_t = \text{const.}$ față de un referențial inerțial, atunci:

$$\vec{a} = \vec{a}_i + \vec{a}_t, \tag{1.0.39}$$

iar

$$\vec{F}_i = m(\vec{a}_i - \vec{a}_i - \vec{a}_t) = -m\vec{a}_t. \tag{1.0.40}$$

Deci, dacă referențialul neinerțial se deplasează cu accelerația $\vec{a}_t = \text{const.}$ față de un referențial inerțial, atunci pe lîngă rezultanta forțelor exterioare $\vec{R}$ asupra corpului va acționa și forța de inerție $\vec{F}_i$ (1.0.40). Legea a doua a lui Newton în acest caz va fi:

$$m\vec{a}_i = \vec{R} - m\vec{a}_t. \tag{1.0.41}$$

A treia lege a lui Newton afirmă că *forțele cu care corpurile acționează unul asupra celuilalt sînt egale ca mărime și orientate în sensuri opuse.*

Dacă corpul B acționează asupra corpului A cu forța $\vec{F}_{BA}$ (fig. 1.5), atunci concomitent asupra corpului B va acționa corpul A cu forța $\vec{F}_{AB}$, iar

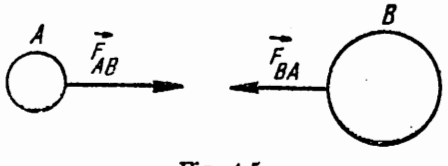


Fig. 1.5.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{1.0.42}$$

Din a doua lege a lui Newton

$$m_A\vec{a}_A = \vec{F}_{BA};\quad m_B\vec{a}_B = \vec{F}_{AB}. \tag{1.0.43}$$

Sau

$$m_A\vec{a}_A = -m_B\vec{a}_B. \tag{1.0.44}$$

De unde

$$\frac{|\vec{a}_A|}{|\vec{a}_B|} = \frac{m_B}{m_A} = \text{const.} \tag{1.0.45}$$

1.0.3. FORȚE ÎN MECANICĂ

Cu toată multitudinea aspectelor privind interacțiunea dintre corpuri, putem considera că în natură se cunosc pînă în prezent numai patru tipuri de forțe. Este uimitor faptul că în universul infinit, în atomi și nuclee și chiar în procesul de transformare a unor particule elementare în altele se manifestă numai patru tipuri de forțe și anume: forțele atracției universale (sau gravitaționale), forțele electromagnetice, forțele nucleare și forțele interacțiunii slabe (legate de dezintegrarea beta). Aceste patru tipuri fundamentale de forțe se deosebesc net după mărime, dependență de distanță etc. Fiecare tip de forțe își are sfera lui de acțiune, adică ansamblul proceselor în care acțiunea forțelor respective este esențială.

Nu putem aici să ne ocupăm de natura fiecărui tip de forțe; ne vom opri numai asupra forțelor a căror acțiune este esențială în mecanică.

1.0.3.1. Forțe gravitaționale

Faptul că toate corpurile, în căderea liberă pe Pămînt, au aceeași accelerație g, înseamnă că forța atracției gravitaționale trebuie să fie proporțională cu masa corpului respectiv. Acest lucru a fost formulat de Newton în legea atracției universale:

Forța de atracție reciprocă a două corpuri este direct proporțională cu produsul maselor acestor corpuri și invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrele lor.

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}. \tag{1.0.46}$$

Coeficientul de proporționalitate γ se numește *constanta gravitațională*:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}. \tag{1.0.47}$$

Cunoscînd accelerația gravitațională g_0 la suprafața Pămîntului, putem afla masa Pămîntului M:

$$G = mg_0 = \gamma \frac{mM}{R^2}; \quad g_0 = \frac{\gamma M}{R^2}. \tag{1.0.48}$$

Raza Pămîntului fiind $R \approx 6\,400$ km, iar $g_0 = 9{,}8\ \mathrm{ms^{-2}}$, avem:

$$M = \frac{g_0 R^2}{\gamma} \simeq 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}. \tag{1.0.49}$$

Accelerația gravitațională scade odată cu creșterea înălțimii h de la suprafața Pămîntului:

$$g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = \gamma \frac{M}{R^2 + 2Rh + h^2}. \tag{1.0.50}$$

Dacă $h \ll R$, atunci

$$g \simeq \gamma \frac{M}{R^2 + 2Rh} = \frac{\gamma M}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} \simeq g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right). \tag{1.0.51}$$

Considerăm un corp A aflat pe o platformă B (fig. 1.6). Notăm cu $\vec{G}$ forța de greutate a corpului A, iar cu $\vec{P}$ forța de apăsare a corpului asupra platformei. Reacția platformei $\vec{R}$ este egală și de sens opus cu $\vec{P}$ și este aplicată corpului A și nu platformei B.

Dacă sistemul se deplasează cu accelerația $\vec{a}$ orientată în jos, atunci

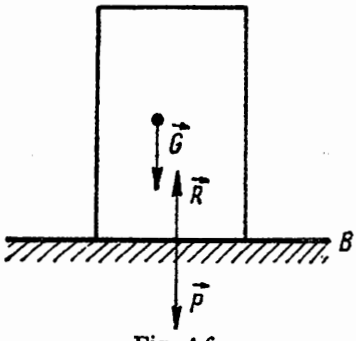


Fig. 1.6.

$$ma = G - R = G - P. \qquad (1.0.52)$$

Dacă accelerația este orientată în sus:

$$ma = -G + P, \qquad (1.0.53)$$

unde m este masa corpului A. Rezultă

$$P = G \pm ma = m(g \pm a). \qquad (1.0.54)$$

Deci $P = G$ numai dacă $a = 0$.

Cînd sistemul cade cu accelerația g

$$P = m(g - g) = 0, \qquad (1.0.55)$$

ceea ce înseamnă starea de imponderabilitate, adică față de referențialul legat de platformă, greutatea corpului A este zero.

1.0.3.2. Forțe elastice

Forțele elastice apar ca urmare a deformării corpurilor, fiind determinate de mărimea deformării. Un corp se deformează dacă părțile lui componente suferă deplasări diferite. Trebuie înțeles că deși forțele elastice apar numai datorită deformării corpurilor, nu orice deformare conduce la apariția forțelor elastice.

O bară de lungime inițială l_0, sub acțiunea forței $\vec{F}$ va suferi o alungire Δl devenind de lungime l. Mărimea

$$\Delta l = l - l_0, \qquad (1.0.56)$$

se numește *alungire absolută*, iar raportul

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \qquad (1.0.57)$$

se numește *alungire relativă*.

Dacă alungirea relativă este mică, obținem legea lui Hooke

$$\sigma = \frac{F}{ES}, \qquad (1.0.58)$$

unde S este aria secțiunii transversale a barei, iar E este *modulul de elasticitate* sau *modulul lui Young*.

Forța elastică este egală ca mărime cu forța exterioară de deformare F și orientată în sens opus:

$$F_{el} = -\frac{ES}{l}\,\Delta l = -k\Delta l. \tag{1.0.59}$$

Coeficientul de elasticitate k depinde atît de materialul din care este confecționată bara (E) cît și de dimensiunile ei (l, S).

1.0.3.3. Forțe de frecare

Forța de frecare la alunecarea unui corp A pe suprafața corpului B este

$$F_f = \mu F_n, \tag{1.0.60}$$

unde F_n este suma proiecțiilor forțelor pe direcția normală la suprafața corpului B, iar μ este coeficientul de frecare.

Cînd un corp solid se deplasează în lichide sau gaze, asupra lui acționează forțe datorate rezistenței mediului, care se manifestă tot ca forțe de frecare. Aceste forțe de rezistență a mediului depind destul de complicat de viteza corpurilor. Pentru viteze mici

$$F_r = -\mu_1 v, \tag{1.0.61}$$

unde coeficientul μ_1 depinde de forma și dimensiunile corpului, precum și de proprietățile mediului.

Pentru viteze mari,

$$F_r = -\mu_2 v^2. \tag{1.0.62}$$

Dacă un corp cade în aer, forța de rezistență a aerului va deveni importantă la viteze mari:

$$ma = mg - \mu_2 v^2. \tag{1.0.63}$$

Din momentul atingerii vitezei limită,

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{\mu_2}}, \tag{1.0.64}$$

corpul va continua să se deplaseze cu viteza $v = v_l = \text{constant}$.

1.0.4. LUCRUL MECANIC. ENERGIE, PUTERE

Considerăm că asupra corpului A (fig. 1.7) acționează forța constantă $\vec{F}$, deplasîndu-l în intervalul de timp dt pe distanța $d\vec{r}$. *Lucrul mecanic* efectuat de forța $\vec{F}$ este

$$dL = F \cdot dr \cos\alpha, \tag{1.0.65}$$

care poate fi scrisă și ca produsul scalar,

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{1.0.66}$$

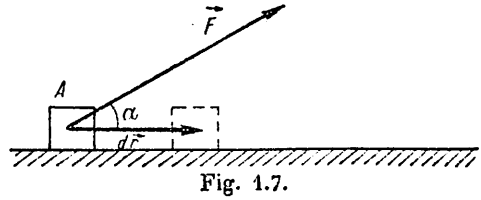


Fig. 1.7.

Dacă asupra corpului acționează mai multe forțe:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \tag{1.0.67}$$

atunci

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n d\vec{r} = dL_1 + dL_2 + \ldots + dL_n. \tag{1.0.68}$$

Deci lucrul mecanic efectuat de o forță rezultantă $\vec{F}$ este egal cu suma lucrului mecanic efectuat de fiecare forță $\vec{F}_i$ ($i = 1,2, \ldots n$). Unitatea de lucru mecanic este joule (J):

$$1\,J = 1N \cdot 1m. \tag{1.0.69}$$

Considerăm că forța $\vec{F}$ acționează pe dreapta pe care corpul se deplasează cu distanța s. Dacă v_1 este viteza corpului în momentul începerii acțiunii forței $\vec{F}$, iar v_2 viteza corpului după ce acesta a parcurs distanța s, se obține:

$$L = F \cdot s = mas = m \frac{v_2 - v_1}{t} \frac{v_1 + v_2}{2} t = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{c_2} - E_{c_1}. \tag{1.0.70}$$

Am notat *energia cinetică*

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \tag{1.0.71}$$

Lucrul mecanic necesar pentru ridicarea unui corp de masă m de la suprafața Pământului la înălțimea h nu depinde de forma drumului pe care se face această deplasare. Pentru o mișcare uniformă ($v = \text{const.}$)

$$L = mgh = E_p, \tag{1.0.72}$$

unde

$$E_p = mgh \tag{1.0.73}$$

este *energia potențială* a corpului de masă m în cîmpul gravitațional al Pămîntului. Se vede că energia potențială depinde de distanța relativă între corpurile aflate în interacțiune. Dacă corpul este ridicat uniform de la înălțimea h_1 la înălțimea h_2, atunci:

$$L = mgh_2 - mgh_1 = E_{p_2} - E_{p_1}. \tag{1.0.74}$$

Putem efectua lucru mecanic împotriva forțelor elastice. În acest caz, forța nu este constantă, ci crește odată cu creșterea alungirii Δl. Va trebui să luăm forța medie

$$F_m = \frac{0 + k\Delta l}{2} = \frac{1}{2} k\Delta l. \tag{1.0.75}$$

Iar

$$L = F_m \Delta l = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2. \tag{1.0.76}$$

Lucrul mecanic efectuat este egal cu variația energiei potențiale a corpului elastic. Considerînd energia potențială a corpului nedeformat ($\Delta l = 0$) egală cu zero, energia potențială a corpului deformat este:

$$E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2}. \tag{1.0.77}$$

Puterea medie P_m este lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp

$$P_m = \frac{L}{t}. \tag{1.0.78}$$

În cazul forței $\vec{F}$ constante, ce acționează pe direcția mișcării

$$P_m = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v_m, \tag{1.0.79}$$

v_m fiind viteza medie a corpului.

Puterea instantanee este produsul dintre forță și viteza instantanee

$$P = F \cdot v. \tag{1.0.80}$$

Unitatea pentru putere este J/s = W (watt).

1.0.5. MIȘCAREA UNIFORMĂ PE CERC

În cazul mișcării uniforme a unui corp pe cerc, viteza liniară $\vec{v}$ este constantă ca mărime, iar sensul și direcția vectorului $\vec{v}$ variază în timp.

Raportul dintre unghiul $\Delta\varphi$ măturat de raza vectoare și intervalul de timp Δt în care are loc rotația respectivă se numește *viteză unghiulară:*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.0.81}$$

În SI, viteza unghiulară se măsoară în rad/s. Sensul vectorului $\vec{\omega}$ se determină după regula burghiului (fig. 1.8).

Numărul rotațiilor efectuate de corp într-o secundă este *frecvența* ν, iar timpul unei rotații este *perioada* T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{1.0.82}$$

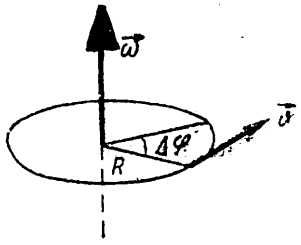


Fig. 1.8.

Între valoarea vitezei unghiulare și a vitezei liniare se obține relația:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R \ (\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}). \tag{1.0.83}$$

Dacă v = const., accelerația tangențială este zero, iar accelerația centripetă a_n orientată spre centrul cercului este:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \tag{1.0.84}$$

Deci pentru ca corpul să se poată deplasa uniform pe cerc, asupra lui trebuie să acționeze *forța centripetă:*

$$F_{cp} = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R. \tag{1.0.85}$$

Conform legii a treia a lui Newton, corpul va acționa asupra legăturilor cu o forță egală ca mărime cu F_{cp}, dar orientată în sens opus. Aceasta este *forța centrifugă:*

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R. \tag{1.0.86}$$

1.0.6. ROTAȚIA CORPULUI RIGID

În cazul mișcării de rotație a corpului rigid, particulele componente ale corpului se vor deplasa pe cercuri cu centrele pe axa de rotație, considerată în repaus.

Măsura inerției corpului față de mișcarea de rotație este *momentul de inerție*:

$$J = \sum_i m_i r_i^2. \tag{1.0.87}$$

Sumarea se face pe toate punctele materiale de masă m_i aflate la distanța r_i de axa de rotație.

A doua lege a lui Newton pentru mișcarea de rotație a corpului rigid este:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \tag{1.0.88}$$

unde $\vec{M}$ este momentul forțelor față de axa de rotație, iar $\vec{\varepsilon}$ este *accelerația unghiulară.*

$$|\vec{\varepsilon}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.0.89}$$

Cînd viteza unghiulară va crește, $\vec{\varepsilon}$ este orientat în același sens cu $\vec{\omega}$, iar cînd ω scade $\vec{\varepsilon}$ este orientat în sens opus lui $\vec{\omega}$.

Mărimea

$$\vec{K} = J\vec{\omega}, \tag{1.0.90}$$

se numește *moment cinetic.*

Energia cinetică a corpului în rotație este

$$E_c = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1.0.91}$$

Dacă axa de rotație se deplasează cu viteza v, rămînînd paralelă cu ea însăși, adică dacă avem concomitent o mișcare de rotație și una de translație, atunci energia cinetică totală este:

$$E_{ct} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1.0.92}$$

1.0.7. LEGI DE CONSERVARE

A cunoaşte starea mecanică a unui sistem de corpuri înseamnă a cunoaşte la un moment de timp t atît poziţiile cît şi vitezele corpurilor. Cunoaşterea stării iniţiale permite calcularea stărilor ulterioare cu ajutorul ecuaţiilor de mişcare. De multe ori, acest calcul este foarte complicat sau uneori imposibil. De aceea, ne vom opri la principiile generale ce rezultă din legile lui Newton. Deşi starea sistemului variază în timp, există mărimi fizice, funcţii de stare, care se conservă în timp:

1.0.7.1. Legea conservării impulsului

Dacă avem un ansamblu de n corpuri, atunci impulsul sistemului este suma impulsurilor fiecărui corp:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \ldots + \vec{H}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i. \tag{1.0.93}$$

Dacă rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra sistemului $\vec{R} = 0$, impulsul sistemului se conservă:

$$\vec{H} = \text{constant}. \tag{1.0.94}$$

Impulsul fiecărei particule din sistem poate varia în timp, dar numai astfel încît impulsul total $\vec{H}$ să rămînă constant.

Pentru un sistem de corpuri se introduce *centrul de inerţie C* (fig. 1.9) a cărui rază vectoare faţă de originea coordonatelor O este:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Viteza centrului de inerţie rezultă

$$\vec{V}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\sum \vec{H}_i}{m} = \frac{\vec{H}}{m}.$$

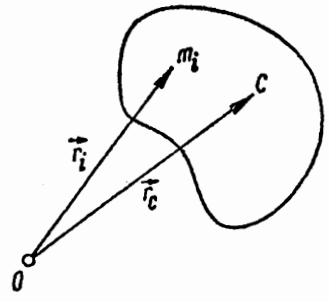


Fig. 1.9.

Dacă rezultanta forţelor ce acţionează asupra sistemului este zero ($\vec{R} = 0$), centrul de inerţie al sistemului se află în repaus sau se deplasează rectiliniu şi uniform.

1.0.7.2. Legea conservării energiei

Dacă asupra unui sistem nu acţionează forţe exterioare (sistem închis) şi dacă nu acţionează forţe de frecare între părţile sistemului, atunci energia mecanică se conservă în procesul de mişcare:

$$E = E_c + E_p = \text{constant}. \tag{1.0.95}$$

Un astfel de sistem se numește *conservativ*. Subliniem că se conservă energia mecanică totală, energia cinetică și potențială putînd varia, dar întotdeauna

$$\Delta E_c = -\Delta E_p. \tag{1.0.96}$$

În prezența forțelor de frecare,

$$E_f - E_i = L_f. \tag{1.0.97}$$

Cum lucrul mecanic al forțelor de frecare $L_f < 0$, $E_f < E_i$, adică energia totală a sistemului în starea finală este mai mică decît în starea inițială.

1.0.7.3. Legea conservării momentului cinetic

Din formula (1.0.88) rezultă că dacă momentul forțelor exterioare $\vec{M} = 0$, atunci

$$J\vec{\omega} = \text{const.} \tag{1.0.98}$$

Această relație reprezintă *legea conservării momentului cinetic* pentru un corp ce se rotește în jurul unei axe fixe.

În cazul unui ansamblu de corpuri aflate în rotație, dacă momentul rezultant al forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului de corpuri, față de o axă arbitrară aflată în repaus, este zero, atunci suma momentelor cinetice se conservă:

$$\vec{K} = J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2 + \ldots + J_n\vec{\omega}_n = \sum_i J_i\vec{\omega}_i = \text{constant} \tag{1.0.99}$$

1.0.7.4. Ciocnirea a două sfere elastice

Notăm cu m_1 și m_2 masele celor două sfere, cu $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ și $\vec{v}'_1$, $\vec{v}'_2$ vitezele lor înainte și după ciocnire. Din conservarea energiei și impulsului avem:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2, \tag{1.0.100}$$

$$\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1\vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2'^2}{2}. \tag{1.0.101}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații obținem:

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \tag{1.0.102}$$

Dacă $\vec{v}_2 = 0$, atunci:

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}; \quad \vec{v}'_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \tag{1.0.103}$$

Dacă $m_1 = m_2$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_2 \text{ și } \vec{v}'_2 = \vec{v}_1. \tag{1.0.104}$$

1.0.8. OSCILAȚII ȘI UNDE ELASTICE

1.0.8.1. Oscilații armonice

Sub acțiunea unei forțe elastice $F_{el} = -kx$, un punct material de masă m se deplasează după legea

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.0.105}$$

unde x este *elongația*, adică distanța de la poziția de echilibru la momentul t, A este valoarea maximă a elongației și se numește *amplitudine*, iar ω_0 este *pulsația proprie*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.0.106}$$

Mărimea

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \tag{1.0.107}$$

este *faza* oscilației, iar φ_0 este *faza inițială* depinzînd de alegerea momentului inițial.

Perioada oscilației este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{1.0.108}$$

iar *frecvența*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \tag{1.0.109}$$

reprezintă numărul oscilațiilor în unitatea de timp.

Viteza punctului material la un moment t este:

$$v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}, \tag{1.0.110}$$

iar accelerația:

$$a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x. \tag{1.0.111}$$

Energia oscilatorului armonic este

$$E = E_p + E_c = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_0^2(A^2 - x^2)}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \tag{1.0.112}$$

Prin compunerea a două oscilații paralele

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}), \end{aligned} \tag{1.0.113}$$

rezultă tot o mișcare oscilatorie

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.0.114}$$

unde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}, \tag{1.0.115}$$

iar

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \tag{1.0.116}$$

1.0.8.2. Unde elastice

Dacă într-un mediu elastic se produce o perturbație, aceasta se propagă din aproape în aproape cu o viteză ce depinde de natura mediului. Cînd direcția de propagare a oscilațiilor este paralelă cu deplasările particulelor mediului față de pozițiile de echilibru, avem o *undă longitudinală*, iar dacă direcția de propagare este perpendiculară pe direcțiile de deplasare a particulelor avem o *undă transversală*.

În punctul O (fig. 1.10), considerat sursă de perturbație, avem o oscilație armonică:

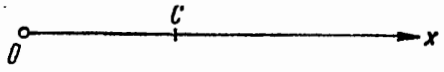


Fig. 1.10.

$$y(0,t) = A\sin\omega_0 t, \qquad (1.0.117)$$

iar în punctul C, aflat la distanța x de punctul O, vom avea:

$$y(x,t) = A\sin\omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (1.0.118)$$

unde v este viteza de propagare a undei.

Pentru $t = \text{const.}$, $y(x,t)$ are aceeași valoare pentru toate punctele mediului aflate la distanța λ unul de altul, unde λ este lungimea de undă

$$\lambda = v\cdot\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{v}{\nu} = v\cdot T. \qquad (1.0.119)$$

Se introduce ***numărul de undă***

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (1.0.120)$$

Cu aceste notații, ecuația (1.0.118) se mai poate scrie sub forma:

$$y(x,t) = A\sin\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{Tv}\right) = A\sin\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega_0 t - kx). \qquad (1.0.121)$$

Viteza de propagare a undei elastice longitudinale într-un mediu solid este

$$v = \sqrt{E/\rho}, \qquad (1.0.122)$$

unde E este modulul Young, iar ρ este densitatea mediului.

1.0.8.3. Interferența undelor elastice

Ne interesează suprapunerea undelor ce se propagă din sursele O_1 și O_2 în punctul P (fig. 1.11). Considerăm distanțele l_1 și l_2 suficient de mari pentru ca oscilațiile în punctul P să fie paralele. Prin compunerea undelor

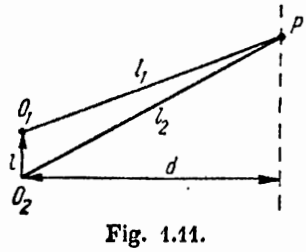


Fig. 1.11.

$$\begin{aligned} y_1 &= A\sin(\omega_0 t - kl_1), \\ y_2 &= A\sin(\omega_0 t - kl_2 + \varphi(t)), \end{aligned} \qquad (1.0.123)$$

se obține în punctul P:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{k(l_2 - l_1) - \varphi(t)}{2}\sin\left[\omega_0 t - \frac{k(l_1 + l_2) - \varphi(t)}{2}\right]. \qquad (1.0.124)$$

Se obține deci o *undă armonică* de aceeași pulsație ω_0, dar de amplitudine rezultantă

$$A_r = 2A \cos \frac{k(l_2 - l_1) - \varphi(t)}{2}. \tag{1.0.125}$$

Dacă $\varphi(t) = \text{const}$, sursele O_1 și O_2 sînt *coerente* și obținem că amplitudinea rezultantă A_r are valori maxime și minime. Considerînd $\varphi(t) = 0$, atunci

$$A_{r\,max} = 2A \text{ pentru } l_2 - l_1 = 2n\frac{\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.0.126}$$

și

$$A_{r\,min} = 0 \text{ pentru } l_2 - l_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.0.127}$$

Distanța dintre punctele vecine corespunzătoare valorilor $A_{r\,max}$ sau $A_{r\,min}$ se numește *interfranjă*.

$$i = \frac{\lambda l}{d}. \tag{1.0.128}$$

1.0.9. NOȚIUNI DE HIDRO- ȘI AEROMECANICĂ

Lichidele și gazele apasă pe fundul și pereții vasului exercitînd o *presiune*

$$p = \frac{F}{S}, \tag{1.0.129}$$

unde F este forța de apăsare, iar S aria suprafeței peretelui respectiv. Presiunea p se măsoară în $N \cdot m^{-2}$ și depinde de densitatea lichidului ρ și adîncimea vasului h,

$$p = \rho g h. \tag{1.0.130}$$

Deoarece la suprafața lichidului acționează presiunea atmosferică p_{at}, presiunea totală va fi:

$$p_t = p_{at} + \rho g h. \tag{1.0.131}$$

Presiunea lichidului depinzînd de adîncimea h, rezultă că asupra unui corp scufundat într-un lichid va acționa o presiune mai mare pe fața de jos decît pe fața de sus. Se ajunge astfel la legea lui Arhimede: *un corp cufundat într-un lichid este împins de jos în sus cu o forță egală ca mărime cu greutatea lichidului dezlocuit de corp*. Forța este aplicată în centrul de greutate al volumului lichidului dezlocuit de corp:

$$F_A = \rho g V_c, \tag{1.0.132}$$

unde V_c este volumul corpului, iar ρ — densitatea lichidului.

Dacă un corp plutește la suprafața unui lichid astfel încît V_{c2} se află în lichid, iar V_{c1} afară, atunci

$$V_{c2}\rho g = \rho_c g(V_{c1} + V_{c2}), \tag{1.0.133}$$

unde ρ_c — este densitatea corpului.

Sau

$$\frac{V_{c2}}{V_{c1}} = \frac{\rho_c}{\rho}\left(1 + \frac{V_{c2}}{V_{c1}}\right).$$

De unde

$$\frac{V_{c2}}{V_{c1}} = \frac{\rho_c}{\rho - \rho_c}. \tag{1.0.134}$$

Presiunea atmosferică $p_{at} = p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N · m^{-2} (760 mm col. Hg) se numește *presiune normală*.

Legea lui Pascal afirmă că *un lichid sau un gaz închis într-un vas transmite presiunea exercitată asupra sa în toate direcțiile la fel.* Legea lui Pascal, ca și legea lui Arhimede, prezintă multiple aplicații tehnice.

Un lichid omogen în două vase comunicante se află la același nivel. Dacă în unul din brațele vaselor comunicante se află un lichid de densitate ρ_1, iar în altul un lichid de densitate ρ_2, atunci din condiția că presiunile hidrostatice trebuie să fie egale avem:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2, \tag{1.0.135}$$

sau

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{1.0.136}$$

Curgerea unui lichid este *staționară* dacă prin orice secțiune se scurge același volum în unitatea de timp:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \tag{1.0.137}$$

unde S_1 și S_2 sînt secțiunile transversale ale fluxului, iar v_1 și v_2 vitezele corespunzătoare ale lichidului. Adică,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}, \tag{1.0.138}$$

vitezele de curgere ale lichidului sînt invers proporționale cu ariile secțiunilor fluxului de lichid.

La curgerea staționară a lichidului se aplică ecuația lui Bernoulli:

$$\rho g h + \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}, \tag{1.0.139}$$

unde p este *presiunea statică*, iar $\rho v^2/2$ este *presiunea dinamică*. Dacă curgerea are loc printr-un tub orizontal

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.} \tag{1.0.140}$$

1.0.10. ELEMENTE DE STATICĂ

Statica studiază condițiile de echilibru ale corpurilor. Condiția de echilibru față de mișcarea de translație este ca suma forțelor ce acționează asupra corpului să fie zero:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \tag{1.0.141}$$

Pentru ca să avem echilibru şi faţă de rotaţia în jurul unei axe arbitrare, trebuie ca suma momentelor forţelor faţă de axa respectivă să fie zero:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0. \qquad (1.0.142)$$

Deci dacă un corp se află în echilibru, atunci rezultanta tuturor forţelor este zero şi suma momentelor forţelor exterioare faţă de fiecare axă de coordonate este zero:

$$\sum \vec{M}_{ix} = 0; \ \sum \vec{M}_{iy} = 0; \ \sum \vec{M}_{iz} = 0. \qquad (1.0.143)$$

Dacă deformaţia corpului studiat poate fi neglijată, atunci punctul de aplicaţie ale forţei poate fi deplasat de-a lungul suportului acesteia, fără ca acţiunea ei să se schimbe.

Echilibrul corpurilor poate fi: stabil, instabil şi indiferent. Corpul în poziţia *a*) (fig. 1.12) este în echilibru stabil, iar în poziţia *b*) în echilibru instabil. Pe o suprafaţă orizontală, corpul este în echilibru indiferent (fig. 1.12, *c*).

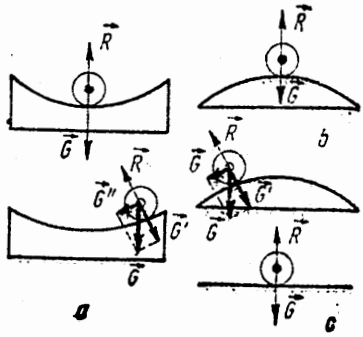


Fig. 1.12.

1.1. PROBLEME CU REZOLVĂRI

1.1.1. Un cărucior se deplasează rectiliniu cu acceleraţia $\vec{a} = \text{const}$. Începînd cu un moment t_1 se măsoară viteza căruciorului după intervale de timp t egale. Se constată că raportul vitezelor $v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 1 : 3 : 5 : 7...$ Să se calculeze:

a) rapoartele segmentelor parcurse de cărucior între două măsurări consecutive ale vitezei;

b) spaţiul parcurs în primele zece intervale de timp t.

Acceleraţia a şi intervalul de timp t se consideră cunoscute.

1.1.2. Un corp lăsat să cadă liber de la înălţimea h parcurge în ultima secundă $1/n$ din înălţimea h. Să se calculeze:

a) timpul după care corpul ajunge la sol;

b) viteza corpului cînd atinge solul.

Numărul n se consideră cunoscut, iar h se dă în metri.

1.1.3. Un corp este lansat pe verticală în sus. Dorim să calculăm viteza iniţială necesară pentru ca înălţimea $h = 39{,}2$ m să fie atinsă în timpul $t_1 = 8$ s şi respectiv, în timpul $t_2 = 4$ s. Plecăm de la relaţia cunoscută:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

de unde

$$v_0 = \frac{h}{t} + \frac{gt}{2}.$$

Înlocuind pe h și t, avem:

$$v_{01} = \frac{39,2}{8} + \frac{9,8 \cdot 8}{2} = 44,1 \text{ ms}^{-1},$$

$$v_{02} = \frac{39,2}{4} + \frac{9,8 \cdot 4}{2} = 29,4 \text{ ms}^{-1}.$$

Se cere să se explice de ce pentru a atinge aceeași înălțime, într-un timp mai mare se obține viteza inițială mai mare, iar pentru un timp mai mic, o viteză inițială mai mică.

1.1.4. În mișcarea rectilinie, cu accelerație constantă, a unui corp se cunoaște că pozițiile corpului pe axa x, la momentele t_1, t_2 și t_3 sînt x_1, x_2, x_3.

Se cere să se calculeze în funcție de mărimile t_1, t_2, t_3 și x_1, x_2, x_3:
a) accelerația corpului;
b) viteza inițială a corpului.

1.1.5. De la înălțimea $h_1 = 10$ m deasupra solului este lăsată să cadă o piatră, fără viteză inițială. Concomitent, de la înălțimea $h_2 = 5$ m se aruncă o altă piatră pe verticală în sus. Pietrele se întîlnesc la înălțimea $h = 1$ m de la sol. Se cere să se calculeze:
a) viteza inițială v_0 a celei de-a doua pietre;
b) vitezele celor două pietre în momentul întîlnirii.

1.1.6. Un corp este aruncat sub unghiul $\alpha = 60°$ cu orizontala, cu viteza inițială $v_0 = 33,9$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze:
a) timpul după care vectorul viteză face unghiul $\beta = 30°$ cu orizontala;
b) distanța maximă parcursă de corp pe orizontală.
Se neglijează rezistența aerului. Accelerația gravitațională $g = 9,8$ ms^{-2}.

1.1.7. O ghiulea este lansată pe verticală în sus cu viteza inițială $v_{01} = 1\,000$ ms^{-1}. O a doua ghiulea cu viteza inițială v_{02} cu 10% mai mică decît v_{01}, este lansată din același loc, în sus, pe verticală, după intervalul de timp τ de la lansarea primei ghiulele. Să se calculeze:
a) timpul τ astfel încît ghiulelele să se întîlnească în timpul minim de la lansarea primei ghiulele;
b) viteza primei ghiulele în momentul ciocnirii.

1.1.8. Să se stabilească ecuația traiectoriei descrise de un punct material dacă ecuațiile de mișcare pe axele Ox și Oy în planul xOy sînt:
a) $x = 4t$, $y = 2t + 6$;
b) $x = 5 \sin 2t$, $y = 5 \cos 2t$.

1.1.9. Două autobuze pornesc din aceeași stație cu vitezele inițiale $v_{01} = v_{02} = 0$. Al doilea autobuz pornește după un minut de la plecarea primului autobuz. Ambele se deplasează în același sens pe o șosea rectilinie, cu aceeași accelerație $a = 0,5$ ms^{-2}. Să se calculeze:
a) timpul după care distanța dintre autobuze este $d = 1\,500$ m;
b) vitezele autobuzelor în momentul cînd distanța între ele este d.

1.1.10. Un corp pornind din repaus se deplasează rectiliniu cu accelerația constantă a. În secunda a treia parcurge distanța $d = 5$ m. Să se calculeze:
a) accelerația a;
b) viteza corpului la momentul $t = 12$ s și spațiul parcurs în timpul t.

1.1.11. Un disc de rază R se roteşte pe un cerc de rază $2R$ aflat în repaus, astfel încît centrul O' al discului efectuează o rotaţie completă în jurul centrului O al cercului. Să se calculeze numărul rotaţiilor efectuate de disc în jurul axei proprii dacă:

a) rotaţia se face în interiorul cercului (fig. 1.14, *a*);

b) rotaţia se face pe partea exterioară a cercului (fig. 1.14, *b*).

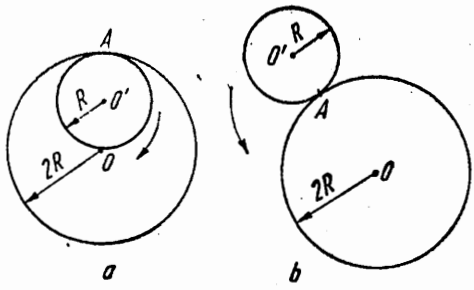


Fig. 1.14.

1.1.12. De multe ori se spune că dacă un punct material se deplasează rectiliniu, iar în intervale de timp egale parcurge spaţii egale, mişcarea este rectilinie şi uniformă. Această formulare este incorectă, deoarece trebuie specificat că spaţiile egale se parcurg în intervale arbitrare de timp egale. Se cere să se indice ecuaţia unei mişcări neuniforme astfel încît în intervale de timp egale cu 2 secunde, să se parcurgă spaţii egale cu patru metri.

1.1.13. O bandă de magnetofon se rulează de pe o bobină plină pe una goală, trecînd cu viteza constantă v_0 pe lîngă capul de înregistrare a sunetului. Raza iniţială a bobinei pline este r_0, grosimea benzii este d, iar lăţimea ei h. Se cere să se calculeze:

a) viteza unghiulară a bobinei iniţial pline, după un interval de timp t de la începerea rulării;

b) viteza unghiulară a bobinei iniţial pline, în momentul cînd aceasta devine goală.

1.1.14. O piatră este aruncată orizontal de la înălţimea $h = 17{,}6$ m, cu viteza iniţială $v_{0x} = 15$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze:

a) acceleraţia tangenţială şi acceleraţia normală după timpul $t = 1$ s de la aruncare;

b) distanţa d de la baza turnului din care a fost aruncată piatra pînă la locul în care piatra atinge solul.

1.1.15. Dintr-un avion în picaj ce se apropie de un obiectiv sub un unghi $\alpha = 60°$ cu orizontala şi viteza constantă $v_0 = 540$ km/h se lasă să cadă o bombă de la înălţimea $h = 735$ m de suprafaţa Pămîntului. Să se calculeze:

a) distanţa d, pe orizontală de la obiectiv, la care trebuie lansată bomba astfel încît să nimerească în ţintă;

b) viteza bombei în momentul atingerii ţintei.

1.1.16. Se măsoară adîncimea unei fîntîni prin următoarea metodă. De la sol se lasă să cadă liber o piatră în fîntînă şi se măsoară timpul τ după care se aude lovitura pietrei pe fundul fîntînii. Se cere să se stabilească pînă la ce valori ale timpului τ măsurat, putem neglija intervalul de timp τ_1 necesar propagării sunetului în aer cu viteza $v_s = 340$ ms^{-1}, dacă dorim ca adîncimea fîntînii h să fie stabilită cu o precizie de:

a) 5%; b) 10%.

1.1.17. Un corp este aruncat pe orizontală cu viteza $v_{0x} = 10$ m/s de la înălţimea $h = 19{,}6$ m. După ciocnirea elastică cu Pămîntul, corpul se

ciocnește elastic de un perete vertical aflat la distanța $l = 50$ m de baza locului de aruncare. Să se calculeze:

a) înălțimea maximă la care se ridică corpul după ciocnirea elastică cu Pământul;

b) distanța d de la baza peretelui vertical la care corpul ajunge din nou pe Pământ.

1.1.18. O piatră este lăsată să cadă liber într-un puț de mină. După timpul $\tau = 6$ s de la lansare se aude lovitura pietrei pe fundul puțului. Viteza sunetului în aer este $v_s = 340$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) adîncimea puțului de mină;

b) eroarea relativă comisă dacă se neglijează timpul propagării sunetului în aer.

1.1.19. Un elicopter se ridică de la sol pe verticală avînd o mișcare uniform accelerată cu accelerația $a = 2$ m/s^2 și viteza inițială $v_0 = 0$. La înălțimea $h = 384{,}16$ m, din elicopter se lasă să cadă un obiect. Să se calculeze:

a) înălțimea maximă de la sol, atinsă de obiect;

b) timpul, din momentul lansării din elicopter, în care obiectul se deplasează în aer și viteza cu care acesta ajunge la sol.

1.1.20. Un corp cu densitatea $\rho_c = 600$ kgm^{-3} cade liber de la înălțimea $h_1 = 3{,}5$ m de la suprafața unui bazin cu apă. Forța de rezistență a aerului se consideră constantă și egală cu 28,571% din greutatea corpului. Densitatea apei este $\rho_a = 1\,000$ kgm^{-3}, iar accelerația gravitațională $g = 9{,}8$ ms^{-2}. Să se calculeze:

a) viteza cu care ajunge corpul la suprafața apei;

b) adîncimea h_2 pînă la care se scufundă corpul în apă.

1.1.21. Un corp cu masa m se deplasează pe o suprafață orizontală sub acțiunea forței F ce face unghiul α cu orizontala (fig. 1.18). Coeficientul de frecare între corp și suprafața orizontală este μ. Să se calculeze:

a) accelerația corpului;

b) valoarea forței F pentru care mișcarea corpului este uniformă.

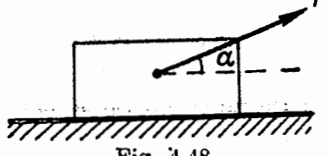


Fig. 1.18.

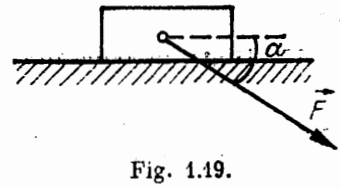


Fig. 1.19.

1.1.22. Să se rezolve problema precedentă dacă forța F acționează ca în figura 1.19.

1.1.23. O bilă de masă $m = 100$ g se ciocnește elastic de un perete (fig. 1.20). Viteza sferei în momentul ciocnirii este $v_0 = 10$ ms^{-1} și face unghiul $\alpha = 45°$ cu normala la suprafața peretelui. Timpul de impact dintre sferă și perete este $\tau = 0{,}02$ s.

Se cere să se calculeze mărimea și sensul forței medii cu care bila acționează asupra peretelui.

1.1.24. Un punct material de masă $m = 0{,}5$ kg, deplasîndu-se uniform, parcurge un sfert de cerc de rază $r = 3{,}15$ m în timpul $t = 2{,}5$ s. Să se calculeze:

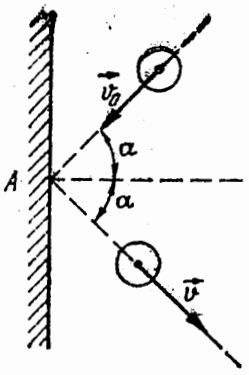


Fig. 1.20.

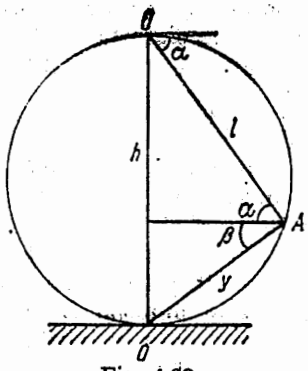


Fig. 1.23.

a) perioada T, frecvența ν și viteza unghiulară ω a mișcării punctului material pe cerc;

b) variația impulsului punctului material în timpul cît acesta parcurge un sfert de cerc.

1.1.25. Din punctul O al diametrului vertical OO' al unui cerc (figura 1.23) se dă drumul concomitent la două corpuri de dimensiuni neglijabile. Primul corp coboară direct pe verticală, adică pe diametrul OO', iar al doilea pe o coardă OA de lungime l.

a) Să se demonstreze că cele două corpuri ajung la cerc în același timp, dacă se neglijează frecarea.

b) Să se calculeze raportul dintre timpul de coborîre pe diametrul OO' și timpul de coborîre pe coarda OA, dacă coeficientul de frecare este μ.

1.1.26. O roată cu raza $r = 0{,}75$ m începe să se rotească cu accelerația unghiulară constantă $\varepsilon = 1{,}57$ rad/s^2. Să se calculeze la momentul de timp $t = 2$ s, pentru punctele de pe circumferința roții:

a) viteza unghiulară ω; b) viteza liniară v; c) accelerația tangențială a_t; d) accelerația normală a_n; e) accelerația totală a; f) unghiul dintre accelerația totală și raza roții.

1.1.27. Asupra unui corp de masă m ce se deplasează pe o suprafață orizontală cu viteza $|\vec{v_0}| = 5$ ms^{-1} începe să acționeze la momentul $t_0 = 0$, forța $|\vec{F}| = 10$ N orientată în sensul vitezei $\vec{v_0}$. După timpul $t = 10$ s din momentul începerii acțiunii forței $\vec{F}$, energia cinetică a corpului este $E_c = 1$ kJ. Să se calculeze:

a) masa m a corpului;

b) spațiul parcurs de corp în timpul t;

c) lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ în timpul t.

1.1.28. Distanța de la centrul Pămîntului la centrul Lunii este $R_L = 3{,}84 \cdot 10^8$ m. Considerîndu-se că Luna se rotește în jurul Pămîntului aproximativ pe cerc, perioada medie de rotație a Lunii în jurul Pămîntului fiind de $T = 27{,}322$ zile, se cere să se calculeze:

a) viteza liniară a Lunii;

b) accelerația centripetă a Lunii;

c) să se arate că raportul dintre accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului și accelerația centripetă a Lunii este egal cu raportul dintre R_L^2 și R_p^2, unde $R_p = 6{,}37 \cdot 10^6$ m este raza Pămîntului.

1.1.29. Un biciclist parcurge distanța AB între două localități, într-un timp $t = 30$ minute. O treime din distanța AB, biciclistul o urcă în pantă cu viteza constantă $v_1 = 2$ ms^{-1}, iar restul drumului coboară o altă pantă cu viteza constantă $v_2 = 8$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) distanța AB;

b) unghiul mediu pe care-l face drumul, la coborîre, cu orizontala, dacă biciclistul ajuns în punctul de înălțimea maximă coboară liber, fără să pedaleze, ajungînd în punctul B cu viteza $v_2 = 22$ ms^{-1};

c) timpul în care biciclistul parcurge distanța AB, dacă merge cum se indică la punctul b).

1.1.30. Două corpuri cu masele $m_1 = 6$ kg și $m_2 = 2$ kg sînt legate printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix. Inițial, corpurile se află la aceeași înălțime $h = 5$ m de la suprafața Pămîntului. Masa scripetelui și frecările cu aerul se neglijează. Să se calculeze:

a) viteza cu care corpul de masă m_1 atinge solul;

b) înălțimea maximă la care se ridică corpul de masă m_2.

1.1.31. Corpul de masă $m_1 = 50$ kg, ce alunecă cu frecare pe un plan orizontal, este legat printr-un fir inextensibil, de corpul de masă $m_2 = 30$ kg (fig. 1.24). La momentul inițial, firul fiind întins, corpul de masă m_2 se află la înălțimea $h = 4$ m. Dacă sistemul este lăsat liber, corpurile se deplasează

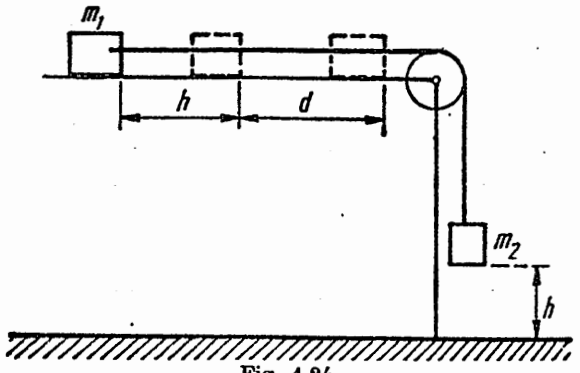


Fig. 1.24.

uniform accelerat pînă cînd corpul de masă m_2 atinge solul. După aceea, corpul de masă m_1 continuă să se deplaseze uniform încetinit pe distanța $d = 5$ m pe orizontală. Se cere să se calculeze:

a) coeficientul de frecare dintre corpul cu masa m_1 și planul orizontal;

b) timpul în care corpul de masă m_1 parcurge distanța $h + d$.

1.1.32. Este cunoscut faptul că atît la polul Nord cît și la polul Sud al Pămîntului, greutatea corpurilor este cu aproximativ 0,3% mai mare decît la ecuator. Uneori, acest lucru este explicat prin faptul că Pămîntul este puțin turtit la poli. Această explicație este evident falsă.

Diferența greutății corpurilor la poli și la ecuator se datorește faptului că sistemele de referință legate de Pămînt nu sînt perfect inerțiale. Asupra unui corp fixat la o înălțime h de suprafața Pămîntului va acționa pe lîngă

forța atracției universale și forța centrifugă de inerție, datorită rotației Pămîntului în jurul axei sale.

Pornind de la această idee, se cere să se stabilească dependența greutății unui corp cu masa m de latitudinea φ.

1.1.33. De plafonul unui vagon ce se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza v_0 este fixat un corp de dimensiuni neglijabile și masă m, printr-o bară de lungime l și masă neglijabilă, precum și o bară de lungime $2l$ și masă m (fig. 1.26).

La un moment $t_0 = 0$, vagonul începe să fie frînat astfel încît se oprește după timpul τ.

Se cere să se calculeze unghiul α maxim pe care-l face cu verticala în timpul frînării:

a) bara A;

b) bara B.

Să se explice diferența între unghiurile α în cele două cazuri.

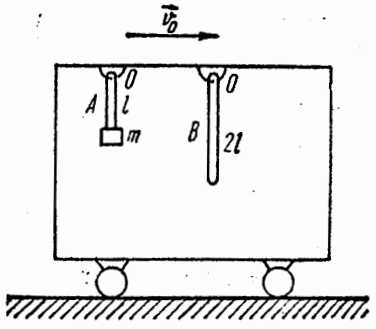


Fig. 1.26.

1.1.34. Un automobil se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza $v_0 = 108$ km/h. La momentul $t = 0$, automobilul este frînat deplasîndu-se uniform încetinit pînă la oprire. Știind că în timpul mișcării încetinite, suprafața benzinei din rezervorul automobilului face unghiul $\alpha = 11°20'$ cu orizontala ($\sin \alpha = 0{,}1959$, $\cos \alpha = 0{,}9795$), să se calculeze:

a) coeficientul de frecare μ de alunecare a automobilului pe șosea;

b) timpul t pînă la oprirea automobilului și distanța d parcursă.

Accelerația gravitațională $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.1.35. Un corp de masă m_1, ce se deplasează cu viteza v_1, ciocnește central și elastic un corp de masă m_2 aflat în repaus. Se cere să se calculeze:

a) vitezele celor două corpuri după ciocnire;

b) raportul m_1/m_2 pentru ca viteza corpului de masă m_1 să fie după ciocnire de trei ori mai mică decît înainte de ciocnire;

c) energia cinetică a corpului de masă m_2 după ciocnire, în condițiile de la punctul b), dacă energia cinetică a corpului de masă m_1, înainte de ciocnire, este $E_{c1} = 4{,}5$ J.

1.1.36. Încetinirea neutronilor în reactor se face prin ciocnirea elastică a acestora cu atomii de hidrogen, deoarece masa neutronului este practic egală cu masa atomului de hidrogen. Se cere:

a) să se explice necesitatea acestui procedeu;

b) ce se va întîmpla prin ciocnirea neutronilor cu atomii de carbon, care au masa de douăsprezece ori mai mare decît masa neutronului?

Se neglijează, evident, procesul de captură a neutronilor.

1.1.37. O bilă cade de pe raftul unui vagon aflat într-o mișcare rectilinie și uniformă. Înălțimea raftului față de podeaua vagonului este $h = 1{,}96$ m, iar viteza trenului este $v_0 = 72$ km/h. Se cere:

a) să se deseneze traiectoria bilei față de un sistem de referință S legat de vagon și față de un sistem de referință S' legat de Pămînt și să se calculeze

distanța parcursă de vagon din momentul căderii bilei pînă cînd aceasta atinge podeaua vagonului;

b) viteza totală a bilei față de referențialul S' și unghiul pe care-l face aceasta cu orizontala la momentul $t = 0{,}4$ s de la cădere.

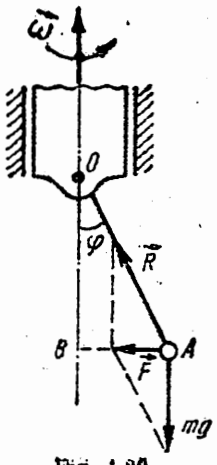


Fig. 1.29.

1.1.38. De un cilindru vertical ce se rotește cu viteza unghiulară ω se leagă printr-un fir inextensibil de lungime $l = 0{,}4$ m un corp de masă m și de dimensiuni neglijabile (fig. 1.29). Se cere să se calculeze unghiul φ pe care-l face firul cu verticala dacă:

a) $\omega = 7$ rad s^{-1};

b) $\omega = 1{,}4$ rad s^{-1}.

Să se explice rezultatele obținute. Masa firului se neglijează.

1.1.39. Corpurile A și B sînt lăsate să cadă liber de la înălțimea $H = 39{,}2$ m. Corpul A cade liber pînă la sol, iar corpul B întîlnește la înălțimea h un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală, cu care se ciocnește elastic. Se cere să se calculeze:

a) înălțimea h astfel încît raportul dintre timpul t_B de cădere pînă la sol a corpului B și timpul t_A de cădere a corpului A să fie maxim;

b) distanța parcursă de corpul B pe orizontală;

c) vitezele v_A și v_B cu care corpurile A și B ajung la sol.

1.1.40. Sferele A și B identice suferă o ciocnire elastică. Sfera A are viteza $\vec{v}_1$ înainte de ciocnire, iar sfera B se află în repaus. După ciocnire, cele două sfere se deplasează cu vitezele $\vec{v}_1'$ și $\vec{v}_2'$ ce fac unghiul $\varphi = 90°$ între ele, valorile vitezelor fiind $v_1' = v_2' = 5$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) unghiul α dintre traiectoria sferei B după ciocnire și traiectoria sferei A înainte de ciocnire;

b) viteza sferei A înainte de ciocnire.

1.1.41. Într-un autobuz ce se deplasează cu viteza constantă $v_0 = 75{,}6$ km/h se află, în picioare, un om cu centrul de greutate la înălțimea $h = 1{,}4$ m de la podeaua autobuzului. În timpul frînării autobuzului, omul trebuie să facă un pas minim de 0,6 m pentru a se menține în poziția verticală. Se cere să se calculeze:

a) intervalul de timp, din momentul frînării, după care autobuzul se oprește și distanța parcursă pînă la oprire;

b) timpul τ minim după care autobuzul se oprește, prin frînare, astfel încît omul să se poată menține în poziția verticală, dacă el poate face un pas maxim de 1 m.

1.1.42. Un cîntar cu arc, de care este prins un corp cu masa $m = 5$ kg, este fixat de tavanul unui lift. Să se calculeze greutatea indicată de cîntar dacă:

a) liftul urcă accelerat cu accelerația $a_1 = 5{,}2$ ms^{-2};

b) liftul urcă într-o mișcare uniform încetinită cu accelerația $a_2 = 3{,}8$ ms^{-2};

c) liftul se deplasează accelerat în jos cu accelerația $a_3 = 2$ ms^{-2};

d) liftul coboară uniform încetinit cu accelerația de frînare $a_4 = 7{,}2$ ms^{-2}.

1.1.43. Un cărucior cu masa $m_1 = 78$ kg este prins printr-un fir inextensibil, ce trece peste un scripete de masă neglijabilă, de un corp de masă $m_2 = 20$ kg ce se deplasează pe verticală (figura 1.33). Sub acțiunea forței $F = 245$N, sistemul se deplasează uniform accelerat, fără viteză inițială, un timp $t_1 = 10$ s. Se cere să se calculeze:

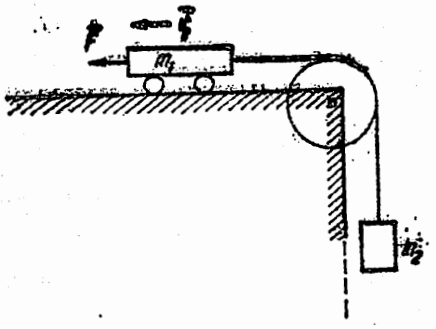


Fig. 1.33.

a) intervalul de timp t de la încetarea acțiunii forței F, după care cărucior ul se află din nou în locul în care a încetat acțiunea forței F;

b) spațiul parcurs de cărucior în intervalul de timp t;

c) tensiunea T din firul de legătură, înainte și după încetarea acțiunii forței F.

1.1.44. La capetele unei bare de masă m și lungime l acționează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (fig. 1.34) în sensuri opuse ($F_1 > F_2$).

a) Să se calculeze tensiunea T în secțiunea transversală a barei, aflată la distanța x ($0 \leqslant x \leqslant l$) de punctul A de aplicație a forței F_1.

b) Cum depinde tensiunea T de distanța x, dacă $F_1 = F_2$?

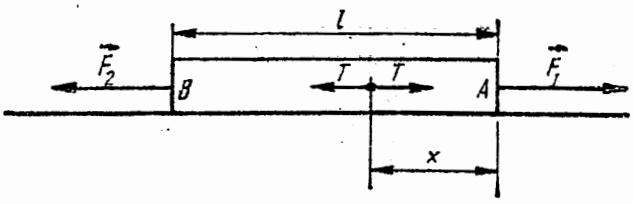


Fig. 1.34.

1.1.45. O barcă de lungime L și masă M se află pe suprafața unui lac cu apă stătătoare. Un om cu masa m se deplasează cu viteza $v_0 = \text{const.}$, față de malul lacului, de la un capăt la altul al bărcii. Se cere să se calculeze distanța l cu care se deplasează barca față de mal, în timp ce omul parcurge distanța L în barcă. Se consideră că barca este orientată perpendicular pe malul lacului.

1.1.46. Două corpuri A și B cu masele m_1 și m_2 sînt legate prin intermediul unui dinamometru, ca în figura 1.36. Să se calculeze:

a) forța indicată de dinamometru, dacă $m_1 = m_2 = 5$ kg;

b) masa Δm_2 ce trebuie adăugată la corpul B pentru ca dinamometrul să indice aceeași forță ca la punctul a), dacă din corpul A se iau 2 kg.

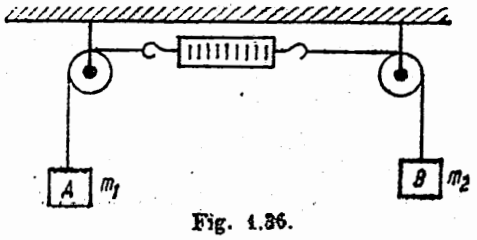


Fig. 1.36.

1.1.47. Corpurile A și B, de masă m_1 și respectiv $m_2 = 2\,m_1$, sînt legate printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix. La momentul $t = 0$, corpurile A și B se află la aceeași înălțime h de la sol. Masa firului și a scripetelui se neglijează, iar corpurile A și B se consideră punctiforme.

Se cere să se stabilească traiectoria și legea de mișcare pentru centrul de greutate C al corpurilor A și B, dacă sistemul este lăsat liber. Să se explice de ce, în acest caz, centrul de greutate C nu se află în repaus sau într-o mișcare rectilinie și uniformă.

1.1.48. Un corp A cu masa $m_1 = 100$ kg, ce alunecă cu frecare pe un plan orizontal, este legat, printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete fix, de un corp B cu masa $m_2 = 40$ kg care coboară pe verticală. La momentul inițial $t = 0$, firul fiind întins, sistemul celor două corpuri se află în repaus. Dacă sistemul este lăsat liber, corpul B coboară distanța $h = 2{,}8$ m în timpul $t = 2$ secunde. Să se calculeze:

a) coeficientul de frecare a corpului A pe planul orizontal;

b) masa m_2' a corpului B ca sistemul lăsat liber să rămînă în repaus.

1.1.49. La capătul de sus al unui arc comprimat cu $x = 20$ cm și ținut în poziție verticală cu capătul de jos fixat se află un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg. Dacă sistemul este lăsat liber, corpul urcă pînă la înălțimea maximă $h = 10$ m. Să se calculeze:

a) constanta elastică a arcului;

b) pulsația proprie ω și frecvența ν a oscilației libere a corpului de masă m prin intermediul arcului considerat.

1.1.50. Un balon destinat studiului atmosferei coboară cu viteză constantă pe verticală. Masa balonului și a încărcăturii este M. Să se calculeze masa m ce trebuie aruncată pentru ca balonul să urce cu viteză constantă pe verticală. Forța ascensională a balonului rămîne constantă.

1.1.51. Unui pendul matematic cu masa m și lungimea l, aflat în poziția de echilibru, i se imprimă un impuls orizontal H_0 minim, astfel încît pendulul poate efectua o rotație completă în plan vertical. Să se calculeze:

a) valoarea impulsului H_0;

b) tensiunea în fir cînd pendulul trece din nou prin poziția de echilibru.

Mărimile m și l se consideră cunoscute. Rezistența aerului se neglijează.

1.1.52. Să se demonstreze că dacă $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ sînt vectorii de poziție a două puncte materiale A și B cu masele m_1 și m_2, atunci punctul C, care caracterizează poziția centrului de greutate al sistemului, de rază vectoare

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

se află pe aceeași linie cu punctele materiale A și B, iar raportul distanțelor CA și CB este egal cu raportul maselor m_2 și m_1.

1.1.53. Să se demonstreze că dacă energia mecanică a unui sistem este constantă într-un sistem de referință inerțial S, atunci aceasta este constantă în orice alt sistem de referință inerțial S'.

1.1.54. Cu un tun de masă M se trage un proiectil cu masa m sub un unghi α cu orizontala. Dacă tunul este fixat de sol, bătaia proiectilului este d_1, iar dacă tunul este liber, bătaia proiectilului este d_2. Se cere să se calculeze raportul d_1/d_2.

1.1.55. O sferă de masă $M = 90$ g cade liber pe verticală de la înălțimea h de la sol. În momentul cînd sfera trece prin punctul A aflat la înălțimea $h/2$ de la sol, în sferă se trage orizontal un glonț cu masa $m = 10$ g și viteza $v_0 = 500$ ms^{-1}. Ciocnirea fiind perfect neelastică, glonțul rămîne în sferă. Sistemul glonț + sferă ajunge la sol cu viteza v. Dacă sfera cădea liber pe verticală, ar fi ajuns la sol cu viteza V. Se cere să se calculeze înălțimea h astfel încît raportul $v/V = \sqrt{2}$.

1.1.56. În figura 1.42 se indică schema unei experiențe pentru măsurarea masei Pămîntului. Pe cele două talere ale balanței se află sferele A și B, avînd aceeași masă m, fiecare. Sub sfera B, pe verticală, se așază sfera C cu masa m_1. Centrele sferelor B și C se află la distanța d între ele. Masa m_1 fiind mare se strică echilibrul balanței. Pentru stabilirea echilibrului, pe platanul cu sfera A se mai pune un corp cu masă m_2 foarte mică. Este clar că pentru o astfel de experiență, este necesar să avem o balanță foarte sensibilă și să se respecte o serie de condiții pentru înlăturarea influenței factorilor externi.

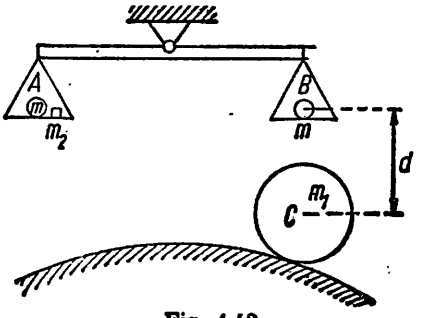


Fig. 1.42.

Considerînd că toate aceste condiții sînt îndeplinite, să se calculeze masa Pămîntului, dacă $m_A = m_B = m = 5$ kg, $m_1 = 6 \cdot 10^3$ kg, $m_2 = 6 \cdot 10^{-7}$ kg, $d = 57$ cm, iar raza Pămîntului $R_p = 6{,}4 \cdot 10^6$ m. Lungimea brațului balanței se alege suficient de mare pentru ca interacțiunea gravitațională între sferele A și C să poată fi neglijată.

1.1.57. Se consideră o planetă sferică de rază R. Se cere să se calculeze densitatea planetei în condițiile:

a) un satelit se rotește în jurul planetei cu perioada T, la distanța $h = R/2$ de suprafața planetei;

b) planeta efectuează o rotație completă în jurul axei proprii în timpul $T' = 10$ h, iar la ecuatorul planetei, corpurile sînt imponderabile.

1.1.58. Un automobil deplasîndu-se pe o șosea rectilinie cu viteza constantă $v_0 = 20$ ms^{-1}, este frînat astfel ca după timpul $t = 10$ s din momentul frînării, automobilul să se oprească, parcurgînd în mișcarea uniform încetinită distanța $d = 80$ m.

Vrem să calculăm coeficientul de frecare μ dintre roțile automobilului și șosea.

Forța de frecare fiind $F_f = \mu mg$,

$$ma = -\mu mg;\ a = -\mu g.$$

Deci

$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2};\ a = \frac{2d - 2v_0 t}{t^2} = \frac{2 \cdot 80 - 2 \cdot 20 \cdot 10}{100} = -2{,}4$$

sau

$$-\mu g = -2{,}4.$$

De unde $\mu = 2{,}4/g$.

Se cere să se explice dacă raționamentul de mai sus este corect.

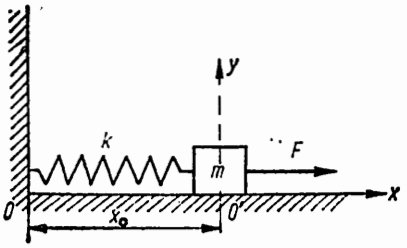


Fig. 1.43.

1.1.59. Un corp de masă m se află pe o suprafață orizontală pe care se poate deplasa fără frecare. Corpul este legat printr-un arc orizontal cu constanta elastică k. Lungimea arcului în stare netensionată este x_0 (fig. 1.43). Începînd cu momentul $t_0 = 0$, asupra corpului acționează forța constantă F. Să se calculeze:

a) deplasarea maximă de la poziția de echilibru sub acțiunea forței F;

b) deplasarea maximă de la poziția de echilibru, dacă forța F crește foarte încet de la zero la F.

1.1.60. Particula A cu masa m și viteza $\vec{v}_0$ ciocnește elastic particula B cu masa M și viteza $\vec{V}_0 = 0$. După ciocnire, particula A se deplasează cu viteza $\vec{v}$, sub unghiul $\alpha = 90°$ față de direcția mișcării dinainte de ciocnire. Se cere să se stabilească:

a) care din masele m și M este mai mare?

b) vitezele $\vec{v}$ și $\vec{V}$ ale particulelor A și B după ciocnire;

c) unghiul β dintre vectorii $\vec{V}$ și $\vec{v}_0$.

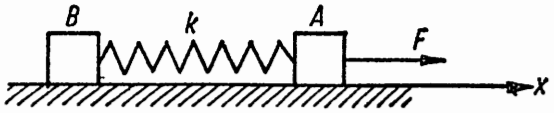


Fig. 1.45.

1.1.61. Corpurile A și B cu masele m_1 și respectiv, m_2 se află pe o suprafață orizontală (figura 1.45) pe care alunecă fără frecare. Corpurile sînt legate printr-un arc cu constanta elastică k. Forța F ce acționează asupra corpului A variază după o lege armonică:

$$F = F_0 \sin \omega t.$$

Se cere să se stabilească condiția pentru care corpul A rămîne în repaus sub acțiunea forței F.

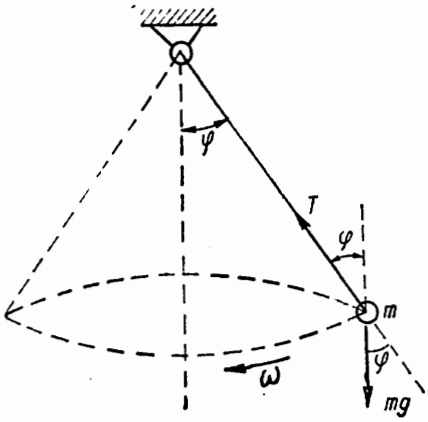


Fig. 1.46.

1.1.62. În figura 1.46 se indică un pendul conic. Masa m descrie un cerc în plan orizontal, iar unghiul dintre fir și verticală este φ. Se pune problema găsirii tensiunii T din fir în funcție de masa m și unghiul φ. Elevii unei clase au rezolvat problema astfel:

A. Unii consideră că deoarece corpul de masă m nu se deplasează în lungul firului, rezultanta forțelor în lungul firului este zero:

$$T - mg \cos \varphi = 0; \quad T = mg \cos \varphi.$$

B. Alţii consideră că deoarece corpul nu se deplasează pe verticală, trebuie să fie zero rezultanta forţelor pe verticală:

$$T\cos\varphi - mg = 0;\ T = mg/\cos\varphi.$$

Se cere să se indice care din rezolvările date este incorectă.

1.1.63. De o bară orizontală cu masa neglijabilă se leagă două corpuri cu masele M şi m. Bara se poate roti fără frecare în plan vertical, în jurul axei orizontale ce trece prin punctul O (fig. 1.47). Corpul de masă M se află la distanţa L de punctul O, iar corpul de masă m — la distanţa l de punctul O. Dacă sistemul este lăsat liber, se roteşte pînă cînd bara ocupă o poziţie verticală, corpul de masă M aflîndu-se în partea de jos a barei.

Să se calculeze viteza V cu care corpul de masă M ajunge în punctul O'. Care este formula pentru V, dacă $l = 0$?

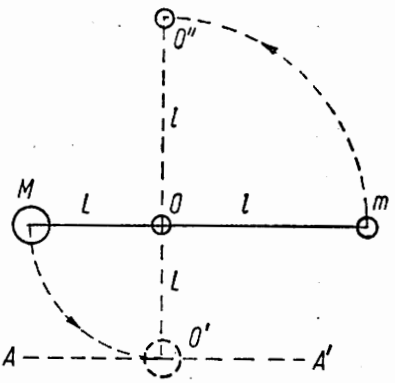


Fig. 1.47.

1.1.64. Corpurile A şi B, cu masele $m_1 = 15$ kg şi respectiv, $m_2 = 5$ kg, se află pe o suprafaţă orizontală, legate prin intermediul unui dinamometru (figura 1.48). Asupra corpului A acţionează forţa $F_1 = 150$ N, iar asupra corpului B acţionează forţa $F_2 = 100$ N, în sens opus forţei $\vec{F}_1$.

Să se calculeze forţa indicată de dinamometru dacă:

a) coeficientul de frecare al corpurilor A şi B pe planul orizontal este $\mu = 0$;

b) coeficientul de frecare este $\mu \neq 0$;

c) forţa $\vec{F}_2$ acţionează în acelaşi sens cu forţa $\vec{F}_1$. Ce relaţie trebuie să existe în acest caz între mărimile F_1, F_2, m_1 şi m_2 pentru ca dinamometrul să indice o forţă $T = 0$?

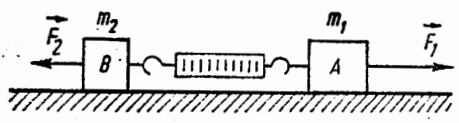


Fig. 1.48.

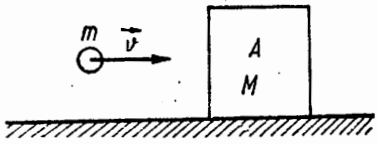


Fig. 1.49.

1.1.65. O cutie A cu nisip se află pe o suprafaţă orizontală pe care se poate deplasa fără frecare. Cutia are masa M. În cutie se trage un glonţ de masă m cu viteza orizontală $\vec{v}$ (fig. 1.49). Se cere viteza V a cutiei după ce glonţul s-a oprit în cutie.

Problema a fost rezolvată în următoarele două feluri.

a) Un grup de elevi au scris:

Înainte de ciocnire, energia cinetică a glonţului este $mv^2/2$, iar energia cinetică a cutiei este zero. După ciocnire, viteza glonţului şi a cutiei este

aceeaşi, fiind egală cu V. Deci imediat după ciocnire, energia cinetică a sistemului glonţ + cutie este:

$$\frac{(m+M)V^2}{2}.$$

Din legea conservării energiei:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)V^2}{2};\quad V = v\sqrt{\frac{m}{m+M}}. \qquad (1)$$

b) Alt grup de elevi consideră:

înainte de ciocnire, impulsul sistemului este $H_i = mv$, iar după ciocnire este $H_f = (m+M)V$. Din legea conservării impulsului:

$$H_i = H_f;\quad V = v\frac{m}{m+M}. \qquad (2)$$

Deoarece rezultatele (1) şi (2) nu coincid, înseamnă că unul din raţionamentele de mai sus nu este corect. Să se indice care este valoarea reală a vitezei V şi să se arate unde s-a greşit în raţionamentul incorect.

1.1.66. Un cablu flexibil şi omogen, de lungime l, se află întins pe o masă orizontală. Dacă unul din capetele cablului atîrnă pe verticală astfel încît pe masă rămîne lungimea $l - x$, iar lungimea x din cablu atîrnă pe verticală, cablul începe să alunece de pe masă. Să se calculeze:

a) coeficientul de frecare între cablu şi masă în funcţie de lungimile l şi x;

b) care este lungimea x_1 maximă a cablului ce atîrnă pe verticală astfel încît cablul să rămînă în repaus?

1.1.67. Corpurile A şi B, cu masele $M = 20$ kg şi respectiv, $m = 5$ kg, sînt legate printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix, ca în figura 1.50. Coeficientul de frecare al corpurilor A şi B de pereţii căruciorului este $\mu = 0{,}2$.

Se cere să se stabilească sensul şi mărimea acceleraţiei căruciorului pentru ca, faţă de cărucior, corpurile să rămînă în repaus.

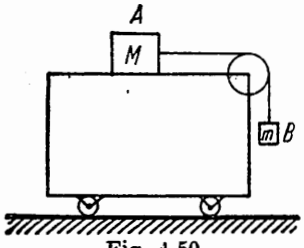


Fig. 1.50.

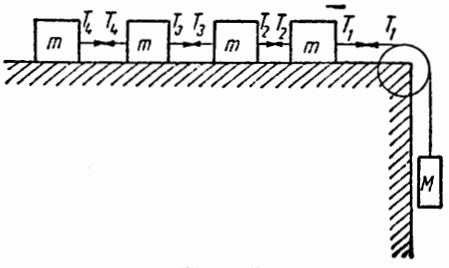


Fig. 1.51.

1.1.68. Pe o suprafaţă orizontală se găsesc patru cuburi cu aceeaşi masă m, legate prin fire inextensibile de masă neglijabilă. Sistemul de cuburi este legat de un corp de masă M care se deplasează pe verticală (fig. 1.51). Să se calculeze acceleraţia sistemului şi tensiunile T_1, T_2, T_3, T_4, dacă:

a) cuburile alunecă fără frecare pe planul orizontal;

b) coeficientul de frecare dintre cuburi şi planul orizontal este μ.

1.1.69. O scîndură de masă M și lungime l se află pe un plan orizontal pe care poate aluneca fără frecare. Pe scîndură se află un cub cu masa m (fig. 1.52) care poate aluneca cu frecare pe fața superioară a scîndurii. Coeficientul de frecare între cub și fața superioară a scîndurii este μ. Să se calculeze:

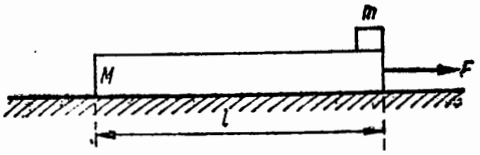


Fig. 1.52.

a) valoarea forței F, care acționează orizontal asupra scîndurii, pentru care cubul începe să alunece pe fața superioară a scîndurii;

b) timpul după care cubul ajunge la capătul opus al scîndurii.

1.1.70. Să se calculeze înălțimea h de la suprafața Pămîntului, la care energia cinetică a unui corp cu masa m este de n ori mai mare decît energia sa potențială în cîmpul gravitațional al Pămîntului, dacă:

a) corpul este lansat de la sol pe verticală în sus cu viteza inițială v_0;

b) corpul cade liber de la înălțimea H;

c) corpul este lansat pe verticală în jos cu viteza v_0 de la înălțimea H.

Mărimile v_0 și H se consideră cunoscute.

1.1.71. Pe talerul cu masa M, atîrnat de un arc cu constanta elastică k (fig. 1.53) cade de la înălțimea h un corp cu masa m. Ciocnirea dintre corp și taler este perfect neelastică.

Să se calculeze amplitudinea oscilațiilor corpului împreună cu talerul.

1.1.72. O rachetă se ridică vertical de pe suprafața Pămîntului, cu accelerația constantă $a = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$ (fig. 1.54). În rachetă se află un corp cu masa m.

Se cere să se calculeze greutatea corpului față de rachetă pentru $r = nR_p$, unde $n = 1, 2, 5, 10$.

Să se deseneze dependența greutății G de distanța r. Accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului este $g_0 = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$.

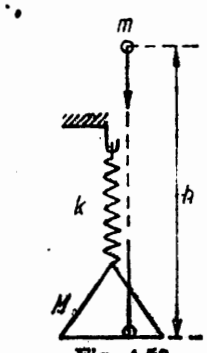


Fig. 1.53.

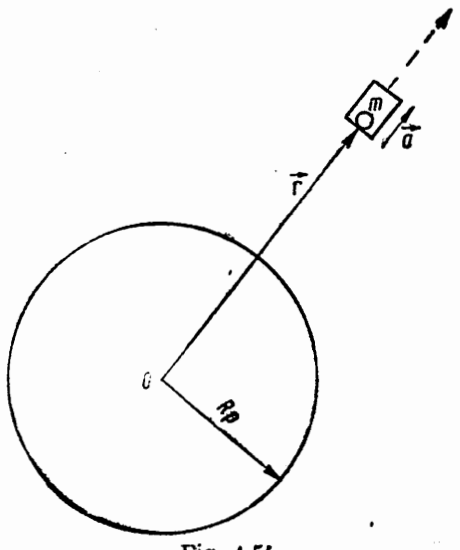


Fig. 1.54.

1.1.73. Două discuri identice se rotesc în jurul axei verticale OO' cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 (fig. 1.56). Discul A cade încet pe discul B. Viteza, pe verticală, a discului A cînd ajunge pe discul B se consideră zero. Diferența înălțimii Δh între discuri se neglijează. Din momentul atingerii, discurile A și B se rotesc împreună datorită coeficientului mare de frecare între suprafețele lor. Se cere:

a) să se calculeze viteza unghiulară ω cu care discurile se rotesc împreună și variația energiei cinetice a discurilor;

b) să se facă analogia cu ciocnirea neelastică a două corpuri de mase egale.

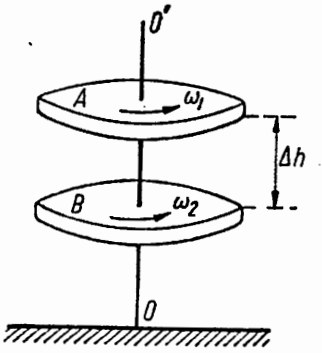


Fig. 1.56.

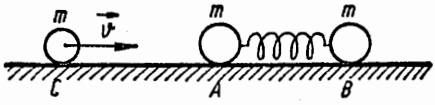


Fig. 1.57.

1.1.74. Două sfere de mase egale cu m se află pe o suprafață orizontală, pe care se pot deplasa fără frecare. Sferele sînt legate printr-un arc aflat în stare netensionată (fig. 1.57). O a treia sferă de aceeași masă, m, cu energia cinetică E_{c_1}, ciocnindu-se elastic de sfera A, se întoarce în sens opus vitezei inițiale $\vec{v}$. După ciocnire, sfera C are energia cinetică E_{c_2}.

Să se calculeze energia de oscilație a sferelor A și B, după ciocnirea cu sfera C.

Masa arcului se neglijează.

1.1.75. O particulă A cu masa m_1 și impulsul $\vec{H}_1$ ciocnește elastic particula B cu masa m_2, aflată în repaus. După ciocnire, particula A are impulsul $\vec{H}'_1$ ce face unghiul α cu $\vec{H}_1$.

Să se calculeze valoarea impulsului $\vec{H}'_1$ al particulei A, după ciocnire. Să se discute rezultatul obținut în funcție de raportul m_2/m_1.

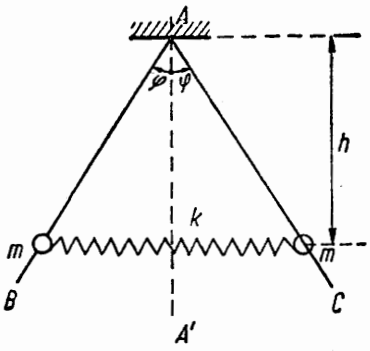


Fig. 1.59.

1.1.76. Barele AB și AC (fig. 1.59) fac unghiul φ cu axa verticală AA'. Barele și axa sînt cuprinse în același plan vertical. Fiecare bară trece printr-o sferă cu masa m, iar sferele sînt legate printr-un arc cu constanta elastică k. Lungimea arcului netensionat este x_0. Inițial, sferele se află la aceeași înălțime. Sistemul astfel format se rotește în jurul axei AA' cu viteza unghiulară ω. Se neglijează frecările între bare și sfere și masa barelor.

Să se calculeze înălțimea h la care sferele se află în echilibru. Mărimile k, x_0, φ, ω și m se consideră cunoscute.

1.1.77. Pe un cărucior cu masa m_1 (figura 1.61) se află un paralelipiped cu latura bazei l și înălțimea h ($h > l$). Masa paralelipipedului este m. Căruciorul este legat printr-un cablu inextensibil, ce trece peste un scripete fix, de corpul cu masa M. Pentru a împiedica alunecarea paralelipipedului, pe cărucior este prevăzută o piedică P.

Se cere:

a) să se calculeze masa M pentru ca sistemul să se deplaseze cu o accelerație a, încît paralelipipedul să se răstoarne;

b) să se arate că dacă în locul paralelipipedului avem un cub cu muchia l, acesta nu se răstoarnă pentru nici o valoare a masei M.

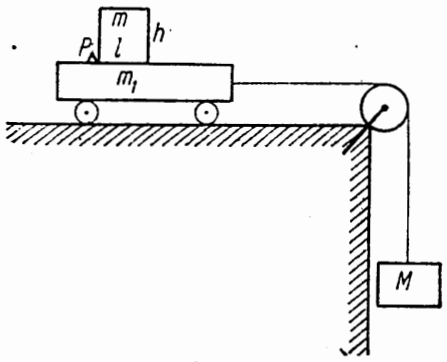


Fig. 1.61.

1.1.78. Un corp este lansat cu viteza v_0, în sus, pe un plan înclinat ce face unghiul α cu orizontala. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este μ. Corpul ajunge din nou la baza planului înclinat, în coborîre, după timpul t de la lansare. Să se calculeze viteza v_0 în funcție de t, μ și α.

1.1.79. Un corp de masă m se află pe suprafața unui plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Asupra corpului acționează forța $\vec{F}$ orientată în sus, paralel cu planul înclinat. Dacă valoarea forței F este $F_1 = 3\,675$ N, corpul urcă uniform pe plan, iar dacă $F_2 = 1\,225$ N, corpul coboară uniform pe planul înclinat. Să se calculeze masa m a corpului și coeficientul de frecare μ între corp și planul înclinat.

1.1.80. Un corp este lansat de la baza unui plan înclinat cu viteza v_0 orientată, în sus, paralelă cu planul înclinat. Corpul urcă în timpul t_u, după care se oprește și alunecă în jos pe planul înclinat ajungînd în timpul t_c, în coborîre, din nou în punctul de lansare. Timpul t_c este de k ori mai mare decît timpul t_u.

Planul este înclinat cu unghiul α față de orizontală. Să se calculeze coeficientul de frecare între corp și planul înclinat în funcție de k și α.

În ce condiții putem avea $k = 1$?

1.1.81. Pe un plan înclinat cu lungimea $AB = l = 50$ m și înălțimea $OA = h = 25$ m (figura 1.62) se ridică cu ajutorul unui cablu inextensibil și de greutate neglijabilă, un corp cu masa $M = 500$ kg. În momentul cînd corpul se află în repaus în poziția B, se rupe cablul și corpul coboară uniform accelerat pînă în punctul A, de unde continuă să se deplaseze uniform încetinit pe distanța $AC = s$. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este $\mu_1 = 1/2\sqrt{3}$, iar între corp și

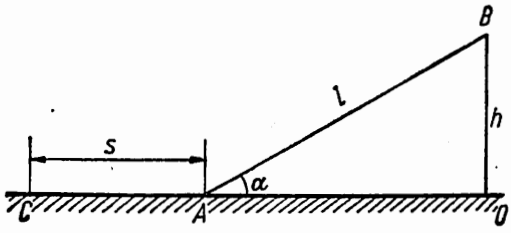


Fig. 1.62.

planul orizontal este μ_2=0,2. Accelerația gravitațională este $g \simeq 10$ ms^{-2}. Să se calculeze:

a) forța de tracțiune și lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea corpului pe distanța AB, într-o mișcare uniformă;

b) distanța s parcursă de corp pe planul orizontal;

c) randamentul planului înclinat.

1.1.82. De la baza unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală se comunică viteza $v_0 = 10$ ms^{-1} orientată în sus, de-a lungul planului, unui corp cu masa $m = 0{,}5$ kg. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Să se calculeze:

a) viteza corpului cînd va reveni, în cădere, la baza planului înclinat;

b) lucrul mecanic efectuat de corp pentru învingerea forțelor de frecare, arătîndu-se că acest lucru mecanic este egal cu variația energiei cinetice a corpului.

1.1.83. Două corpuri, de mase $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg, sînt legate între ele printr-un fir inextensibil, de masă neglijabilă, care este trecut peste un scripete fix aflat în vîrful unui dublu plan înclinat (figura 1.63). Fețele dublului plan înclinat fac cu orizontala unghiurile $\alpha = 45°$ și $\beta = 30°$, iar coeficientul de frecare de alunecare a corpurilor pe ambele fețe este $\mu = 0{,}1$. Se

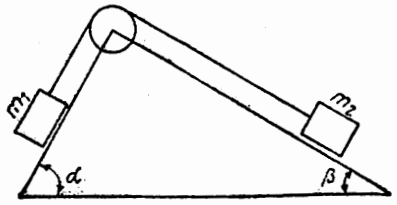


Fig. 1.63.

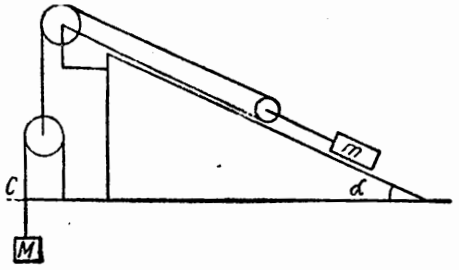


Fig. 1.64.

neglijează frecarea la axul de rotație a scripetelui, precum și masa scripetelui. Să se calculeze:

a) accelerația sistemului format din cele două corpuri;

b) tensiunea în firul de legătură;

c) timpul în care cele două corpuri ajung la baza planului înclinat, respectiv, dacă firul se rupe la momentul $t = 0$, cînd ambele corpuri se află în repaus la înălțimea $h = 5$ m față de orizontala ce constituie baza dublului plan înclinat.

1.1.84. Un bloc de piatră de masă $m = 200$ kg este ridicat la înălțimea $h = 8$ m, folosind un plan înclinat și un sistem de scripeți (fig. 1.64). Planul înclinat face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala, iar coeficientul de frecare de alunecare a blocului de piatră pe planul înclinat este $\mu_1 = 0{,}4$. Să se calculeze:

a) forța cu care trebuie acționat pe verticală în jos la capătul C pentru ca ridicarea blocului de piatră pe planul înclinat să aibă loc într-o mișcare uniformă;

b) masa M care ar echilibra sistemul cînd $\mu = \mu_1$ și cînd $\mu = 0$;

c) timpul după care blocul de piatră se oprește pe planul orizontal, dacă cablul se rupe la momentul $t = 0$ cînd blocul se afla în repaus la înălțimea h pe planul înclinat. Coeficientul de frecare pe porțiunea orizontală este $\mu_3 = 0{,}7$.

1.1.85. Un corp A de masă $m_1 = 0{,}8$ kg se află pe un plan înclinat (figura 1.65) pe care poate aluneca cu frecare ($\mu_1 = 0{,}2$). Corpul A este fixat la unul din capetele unui fir trecut peste un scripete fix, iar la celălalt este atîrnat un corp B de masă $m_2 = 0{,}4$ kg. Frecările între fir și scripete se neglijează. Să se calculeze:

a) unghiul α_1 pentru care corpurile A și B sînt în repaus, dacă $\mu = 0$;

b) unghiul α_2 pentru care corpul A coboară uniform pe planul înclinat ($\mu = \mu_1 = 0{,}2$);

c) unghiul α_3 pentru care corpul A urcă pe planul înclinat cu accelerația $a = 0{,}98$ ms^{-2} ($\mu = \mu_1$).

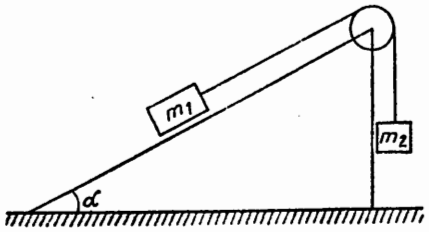


Fig. 1.65.

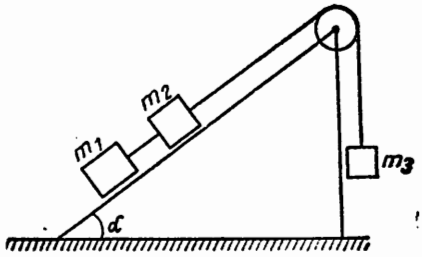


Fig. 1.66.

***1.1.86.** Pe un plan înclinat, cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală, se deplasează două corpuri legate printr-un fir inextensibil de un al treilea corp ce se deplasează pe verticală (figura 1.66). Coeficientul de frecare a celor două corpuri pe planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Masele corpurilor sînt: $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 4$ kg și $m_3 = 5$ kg. Să se calculeze:

a) accelerația sistemului format din cele trei corpuri;

b) tensiunile T_{12} și T_{23} din cablurile ce leagă corpurile cu masele m_1 și m_2 și respectiv, corpurile cu masele m_2 și m_3.

1.1.87. Un corp este lansat, în sus, paralel cu suprafața unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Corpul parcurge pînă la oprire distanța $l = 32$ m în timpul $t_1 = 3$ secunde. După oprire, corpul alunecă în jos pînă în punctul de lansare, în timpul t_2. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este μ. Să se calculeze:

a) coeficientul de frecare μ;

b) intervalul de timp t_2.

1.1.88. O scîndură de greutate G este fixată pe un perete vertical, prin apăsare, cu o forță $\vec{F}$ care face unghiul α cu orizontala. Coeficientul de frecare între scîndură și perete este μ.

Să se stabilească între ce limite poate varia valoarea forței $\vec{F}$ pentru ca scîndura să rămînă în echilibru pe perete.

1.1.89. Un automobil cu masa $m = 2\,000$ kg plecînd din repaus atinge în timpul $t = 10$ s, o viteză $v_1 = 15$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) puterea medie dezvoltată de motorul automobilului, dacă coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}05$;

b) puterea maximă a motorului, dacă viteza maximă pe care o poate dezvolta automobilul pe aceeași șosea orizontală este $v_{max} = 40$ ms^{-1};

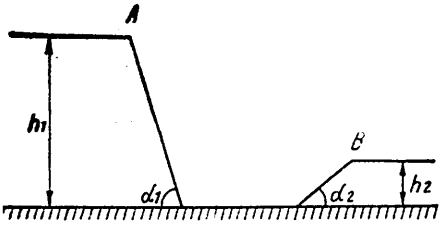


Fig. 1.68.

c) variația accelerației automobilului în funcție de viteză, considerînd puterea constantă ($P = P_{max}$).

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.1.90. Se consideră un plan înclinat cu unghiul $\alpha_1 = 45°$ față de orizontală și înălțimea $h_1 = 1$ m, continuat cu o porțiune orizontală de lungime $l_2 = 1{,}2$ m și apoi cu un alt plan înclinat cu unghiul α_2 față de orizontală și de înălțime $h_2 = 0{,}6$ m (figura 1.68). Pe acest relief, alunecă din punctul A, cu frecare, un corp cu masa $m = 3$ kg. Coeficientul de frecare pe întregul traseu este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:

a) unghiul α_2, dacă mobilul plecînd din repaus din punctul A se oprește în punctul B;

b) lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de frecare pe distanța dintre punctele A și B;

c) înălțimea h_2 pînă la care se ridică corpul pe al doilea plan înclinat, dacă corpul pleacă din repaus din A, iar $\alpha_2 = 30°$.

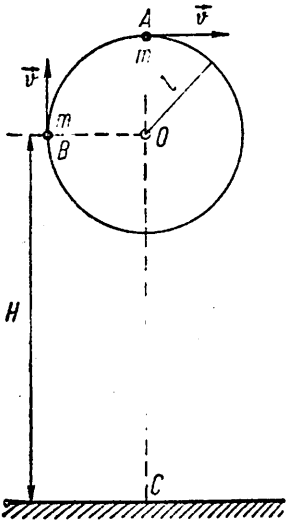


Fig. 1.69.

1.1.91. Un corp cu masa m, de dimensiuni neglijabile, este legat de un punct O situat la înălțimea $H = 18{,}6$ m deasupra Pămîntului, printr-un fir inextensibil de lungime $l = 1$ m (figura 1.69). Corpul se rotește în plan vertical în jurul punctului O, într-o mișcare uniformă cu turația $n = 300$ ture/minut. Să se calculeze:

a) timpul după care corpul atinge solul, dacă firul se rupe la momentul $t = 0$ în care corpul se află în punctul A și distanța de punctul C la care corpul atinge solul;

b) înălțimea h de la sol la care se ridică corpul, dacă firul se rupe cînd corpul trece prin punctul B;

c) raportul vitezelor v_1 și v_2 cu care corpul ajunge la sol în cazul a) și respectiv, în cazul b).

1.1.92. Corpurile de mase m_1 și m_2 ($m_2 > m_1$) sînt legate printr-un fir ce trece peste un scripete fix. Scripetele se consideră disc de rază R și masă m. Se consideră că firul este inextensibil și nu alunecă pe scripete.

Să se calculeze diferența tensiunilor din firele aflate de cele două părți ale scripetelui. Momentul de inerție al unui disc este $I = mR^2/2$.

1.1.93. Un cilindru cu diametrul D și înălțimea H se află pe o scîndură de lungime $AB = l$, ce poate fi ridicată pe verticală de capătul A fără ca celălalt capăt B să se deplaseze (figura 1.71). Să se calculeze:

a) înălțimea h pînă la care poate fi ridicat capătul A al scîndurii astfel ca cilindrul să nu se răstoarne;

b) raportul dintre H și D ca cilindrul să se răstoarne cînd scîndura face unghiul $\alpha \geq 30°$ cu orizontala;

c) înălțimea h' minimă ca cilindrul să alunece pe scîndură. Coeficientul de frecare dintre scîndură și cilindru este μ. Mărimile H, D, l și μ se consideră cunoscute.

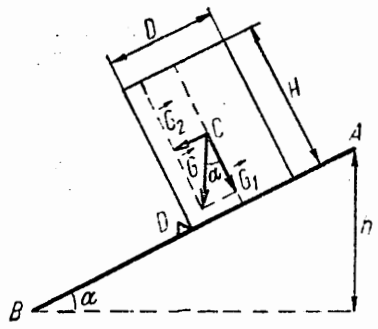


Fig. 1.71.

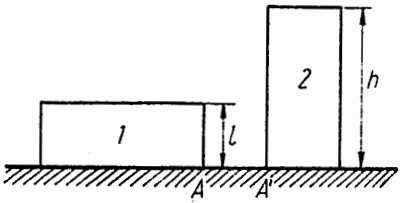


Fig. 1.73.

1.1.94. Conform legii a treia a lui Newton, dacă un corp A acționează asupra corpului B cu forța $\vec{F}_{AB}$, corpul B acționează asupra corpului A cu forța $\vec{F}_{BA}$ egală cu $\vec{F}_{AB}$ și de sens opus (fig. 1.5). Am putea deci considera că dacă un cal acționează asupra unei căruțe cu forța $\vec{F}$, căruța ar acționa asupra calului cu forța $-\vec{F}$. Cum se explică faptul că poate calul trage căruța și că sistemul căruță + cal se deplasează accelerat în sensul mișcării calului? Nu se aplică oare, în acest caz, legea a treia a lui Newton?

1.1.95. O cărămidă cu masa $m = 3$ kg are lățimea $l = 10$ cm și înălțimea $h = \sqrt{8}\, l$. Cărămida se poate afla pe un plan orizontal în pozițiile *1* sau *2* (figura 1.73). Să se calculeze lucrul mecanic L_1 pentru a trece cărămida din poziția *1* în poziția *2*, prin rotire în jurul punctului A și lucrul mecanic L_2, necesar pentru ca din poziția *2*, cărămida să treacă în poziția *1*, prin rotire în jurul punctului A'.

Să se explice care din cele două poziții ale cărămidei este mai stabilă.

1.1.96. Într-un disc omogen de rază R se practică o gaură sub forma unui cerc de rază $r \leqslant R/2$ (fig. 1.75). Centrul O' al găurii se află la distanța $OO' = R/2$ de centrul discului.

Să se calculeze distanța x de la centrul O al discului la centrul de greutate C al figurii, în funcție de razele r și R.

1.1.97. Un vas sub forma unei prisme are înălțimea h. Laturile bazei prismei formează un triunghi dreptunghic (fig. 1.77). Vasul este fixat de un ax

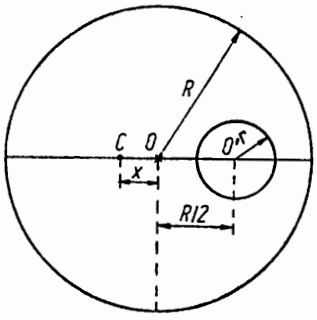


Fig. 1.75.

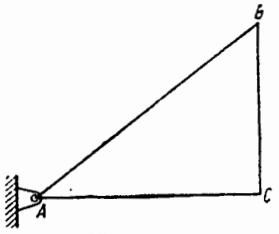


Fig. 1.77.

vertical, în jurul căruia se poate roti fără frecare. Se neglijează de asemenea frecarea dintre baza vasului și suprafața orizontală pe care se sprijină.

Este clar că dacă vasul conține gaz la o presiune p oarecare, el se va afla în echilibru pe suprafața orizontală. Se cere să se arate că din această condiție rezultă teorema lui Pitagora.

1.1.98. Un camion cu masa $M = 6\,000$ kg se deplasează cu viteza constantă v_0 pe o șosea rectilinie. La intrarea pe un pod orizontal cu lungimea $l = 120$ m, camionul este frînat astfel încît acesta se deplasează pînă la oprire pe pod, în timpul $t = 8$ secunde. Coeficientul de frecare pe pod este $\mu = 0{,}25$. Să se calculeze:

a) viteza camionului la intrarea pe pod;

b) forțele de apăsare a camionului, pe cele două capete ale podului, după oprire.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.1.99. Un corp cu masa m este suspendat în punctul O cu ajutorul barei orizontale OA și a ancorei OB (figura 1.80).

Masa barelor se neglijează.

Să se calculeze tensiunile în barele OA și OB în funcție de masa m și sin α.

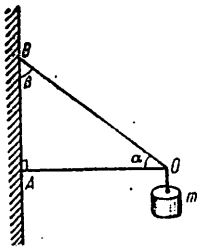


Fig. 1.80.

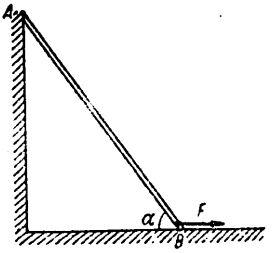


Fig. 1.82.

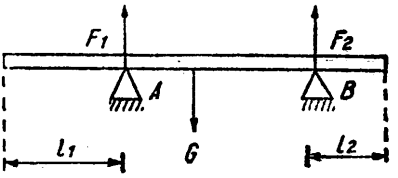


Fig. 1.84.

1.1.100. O bară omogenă este rezemată de un perete vertical, ca în figura 1.82. Capătul A al barei se poate deplasa pe peretele vertical fără frecare, iar pe suprafața orizontală, capătul B se deplasează cu frecare. Pentru deplasarea capătului B al barei, se aplică forța F pe orizontală. Masa barei este m.

Se cere să se arate că forța F necesară pentru deplasarea barei este mai mică decît forța de frecare a capătului B al barei pe suprafața orizontală.

1.1.101. O bară omogenă de lungime l se sprijină în punctele A și B (figura 1.84). Distanțele de la punctele A și B pînă la capetele barei sînt l_1 și respectiv, l_2. Greutatea barei este G.

Să se calculeze reacțiunile F_1 și F_2 în punctele de sprijin.

1.1.102. În vîrfurile unui patrulater de formă arbitrară se află cîte un punct material de masă m. Să se stabilească centrul de greutate al sistemului format din cele patru puncte materiale.

Prin raționamentul de stabilire a centrului de greutate, să se demonstreze cunoscuta teoremă din geometrie: *segmentele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater se intersectează într-un punct aflat la mijlocul fiecăruia din segmentele respective.*

1.1.103. Vasul indicat în figura 1.86 este umplut cu apă și menținut cu o prismă în punctul O astfel încît vasul se află în echilibru. Se introduce în partea A a vasului o bilă de aluminiu cu masa m_1, iar în partea B a vasului se introduce o bilă de plumb cu masa m_2. Densitatea aluminiului este $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ kgm^{-3}, densitatea plumbului este $\rho_2 = 11{,}3 \cdot 10^3$ kgm^{-3}, iar densitatea apei este $\rho_0 = 10^3$ kgm^{-3}. Se cere să se calculeze raportul m_1/m_2 astfel încît după introducerea bilelor, sistemul să rămînă în echilibru.

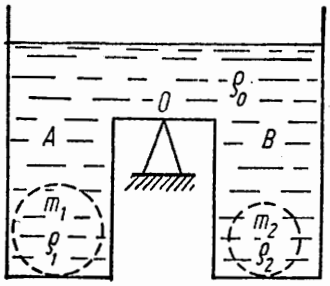


Fig. 1.86.

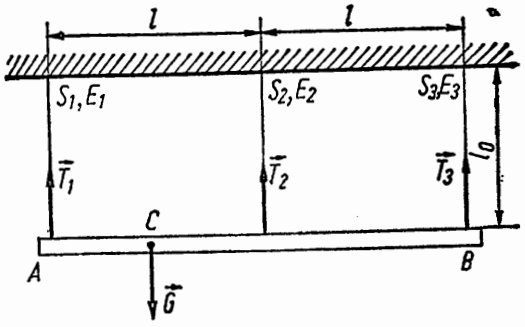


Fig. 1.87.

1.1.104. O bară de lungime $2\,l$ și greutate G este prinsă cu ajutorul a trei cabluri diferite, așa cum se indică în figura 1.87. Cablurile au secțiunile S_i și modulul de elasticitate E_i, unde $i = 1,2,3$, iar lungimea lor inițială este aceeași, egală cu l_0. Centrul de greutate al barei se află în punctul C, la distanța $l/2$ de punctul A.

Se cere să se calculeze tensiunile T_1, T_2 și T_3 din cele trei cabluri. Să se arate că dacă nu se ține seama de deformarea cablurilor, problema nu poate fi univoc rezolvată.

1.1.105. Pe talerul unei balanțe se află un vas cu apă echilibrat de un corp cu greutatea G așezat pe celălalt taler al balanței. Masa vasului este m_1, iar înălțimea apei din vas este h.

După echilibrarea balanței, se introduce în vas un corp de volum V prins de un stativ, astfel încît corpul nu atinge fundul vasului, dar se află cufundat complet în apă (fig. 1.89).

Se cere să se stabilească dacă prin aceasta se dereglează sau nu echilibrul balanței.

1.1.106. La distanța h de la nivelul lichidului dintr-un vas cu aria bazei S_1 se practică în peretele acestuia o gaură (fig. 1.90) cu aria $S_2 \ll S_1$.

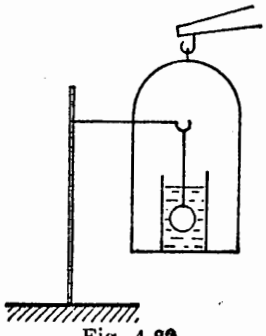


Fig. 1.89.

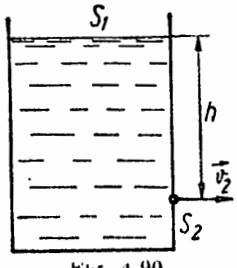


Fig. 1.90.

Să se calculeze viteza v_2 cu care lichidul curge prin gaură, în funcție de înălțimea h.

1.1.107. În figura 1.91 se indică schema de principiu a unei instalații ce poate fi utilizată pentru măsurarea debitului unui lichid care curge pe tubul orizontal cu secțiunile S_1 și respectiv, S_2. Diferența de nivel în cele două tuburi manometrice este h.

Se cere să se calculeze debitul de lichid ce trece prin tubul orizontal, în funcție de mărimea h.

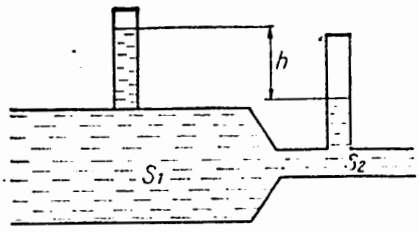


Fig. 1.91.

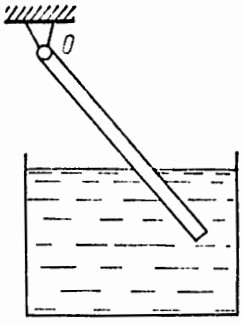


Fig. 1.92.

1.1.108. O bară cilindrică omogenă de lungime l se poate roti fără frecare în jurul punctului O (fig. 1.92). Porțiunea l/n din lungimea barei se află cufundată într-un lichid de densitate ρ_l cunoscută. Astfel cufundată, în lichid, bara se află în echilibru.

Să se calculeze densitatea ρ a materialului din care este confecționată bara, în funcție de numărul n și de densitatea ρ_l.

1.1.109. Să se calculeze timpul Δt necesar pentru umplerea, la robinet, a unei găleți cu volumul $V = 10$ l. Nivelul apei în bazin este $h_1 = 50$ m, iar înălțimea robinetului este $h_2 = 14$ m (fig. 1.94). Deschiderea la ieșirea apei din robinet are suprafața $S = 1$ cm^2.

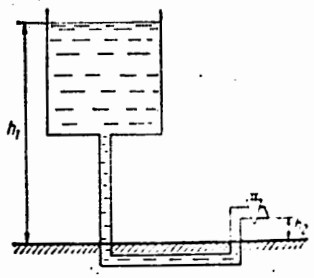


Fig. 1.94.

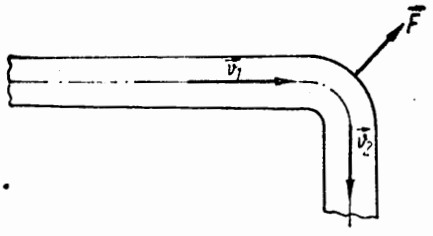


Fig. 1.95.

1.1.110. Un lichid de densitate ρ curge printr-o țeavă cotită, de secțiune S (fig. 1.95). Să se calculeze forța $\vec{F}$ care acționează asupra peretelui la cotul țevii, în funcție de debitul masic Q_m, de densitatea ρ și de secțiunea S. Cele două părți ale țevii fac un unghi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.1.111. Pe tubul orizontal AB (fig. 1.97) curge un lichid de densitate ρ. Diferența de nivel a lichidului din cele două tuburi verticale (de același diametru) C și D este $\Delta h = 20$ cm.

Să se calculeze viteza de curgere a lichidului prin tubul AB. Accelerația gravitațională se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

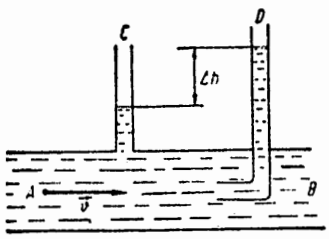


Fig. 1.97.

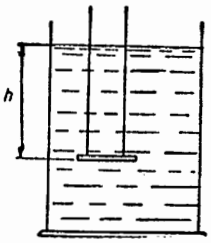


Fig. 1.98.

1.1.112. Un tub de sticlă este închis la un capăt cu o placă și introdus vertical în apă pînă la adîncimea $h = 1{,}02$ m (fig. 1.98). Să se calculeze înălțimea maximă h' a mercurului din tub pentru ca placa să nu se desprindă de tubul de sticlă.

1.1.113. Secțiunea unui acvariu este indicată în figura 1.99. Peretele lateral face unghiul $\alpha = 45°$ cu verticala, iar înălțimea apei din acvariu este $h = 2$ m.

Să se calculeze forța ce apasă pe peretele lateral de lungime $l = 2{,}82$ m. Presiunea atmosferică se consideră $p_0 = 10^5$ Nm^{-2}, iar accelerația gravitațională $g \simeq 10$ ms^{-2}.

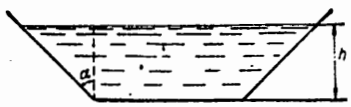


Fig. 1.99.

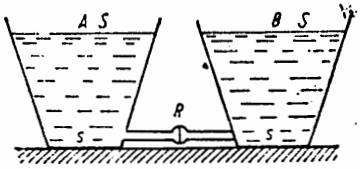


Fig. 1.100.

1.1.114. În două vase comunicante, identice (figura 1.100) se află apă la același nivel. Robinetul R este închis și apa din vasul A se încălzește. Ca urmare, nivelul apei în acest vas crește. După încălzirea vasului A, se deschide robinetul R.

Se cere să se stabilească dacă după deschiderea robinetului R, apa va curge din vasul A în vasul B sau din vasul B în vasul A.

1.1.115. Diametrul unuia din cele două vase comunicante este de două ori mai mare decît diametrul celuilalt vas. În aceste vase comunicante se toarnă mercur, iar apoi în vasul cu diametrul mai mic se toarnă apă formînd o coloană cu înălțimea h.

Se cere să se calculeze cu cît se schimbă nivelul mercurului în cele două vase comunicante.

1.1.116. Un punct material cu masa $m = 10$ g oscilează după legea $x = 5 \sin \frac{\pi}{6} t$ (cm). Să se stabilească:

a) timpul t_1 după care este atinsă viteza maximă și timpul t_2 după care este atinsă accelerația maximă;

b) forța elastică maximă care acționează asupra punctului material;
c) expresiile pentru energia cinetică, energia potențială și energia totală.

1.1.117. Un corp de masă $m = 2$ g, pornind din repaus, efectuează o mișcare oscilatorie armonică. Se cere:
a) să se scrie ecuația de mișcare a corpului, știind că pentru a îndepărta corpul din poziția de echilibru pînă într-un punct situat la distanța maximă de această poziție se cheltuiește lucrul mecanic $L = 23 \cdot 10^{-3}$ J, iar forța elastică maximă ce acționează asupra corpului este $F_{max} = 1{,}15$ N;
b) perioada mișcării;
c) energia cinetică și energia potențială cînd corpul trece prin punctul B aflat la distanța $y = 2$ cm de poziția de echilibru.

1.1.118. Un punct material de masă $m = 5$ g efectuează o mișcare oscilatorie armonică cu frecvența $\nu = 0{,}5$ Hz și amplitudinea $A = 3$ cm. Să se calculeze:
a) viteza v în momentul cînd elongația $y = 1{,}5$ cm;
b) forța elastică maximă F_{max} ce acționează asupra punctului material;
c) energia totală.

1.1.119. Se compun mișcările oscilatorii armonice paralele:

$$x_1 = 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ și } x_2 = 3 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm.}$$

Să se scrie ecuația mișcării oscilatorii rezultante.

1.1.120. Un punct material efectuează concomitent două mișcări oscilatorii armonice pe direcții perpendiculare între ele. Ecuațiile celor două mișcări oscilatorii sînt:

$$x = \cos \pi t \text{ și } y = 2 \cos \frac{\pi}{2} t \text{ cm.}$$

Să se stabilească traiectoria punctului material în planul xoy, construindu-se graficul traiectoriei respective.

1.1.121. Două surse de oscilații, aflate la distanța d între ele, oscilează după legea $y = A \sin \omega t$. Să se stabilească ecuația oscilației în punctul B aflat pe dreapta ce unește cele două surse (fig. 1.104).

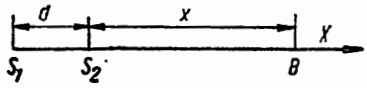


Fig. 1.104.

1.1.122. Un punct material efectuează concomitent oscilații armonice pe două direcții perpendiculare. Ecuațiile mișcării oscilatorii pe cele două axe perpendiculare sînt:
a) $x = \sin \pi t$ cm și $y = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm;
b) $x = 2 \sin \pi t$ cm și $y = 4 \sin(\pi t + \pi)$ cm.
Să se stabilească ecuațiile pentru traiectoriile punctului material în cele două cazuri și să se deseneze aceste traiectorii păstrîndu-se scara lungimilor pe ambele axe.

1.1.123. O undă transversală se propagă în lungul unui cablu elastic cu viteza $v = 15$ m/s. Perioada vibrațiilor punctelor cablului este $T = 1{,}2$ s, iar amplitudinea $A = 2$ cm. Să se calculeze:
a) lungimea de undă λ;

b) faza φ, elongația y, viteza u și accelerația a pentru un punct al cablului aflat la distanța $x = 45$ m de sursa de unde, la momentul $t = 4$ s;

c) diferența de fază $\Delta\varphi$ a două puncte de pe cablu aflat la distanțele $x_1 = 20$ m și respectiv, $x_2 = 24{,}5$ m de sursa de unde.

1.1.124. Vibrații longitudinale de frecvență $\nu = 500$ Hz se propagă într-un mediu elastic cu modulul de elasticitate $E = 4{,}32 \cdot 10^{10}$ N/m^2 și densitatea $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}. Să se calculeze:

a) viteza de propagare a vibrațiilor în mediul respectiv;

b) lungimea de undă λ;

c) distanța între două puncte ale mediului elastic între care diferența de fază este $\Delta\varphi = \pi$.

1.1.125. Capătul O al unei bare elastice de lungime l este conectat la o sursă de vibrații elastice date de legea $x = A \sin \omega t$, iar capătul B este fixat într-un perete (fig. 1.107). Să se stabilească dependența amplitudinii undei rezultante de distanța x dacă:

a) unda reflectată este în fază cu unda incidentă;

b) unda reflectată este defazată cu faza $\Delta\varphi = \pi$ față de unda incidentă.

Să se indice pozițiile nodurilor și ventrelor în cazurile a) și b).

Lungimea de undă λ se consideră cunoscută.

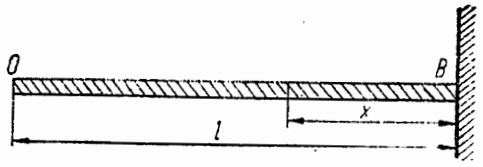


Fig. 1.107.

1.2. PROBLEME CU INDICAȚII ȘI REZULTATE

1.2.1. Observatorul O aflat la înălțimea $h_1 = 60$ m (fig. 1.108) vede urcînd prin fața sa un corp care a fost aruncat de la sol pe verticală în sus, iar după timpul $t_1 = 8$ s vede corpul coborînd. Observatorul O' aflat la înălțimea h_2 ($h_2 > h_1$) vede același corp în urcare și respectiv, în coborîre după timpul $t_2 = 6$ s. Se cere să se calculeze:

a) diferența de nivel $h_2 - h_1$;

b) înălțimea maximă h_{max} pînă la care s-a ridicat corpul de la sol;

c) viteza v_0 cu care a fost lansat corpul de la sol;

d) timpul t în care corpul a urcat înălțimea h_1.

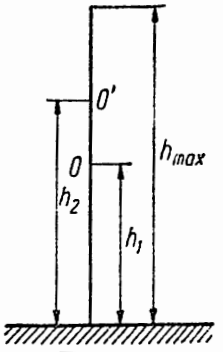


Fig. 1.108.

1.2.2. Un corp care are viteza v_0, la momentul $t = 0$, începe să se deplaseze uniform încetinit pe o traiectorie rectilinie. Se știe că după ce corpul parcurge distanța $l_1 = 18$ m, viteza lui este $v_1 = 8$ ms^{-1}, iar după parcurgerea distanței $l_2 = 32$ m, viteza lui devine $v_2 = 6$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze:

a) viteza inițială v_0 și accelerația a;

b) spațiul l_{max} parcurs de corp pînă la oprire;

c) spațiul parcurs de corp în ultima secundă.

1.2.3. Mobilul A pleacă din punctul O cu viteza $v_A = 2$ ms^{-1}, iar mobilul B pleacă, concomitent cu mobilul A, din punctul O' cu viteza $v_B =$

$= 5$ ms^{-1}. Din punctul O'', după trei secunde de la pornirea mobilelor A și B pleacă mobilul C cu viteza $v_C = 10$ ms^{-1}. Distanțele OO' și OO'' sînt respectiv, de 30 m și 2 m. Sensul vitezelor $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ și $\vec{v}_C$ se indică în figura 1.109, cele trei mobile deplasîndu-se rectiliniu și uniform. Se cere:

a) să se scrie ecuațiile de mișcare ale mobilelor A, B și C, luînd ca origine a spațiului și timpului, punctul și momentul plecării mobilului A;

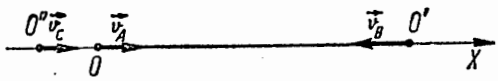


Fig. 1.109.

b) să se determine pozițiile punctelor de întîlnire și momentele respective;

c) variația distanței dintre mobilele B și C de la pornirea mobilului B pînă la întîlnirea lui cu mobilul C.

1.2.4. Un punct material de masă $m = 1{,}2$ kg se deplasează rectiliniu sub acțiunea unei forțe F, după legea

$$s = 10\ t^2 - 5\ t^3 + 5\ t^4.$$

Se cere să se stabilească:

a) dacă forța care pune în mișcare acest punct material are un maximum sau un minimum;

b) valoarea forței F în momentul de maximum sau minimum (distanța s se măsoară în metri, iar timpul t în secunde).

1.2.5. Un tren trece cu viteza $v = 20$ ms^{-1}, paralel cu un zid lung care se află la o distanță necunoscută x de calea ferată. Un călător din tren descărcînd o armă, aude ecoul după intervalul de timp $\Delta t = 3$ s. Viteza sunetului în aer este $v_s = 340$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze distanța x dintre zid și calea ferată.

1.2.6. Punctele A și B se află la distanța $d = 240$ m unul de altul, pe o șosea în pantă. Din punctul A pleacă, într-o mișcare uniform accelerată, spre punctul B, un motociclist cu viteza inițială $v_{01} = 8$ ms^{-1}. Concomitent, din punctul B urcă spre punctul A, într-o mișcare uniform încetinită, un biciclist. Viteza inițială a bicicletului în punctul B este $v_{02} = 18$ ms^{-1}. Motociclistul întîlnește bicicletul după timpul $t_1 = 10$ s, la distanța $d_1 = 130$ m de punctul A. Să se calculeze:

a) accelerația a_1 a motociclistului și accelerația a_2 a bicicletului;

b) vitezele motociclistului și bicicletului în punctul de întîlnire;

c) distanța față de punctul A la care se oprește bicicletul.

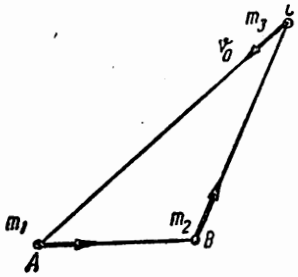


Fig. 1.112.

1.2.7. Mobilele m_1, m_2 și m_3 se află în vîrfurile A, B și C ale unui triunghi oarecare (fig. 1.112) cu laturile $AB = d_1 = 25$ m, $BC = d_2 = 40$ m și $CA = d_3 = 56$ m. Cele trei mobile încep să se deplaseze, concomitent, în sens invers acelor de ceasornic. Mobilele m_1 și m_2 au accelerațiile constante $a_1 = 3$ ms^{-2} și respectiv, $a_2 = 1{,}2$ ms^{-2}, iar mobilul m_3 are viteza constantă $v_0 = 2$ ms^{-1}. Se cere să se determine:

a) intervalele de timp t_1, t_2 și t_3 în care mobilele străbat laturile AB, BC și CA ale triunghiului;

b) intervalele de timp t_1' și t_2' după care mobilele m_1 și m_2 au aceeași viteză ca și mobilul m_3;

c) după cît timp de la începutul mișcării, fiecare mobil s-a întîlnit cel puțin odată cu celelalte două, dacă fiecare mobil își continuă mișcarea de-a lungul laturilor triunghiului (fără să-și schimbe caracterul mișcării)?

d) poziția vîrfurilor triunghiului $m_1m_2m_3$, dacă după $\Delta t = 2$ s de la începutul mișcării, mobilele s-au oprit brusc, precum și distanțele m_1m_2, m_2m_3 și respectiv, m_3m_1.

1.2.8. Un corp avînd viteza inițială $v_0 = 5$ ms^{-1} parcurge în a cincea secundă distanța $d = 4{,}5$ m. Se cere să se calculeze:

a) accelerația corpului;

b) timpul după care corpul se oprește și distanța maximă parcursă de corp.

1.2.9. Un punct material parcurge segmentul AB cu o mișcare uniform variată. Cînd punctul material trece prin punctul O_1, viteza lui este $v_1 = 15$ ms^{-1}, iar cînd trece prin punctul O_2, are viteza $v_2 = 10$ ms^{-1}. Distanța O_1O_2 (fig. 1.114) este $d = 10$ m. Se cere să se calculeze:

a) accelerația mișcării punctului material;

b) timpul în care punctul material parcurge distanța O_1O_2;

c) viteza medie a punctului material pe distanța O_1O_2.

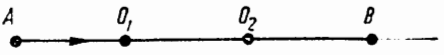


Fig. 1.114.

1.2.10. O minge cu masa $m = 0{,}1$ kg este lansată, fără rotație, pe verticală de la sol, cu viteza inițială $v_0 = 40$ ms^{-1}. Să se determine:

a) înălțimea maximă h_{max} la care ajunge mingea și timpul necesar pentru a ajunge la această înălțime, precum și energia potențială la înălțimea h_{max};

b) înălțimea maximă la care ajunge mingea după prima ciocnire cu solul, dacă sărind instantaneu, pierde jumătate din energia pe care o posedă în momentul atingerii solului;

c) înălțimile maxime succesive atinse de minge, dacă mișcarea continuă după fiecare ciocnire cu solul, ca în condițiile de la punctul *b*);

d) intervalul de timp după care mingea se va opri.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.11. De la unul din malurile unui rîu, de lățime $D = 1\,000$ m, pleacă concomitent două bărci identice, cu viteza $V = 10$ ms^{-1}. Una din bărci pleacă, inițial, perpendicular pe malul rîului, iar cealaltă paralel cu malul, în sensul de curgere a rîului. Amîndouă bărcile, după ce parcurg o distanță (dus-întors) egală cu $2D$, ajung din nou în punctul de plecare. Viteza de curgere a rîului este $v = 5$ ms^{-1}. Se cere să se determine:

a) unghiul α dintre direcția de mișcare a bărcii care traversează rîul și normala la malul rîului, pentru ca barca să se reîntoarcă în punctul de plecare;

b) intervalul de timp Δt dintre momentele la care cele două bărci ajung la punctul de plecare.

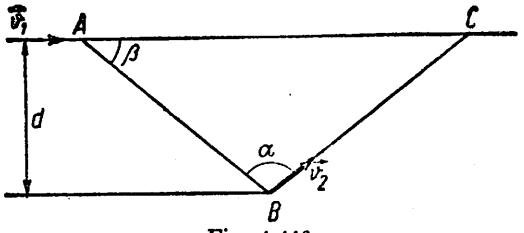


Fig. 1.116.

1.2.12. Un om se află în punctul B, la distanța $d = 50$ m de un drum rectiliniu, pe care se apropie un automobil cu viteza $v_1 = 10$ ms^{-1} (figura 1.116). Se cere:

a) direcția pe care trebuie să fugă omul (unghiul α), cu viteza v_2=3 ms^{-1}, pentru a întîlni automobilul. Omul începe să fugă în momentul în care distanța dintre el și automobil este $AB = b = 200$ m;

b) viteza minimă cu care poate fugi omul pentru ca, în condițiile de la punctul precedent, să întîlnească automobilul;

c) distanța parcursă de automobil pînă la întîlnire, în cazul cînd omul fuge cu viteza minimă;

d) timpul cît fuge omul, cu viteza minimă, pentru a întîlni automobilul.

1.2.13. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus, de la suprafața Pămîntului, cu vitezele v_1 și respectiv, v_2. Corpul al doilea se aruncă la intervalul t' secunde după primul corp. Se cere să se determine:

a) timpul t după care se vor întîlni cele două corpuri în aer, dacă se ia ca originea timpului momentul plecării ultimului corp de la sol;

b) limitele între care poate varia timpul t' pentru ca cele două corpuri să se mai poată întîlni în aer.

1.2.14. De la înălțimea $h = 20$ m cade liber pe verticală un corp, cu viteza inițială $v_0 = 15$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze:

a) viteza cu care corpul atinge solul, dacă $\vec{v}_0$ este orientată pe verticală în jos și respectiv, pe verticală în sus;

b) viteza cu care corpul atinge solul, dacă viteza inițială $\vec{v}_0$ este orientată pe orizontală. Se consideră $g = 10$ ms^{-2}.

1.2.15. Un corp cu masa $m_1 = 100$ g se aruncă de jos în sus pe verticală, cu viteza inițială $v_{01} = 40$ ms^{-1}. În același moment, de la înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp, cade liber un al doilea corp de masă $m_2 = 30$ g. Cele două corpuri se ciocnesc neelastic și își continuă mișcarea. Să se calculeze:

a) timpul τ după care se întîlnesc cele două corpuri;

b) înălțimea deasupra Pămîntului la care se întîlnesc corpurile;

c) valoarea și sensul vitezei $\vec{u}$ a corpului format în urma ciocnirii;

d) timpul socotit din momentul ciocnirii, după care cele două corpuri ating Pămîntul;

e) viteza cu care corpul format atinge Pămîntul.

Se ia $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.16. Un corp este aruncat pe verticală în sus, de la sol, cu viteza inițială v_0. Se neglijează frecarea corpului cu aerul. După atingerea înălțimii maxime, corpul se întoarce în punctul de unde a fost aruncat. Se cere să se demonstreze că:

a) viteza corpului la coborîre, în orice punct de pe traiectorie, este egală ca mărime și de sens contrar cu viteza la urcare în punctul respectiv;

b) din orice punct aflat la înălțimea $h' < h_{max}$, timpul de urcare până la înălțimea maximă h_{max} este egal cu timpul de coborîre de la înălțimea maximă până la înălțimea h'.

1.2.17. Dintr-un avion ce zboară la înălțimea $h = 405$ m cu viteza $v_a = 360$ km/h se lansează o bombă asupra unui tren ce se deplasează paralel cu direcția de zbor a avionului. Se cere să se calculeze:

a) timpul de cădere a bombei până la sol;

b) distanța parcursă de bombă pe orizontală?

c) intervalul de timp avut la dispoziție pentru lansarea bombei astfel încît aceasta să lovească trenul aflat în repaus și avînd lungimea $L = 100$ m;

d) intervalul de timp cerut la punctul c), dacă trenul se deplasează cu viteza $v = 108$ km/h, în sensul mișcării avionului și respectiv, în sens opus.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.18. Un proiectil este lansat sub unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Viteza proiectilului la ieșirea din țeava tunului este $v_0 = 800$ ms^{-1}. Lansarea are loc de la nivelul solului. Rezistența aerului se neglijează. Se cere să se calculeze:

a) timpul după care proiectilul cade la sol;

b) viteza proiectilului în punctul de înălțime maximă;

c) distanța pe orizontală între punctul de lansare și punctul de cădere a proiectilului;

d) înălțimea maximă atinsă de proiectil în mișcare;

e) raza de curbură a traiectoriei în punctul de înălțime maximă.

1.2.19. Două automobile pleacă simultan din punctul A și ajung în punctul B după un interval de timp $t_0 = 2$ ore. Primul automobil parcurge prima jumătate a distanței AB cu viteza $v_1 = 30$ km/h, iar a doua jumătate a acestei distanțe cu viteza $v_2 = 45$ km/h. Celălalt automobil parcurge distanța AB într-o mișcare uniform accelerată, pornind din repaus. Se cer să se calculeze:

a) viteza medie a primului automobil, precum și timpul t_1 în care acesta se deplasează cu viteza v_1 și respectiv, timpul t_2 în care se deplasează cu viteza v_2;

b) momentele t_1' și t_2' la care cele două automobile au aceeași viteză;

c) să se stabilească dacă pe parcursul distanței AB, unul din automobile va depăși pe celălalt.

1.2.20. Un biciclist ce se deplasează cu viteza $v_0 = 18$ km/h întîlnește în punctul A un pieton ce vine din sens opus. La 5 minute după întîlnirea cu pietonul, biciclistul se oprește în punctul B (fig. 1.118) unde rămîne pentru un timp de 70 minute, după care se întoarce înapoi cu viteza v_0. La

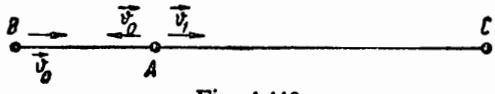


Fig. 1.118.

o jumătate de oră și 16 secunde de la pornirea din punctul B, biciclistul ajunge din urmă pietonul în punctul C. În întregul interval de timp, pietonul s-a deplasat uniform cu viteza v_1. Se cere:

a) viteza v_1 a pietonului;

b) să se reprezinte grafic distanța dintre biciclist și pieton în funcție de timpul t, din momentul întîlnirii în punctul A (originea timpului) pînă la momentul reîntîlnirii în punctul C.

1.2.21. Un autocamion care se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza $v_1 = 4{,}95\ \text{ms}^{-1}$ trece la momentul $t_1 = 0$ prin punctul A. Din punctul A, la momentul $t_2 = 2$ secunde, pleacă din repaus cu accelerația a constantă un tramvai care ajunge din urmă autocamionul într-un punct B. În momentul t al întîlnirii în punctul B, viteza tramvaiului este $v_2 = 10\ \text{ms}^{-1}$. Se cere să se calculeze:

a) intervalul de timp în care autocamionul străbate distanța $s = AB$;

b) distanța s;

c) accelerația tramvaiului.

Considerînd că începînd din punctul B, tramvaiul este frînat cu accelerația a', oprindu-se în punctul C aflat la distanța $s' = 12{,}5$ m de punctul B, să se determine:

d) accelerația a' și timpul t' în care tramvaiul parcurge distanța BC;

e) coeficientul de frecare de alunecare μ între roțile tramvaiului și șine. Drumul ABC se consideră orizontal.

1.2.22. Doi excursioniști E_1 și E_2 trebuie să parcurgă într-o zi distanța $AB = d = 48$ km. Excursionistul E_1 pleacă din punctul A cu bicicleta, iar E_2 pe jos. Într-un punct C, excursionistul E_1 lasă bicicleta și își continuă drumul pe jos. Excursionistul E_2 ajungînd în punctul C, își continuă drumul cu bicicleta. Fiecare excursionist are viteza $v_1 = 1{,}5\ \text{ms}^{-1}$ cît timp merge pe jos și viteza $v_2 = 4\ \text{ms}^{-1}$ cît timp merge cu bicicleta. Roțile bibicletei au diametrul $D = 80$ cm. Roata mare a angrenajului cu lanț are diametrul $d_1 = 16$ cm, iar roata mică a angrenajului — fixată la roata din spate — are diametrul $d_2 = 8$ cm. Se cere să se determine:

a) distanța AC, astfel ca cei doi excursioniști să ajungă simultan în punctul B;

d) distanța parcursă de excursionistul E_2 pînă în momentul cînd excursionistul E_1 trece prin punctul C;

c) timpul cît bicicleta rămîne nefolosită;

d) numărul de rotații făcute de roțile angrenajului într-un minut;

e) spațiul parcurs de bicicletă pînă la oprire, știind că bicicleta se oprește la un minut de la întreruperea pedalării.

1.2.23. Apa unui rîu, cu lățimea de 100 m, are viteza $V = 1$ m/s. Dintr-un punct situat la mijlocul rîului pornesc simultan două bărci cu motor, ale căror motoare identice le asigură o viteză $u = 14{,}4$ km/h. Să se calculeze:

a) distanța dintre punctele în care cele două bărci ating același mal, precum și distanțele străbătute de fiecare barcă, dacă vectorii $\vec{u}$ fac cu vectorul $\vec{V}$ unghiurile $\alpha = 45°$ și respectiv, $\beta = 135°$ (fig. 1.120);

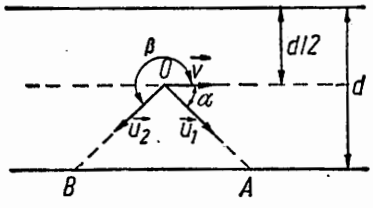


Fig. 1.120.

b) timpul după care cele două bărci ajung la mal;

c) distanța dintre cele două bărci după 10 minute de la pornire, dacă una se deplasează în sensul curgerii apei, iar cealaltă în sens opus.

1.2.24. Un corp este aruncat de la sol sub unghiul α cu orizontala. Rezistența aerului se neglijează. Se cere să se calculeze:

a) unghiul α_1 sub care trebuie aruncat corpul astfel ca bătaia să fie de patru ori mai mare decît înălțimea maximă atinsă de corp;

b) unghiul α_2 pentru care bătaia este maximă la o viteză inițială v_0 dată.

1.2.25. Dintr-un punct P pleacă cu viteza $\vec{v}_1$ un mobil M_1, iar în același moment, un mobil M_2 aflat la distanța d de la punctul P pornește cu viteza $\vec{v}_2$ către acest punct (figura 1.121). Mișcările celor două mobile se consideră rectilinii și uniforme, iar unghiul dintre cele două traiectorii este α.

Se cere să se calculeze spațiul parcurs de mobilul M_1 pînă în momentul cînd cele două mobile se găsesc la distanța minimă unul față de altul.

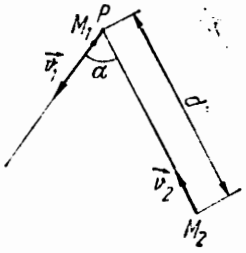


Fig. 1.121.

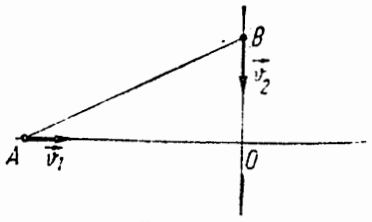


Fig. 1.122.

1.2.26. Două mașini se deplasează pe două străzi perpendiculare între ele, înspre intersecția străzilor. Mișcarea automobilelor este rectilinie și uniformă. Prima mașină are viteza $v_1 = 50$ km/h, iar a doua mașină are viteza $v_2 = 100$ km/h.

În momentul plecării lor concomitente, prima mașină se afla la distanța $OA = d_1 = 100$ km, iar a doua la distanța $OB = d_2 = 50$ km de punctul O de intersecție a străzilor (figura 1.122). Se cere să se stabilească:

a) timpul t_1 de la plecarea mașinilor, după care distanța dintre ele este minimă;

b) poziția mașinilor la timpul t_1 și distanța minimă dintre ele.

1.2.27. Mecanicul unui tren de persoane, care se deplasează cu viteza $v_{01} = 30$ ms^{-1}, vede în fața sa, deplasîndu-se în același sens, un tren de marfă care are viteza $v_{02} = 9$ ms^{-1}. În momentul cînd distanța dintre personal și mărfar este $d = 180$ m, mecanicul de la personal pune o frînă care imprimă trenului o accelerație de frînare $a = -1{,}2$ ms^{-2}. Considerînd că mecanicul de pe trenul de marfă nu observă apropierea personalului și trenul de persoane continuă să se deplaseze uniform cu viteza v_{02}, să se stabilească dacă are sau nu loc ciocnirea dintre cele două trenuri.

1.2.28. Mașina Atwood, folosită pentru verificarea legilor mișcării uniform accelerate, poate fi reprezentată schematic în felul următor: de un fir care trece peste un scripete de masă neglijabilă sînt suspendate două corpuri de mase inegale m_1 și m_2 (figura 1.124). Se cere:

a) accelerația sistemului format din cele două corpuri;

b) tensiunea din fir și forța F ce acționează asupra scripetelui;

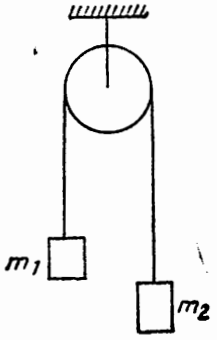


Fig. 1.124.

c) raportul maselor m_1 și m_2, dacă se știe că după un interval de timp t de la începutul mișcării, corpul cu masa m_1 a coborît cu $1/n$ din distanța pe care ar fi parcurs-o în aceeași perioadă de timp, în cădere liberă;

d) dacă $m_1 = 310$ g și $m_2 = 300$ g, să se determine timpul t de la începutul mișcării, în care fiecare corp parcurge distanța $d = 1{,}2$ m, precum și viteza pe care o vor avea corpurile după parcurgerea acestei distanțe.

1.2.29. Un corp cu viteza $v_0 = 5$ ms^{-1} este aruncat în sus pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Să se calculeze:

a) înălțimea maximă la care se ridică corpul pe planul înclinat;

b) viteza corpului cînd acesta ajunge din nou în punctul inițial, de lansare.

1.2.30. Un corp cu masa $m = 1$ kg este aruncat pe verticală de jos în sus, cu viteza $v_0 = 19{,}6$ ms^{-1}. După ce a atins înălțimea maximă, corpul cade liber pe verticală în jos parcurgînd distanța $h' = 10$ m, iar apoi asupra lui acționează forța $\vec{F}$ orientată în sens opus mișcării. Se neglijează rezistența aerului. Să se calculeze:

a) viteza corpului în momentul aplicării forței $\vec{F}$;

b) variația vitezei în timpul cît acționează forța $\vec{F}$;

c) valoarea forței $\vec{F}$ pentru ca după un timp $t = 2$ secunde, corpul să se oprească;

d) energia cinetică și energia potențială a corpului în momentul în care începe să acționeze forța $\vec{F}$.

1.2.31. Mobilele A și B cu masele $m_A = 1$ kg și $m_B = 2$ kg, aflate în același loc în repaus, pornesc simultan sub acțiunea forțelor F_A și respectiv, F_B. Forța $F_A = 1$ N acționează timp de 30 secunde asupra corpului A, iar forța $F_B = 4$ N acționează timp de 10 secunde asupra corpului B. Forțele F_A și F_B acționează în același sens. Mobilele se deplasează pe un plan orizontal, fără frecare, pînă în momentul cînd se reîntîlnesc. Din momentul reîntîlnirii, deplasarea se face tot pe planul orizontal, dar cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}102$, același pentru ambele corpuri. Să se calculeze:

a) distanțele parcurse de cele două corpuri pînă la momentele $t_1 = 10$ s și respectiv, $t_2 = 30$ s;

b) distanța S și timpul t după care cele două corpuri se reîntîlnesc;

c) distanțele parcurse de cele două corpuri după reîntîlnire și intervalele de timp de la reîntîlnire pînă la oprirea celor două corpuri:

d) variația în timp a distanței ΔS dintre cele două corpuri.

1.2.32. Peste un scripete fix este trecut un fir care are legate la capete corpurile de mase $m_1 = 100$ g și respectiv, $m_2 = 200$ g. Corpul cu masa m_2 este ridicat pînă la înălțimea $h = 0{,}5$ m astfel încît corpul cu masa m_1 atinge solul. Neglijînd frecările și masa firului și a scripetelui, se cere să se calculeze:

a) accelerația sistemului;

b) timpul după care cele două corpuri se află la aceeași înălțime;

c) înălțimea la care se ridică corpul cu masa m_1 după ce corpul cu masa m_2 a atins solul.

1.2.33. Un corp cu greutatea $G = 10^3$ N este tras pe un plan orizontal de două forțe concurente $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, situate în planul orizontal ce cuprinde și

centrul de greutate al corpului. Forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ fac unghiul $\alpha = 90°$ între ele. Sub acțiunea acestor forțe și a forței de frecare, corpul se deplasează într-o mișcare uniform accelerată, fără viteză inițială, cu accelerația $a = 2\ \text{ms}^{-2}$. După timpul $t_1 = 20$ secunde, forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ nu mai acționează, iar corpul își continuă mișcarea pînă la oprire.

Se știe că valoarea forței $\vec{F}_1$ este 300 N, iar coeficientul de frecare între corp și planul orizontal este $\mu = 0{,}2$. Se cere să se calculeze:

a) forța de tracțiune și valoarea forței $\vec{F}_2$;
b) spațiul total parcurs de corp și timpul cît durează mișcarea corpului.
Se consideră $g \simeq 10\ \text{ms}^{-2}$.

1.2.34. Două corpuri de mase egale ($m_1 = m_2 = m = 100$ g) sînt suspendate la extremitățile firului unei mașini Atwood. Deasupra corpului A, plasat în fața diviziunii zero a riglei gradate, se pune la momentul $t_0 = 0$ un alt corp cu masa $m_3 = 10$ g. La momentul t_0, se pune în mișcare sistemul mobil al mașinii, cu viteza inițială $v_0 = 20\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, în sensul coborîrii corpului A. După ce se parcurge spațiul $h = 1$ m, corpul B trecînd printr-un inel se ridică cu masa adițională $m_4 = 30$ g. Se cere să se calculeze:
a) viteza corpului A în momentul cînd se adaugă masa m_4 și timpul după care se adaugă această masă;
b) spațiul parcurs pînă la oprire și timpul necesar pentru parcurgerea acestui spațiu;
c) timpul după care sistemul trece din nou prin poziția de plecare;
d) tensiunea în fir în cazul punctului a).

1.2.35. Un tren avînd masa totală $m = 600$ tone pornește din repaus și are o mișcare uniform accelerată. După timpul $t_1 = 2$ minute, trenul atinge viteza $v_1 = 54$ km/h. Se cere:
a) accelerația de mișcare a trenului;
b) forța de tracțiune a trenului în mișcarea accelerată, dacă coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}01$;
c) distanța parcursă de tren în timpul t_1 și puterea dezvoltată de locomotivă la momentul t_1;
d) distanța și timpul după care trenul se oprește, dacă după timpul $t_2 = 4$ minute de la pornire, motorul locomotivei nu mai acționează. Se consideră $g \simeq 10\ \text{ms}^{-2}$.

1.2.36. Dintr-un punct A se lasă să cadă după verticală, fără viteză inițială, un corp de masă $m_1 = 2$ kg. După două secunde, se aruncă după el un alt corp cu masa $m_2 = 4$ kg și cu viteza inițială $v_{02} = 24{,}5\ \text{ms}^{-1}$, pe aceeași verticală. Să se calculeze:
a) timpul după care corpul de masă m_2 ajunge corpul de masă m_1, precum și spațiul parcurs pînă la punctul de întîlnire;
b) vitezele celor două corpuri înainte și după ciocnire, considerînd ciocnirea perfect elastică.

1.2.37. Un fir trecut peste un scripete fix are atîrnat la unul din capete un corp cu masa $m_1 = 200$ g, iar la celălalt capăt un alt corp cu masa $m_2 = 100$ g. Să se calculeze:
a) accelerația sistemului format din cele două corpuri;
b) distanța h_1 dintre centrele celor două corpuri, după intervalul de timp $t_1 = 3$ secunde, dacă la momentul inițial se aflau în același plan orizontal, precum și energia cinetică a celor două corpuri la momentul t_1.

Dacă la momentul t_1, firul se rupe să se stabilească:

c) distanța h_2 parcursă de corpul cu masa m_2 din momentul ruperii firului pînă la înălțimea maximă;

d) viteza corpului cu masa m_1 în momentul cînd corpul cu masa m_2 ajunge la înălțimea maximă.

Se neglijează frecările.

1.2.38. Pe o cale rectilinie și orizontală, un vagon de tramvai cu masa $M = 10$ tone pornește din repaus sub acțiunea unei forțe constante $F = 5$ kN care acționează pe distanța $s_1 = 100$ m. Coeficientul de frecare global se consideră $\mu = 0{,}02$. Să se calculeze:

a) viteza v_1 a vagonului după parcurgerea distanței s_1;

b) distanța s_2 parcursă de vagon din momentul încetării acțiunii forței F pînă ce viteza vagonului ajunge la valoarea $v_2 = 2$ ms^{-1};

c) energia E consumată prin frecare de-a lungul drumului $s = s_1 + s_2$;

d) puterea P a motorului în momentul cînd vehiculul atinge viteza maximă.

1.2.39. De la suprafața Pămîntului este aruncat vertical în sus, cu viteza $v_0 = 20$ ms^{-1}, un corp de Pb cu masa $m_1 = 300$ g. De la înălțimea maximă la care poate ajunge acest corp, cade liber un alt corp de Pb cu masa $m_2 = 100$ g. Corpurile se ciocnesc la jumătatea înălțimii maxime ce poate fi atinsă de primul corp. Se cere să se afle:

a) care dintre corpuri trebuie aruncat mai întîi și timpul după care trebuie aruncat al doilea corp, de la pornirea primului;

b) timpul necesar ca cele două corpuri să atingă solul după ciocnire.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.40. Un corp de masă m se deplasează sub acțiunea forței F. Viteza inițială a corpului este $v_0 = 0$. Se cere:

a) dependența energiei cinetice a corpului în funcție de timpul t, socotit din momentul începerii acțiunii forței F;

b) dependența energiei cinetice a corpului de distanța x parcursă;

c) să se reprezinte grafic dependențele $E_c = f(t^2)$ și $E_c = f(x)$, stabilindu-se relația dintre pantele celor două drepte și accelerația corpului.

1.2.41. Leonardo da Vinci a făcut următoarele afirmații: dacă forța F deplasează corpul de masă m în timpul t pe distanța s, atunci:

a) aceeași forță F deplasează un corp cu masa $m/2$ în timpul t pe distanța $2\,s$;

b) forța F va deplasa corpul de masă $m/2$ pe distanța s în timpul $t/2$;

c) forța $F/2$ deplasează corpul de masă $m/2$ pe distanța s în timpul t;

d) forța $F/2$ deplasează corpul de masă m pe distanța $s/2$ în timpul t;

e) forța F deplasează corpul de masă $2\,m$ pe distanța s în timpul $2\,t$.

Să se indice care dintre afirmațiile de mai sus sînt adevărate.

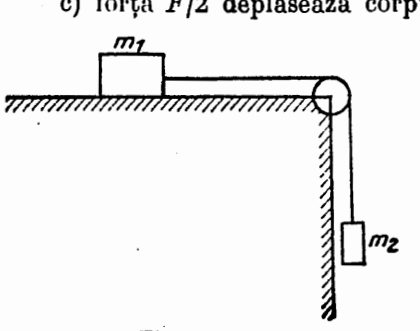


Fig. 1.128.

1.2.42. Corpul de masă m_1 se află pe un plan orizontal, fiind legat printr-un cablu de greutate neglijabilă, ce trece peste un scripete fix, de corpul cu masa m_2 (figura 1.128).

a) Dacă între corpul de masă m_1 și planul orizontal nu există frecare, să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea în fir.

b) Dacă între corpul de masă m_1 și planul orizontal, coeficientul de frecare este μ, să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea în fir.

1.2.43. Cu ajutorul unui scripete fix aflat la o înălțime oarecare se lasă să coboare uniform o cușcă de masă $M = 120$ kg. După primele 5 secunde, cușca a străbătut distanța de 10 m. Se cere:

a) tensiunea în cablul de care este suspendată cușca;

b) tensiunea în cablu, dacă cușca este ridicată uniform accelerat cu accelerația $a = 2$ ms^{-2}.

1.2.44. Un automobil se deplasează cu o mișcare uniform accelerată pe un plan orizontal. Viteza sa la un moment dat fiind $v_0 = 18$ km/h, automobilul atinge după un interval oarecare de timp viteza $v = 72$ km/h. Pentru aceasta se efectuează un lucru mecanic $L = 150{,}093$ kg. Puterea motorului fiind $P = 20{,}4$ CP, se cere să se calculeze:

a) greutatea automobilului;

b) spațiul parcurs în mișcarea uniform accelerată;

c) forța de tracțiune medie dezvoltată de motor, considerînd rezistențele nule.

1.2.45. Două mobile pornesc simultan din punctul A, pe aceeași direcție și în același sens. Primul mobil se deplasează cu viteza $v_1 = 20$ ms^{-1}, iar al doilea cu viteza $v_2 = 15$ ms^{-1}. După un interval de timp $t = 30$ minute, un al treilea mobil pleacă tot din punctul A, pe aceeași direcție și în același sens cu primele două, ajungînd din urmă pe primul mobil la un interval de timp $t' = 60$ minute după ce l-a ajuns pe cel de-al doilea. Să se calculeze:

a) viteza celui de-al treilea mobil;

b) intervalul de timp Δt scurs de la punerea în mișcare a mobilului al doilea pînă la întîlnirea lui cu cel de-al treilea mobil.

1.2.46. Un ascensor de masă $M = 1\,000$ kg este parțial echilibrat de o contragreutate de masă $M' = 900$ kg, cu ajutorul unui cablu ce trece peste un scripete fix. Cînd ascensorul este în repaus, la parter, i se aplică în intervalul de timp $t_1 = 2$ s o forță $F_1 = 1\,960$ N îndreptată în sus, apoi în intervalul de timp t_2 i se aplică forța $F_2 = 1\,372$ N îndreptată tot în sus. După aceasta, ascensorul este lăsat liber un interval de timp t_3. Se cere să se calculeze:

a) accelerația sistemului format din ascensor și contragreutate în timpul unei mișcări fără frecare;

b) intervalele t_2 și t_3 pentru ca ascensorul să se oprească la nivelul unui etaj situat la înălțimea $h = 9{,}8$ m de parter;

c) forța indicată în timpul fiecărei faze de urcare de către un dinamometru fixat în tavanul ascensorului, dacă de dinamometru se agață un corp cu masa $m = 1$ kg.

Se neglijează frecările și masa scripetelui.

1.2.47. Un motor de putere constantă $P = 40$ CP acționează un automobil de masă $M = 4\,000$ kg, care se deplasează pe o stradă orizontală plecînd din repaus. Se cere să se calculeze:

a) viteza automobilului după 30 secunde de la plecare, dacă se neglijează frecările;

b) dependența vitezei automobilului de timp, în condițiile de la punctul a), arătîndu-se dacă mișcarea este uniform accelerată sau nu;

c) viteza limită atinsă de automobil, dacă forța de frecare este 3% din greutatea acestuia;

d) timpul necesar frînării și forța de frînare necesară pentru ca automobilul să se oprească, cu motorul decuplat, pe o distanță $d = 50$ m, după ce a atins viteza maximă.

1.2.48. Un tren cu masa $m_1 = 1\,000$ tone se deplasează orizontal cu o viteză $v = 72$ km/h. La un moment dat, ultimele vagoane de masă $m_2 = 200$ tone se desprind de tren. Mecanicul, observînd după un timp oarecare schimbarea survenită în comportarea trenului, oprește motorul locomotivei. Puterea motorului este $P = 1{,}6$ MW. Din momentul opririi motorului locomotivei, trenul a mai parcurs un spațiu $l_3 = 3\,000$ m. Să se calculeze:

a) coeficientul de frecare dintre roțile trenului și șine;

b) viteza trenului în momentul opririi motorului;

c) distanța dintre tren și vagoanele desprinse după oprirea atît a trenului cît și a vagoanelor.

1.2.49. Un corp mobil de masă m_1 lovește un corp cu masa m_2, aflat în repaus. Presupunînd că ciocnirea este frontală, se cere să se calculeze:

a) energia cinetică E_2' a celui de-al doilea corp după ciocnire, dacă ciocnirea este elastică și dacă energia cinetică a primului corp înainte de ciocnire este E_1;

b) raportul m_1/m_2 astfel încît raportul v_2'/v_1' să fie 5/2.

1.2.50. De la un tren de masă $M = 250$ tone, care se deplasează orizontal cu o viteză constantă, se desprinde la un moment dat, ultimul vagon de masă $m = 10$ tone. După desprindere, vagonul mai parcurge drumul $l = 200$ m și se oprește. Forța de tracțiune a locomotivei este considerată tot timpul aceeași, iar coeficientul de frecare are valoarea $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:

a) viteza trenului înainte de desprinderea vagonului;

b) forța de tracțiune a locomotivei;

c) distanța dintre tren și vagon, în momentul opririi vagonului.

1.2.51. De capetele unei sfori ce trece peste un scripete, fixat la partea superioară a unui plan înclinat, sînt legate două corpuri. Unul, de masă $m_1 = 800$ g, alunecă pe planul înclinat, iar celălalt corp, de masă $m_2 = 200$ g, atîrnă vertical. În momentul inițial, cînd sistemul este menținut în repaus, se aplică corpului de masă m_2 o viteză inițială $v_1 = 15$ ms^{-1}, vertical de sus în jos. Unghiul dintre planul înclinat și orizontală este $\alpha = 30°$, iar coeficientul de frecare dintre corpul de masă m_1 și planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Se cere să se calculeze:

a) accelerația a a sistemului format din cele două corpuri;

b) timpul t_1 socotit de la momentul inițial pînă în momentul în care viteza sistemului este zero;

c) spațiul s parcurs de corpul cu masa m_1 în timpul t_1;

d) accelerația a_2 a sistemului după timpul t_1, cînd corpul cu masa m_1 începe să coboare pe planul înclinat;

e) energia cinetică a celor două corpuri la momentul $t_2 = t_1 + 20$ s. Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.52. Un corp de masă $m = 1$ kg alunecă un timp de 2 secunde pe un plan înclinat de lungime $l = 4$ m, pornind din repaus din punctul de înălțime maximă al planului înclinat. Unghiul dintre planul înclinat și orizontală este $\alpha = 30°$. Se cere să se calculeze:

a) coeficientul de frecare dintre corp şi planul înclinat;

b) forţa cu care trebuie apăsat corpul, normal pe planul înclinat, pentru ca să nu mai alunece;

c) lucrul mecanic efectuat împotriva forţelor de frecare, în timpul coborîrii pe planul înclinat şi randamentul planului înclinat.

1.2.53. O sferă mică de masă $m = 100$ g alunecă pe o pantă de lungime $l = 20$ m, cu coeficientul de frecare $\mu_1 = 0{,}2$. La momentul iniţial, sfera se află la înălţimea $h = 10$ m faţă de orizontală, în punctul de înălţime maximă al planului, de unde este lăsată să cadă fără viteză iniţială. Se cere să se calculeze:

a) timpul de deplasare a sferei pe pantă;

b) spaţiul parcurs de sferă în continuare pe planul orizontal (coeficientul de frecare pe planul orizontal fiind $\mu_2 = 0{,}5$);

c) presupunînd că sfera se sprijină de planul înclinat, fiind legată de un fir ce face unghiul $\beta = 45°$ cu verticala, se cere reacţia N a planului înclinat şi tensiunea T în firul de legătură.

1.2.54. Coeficientul de frecare dintre un corp cu greutatea G şi un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală, este μ. Să se determine:

a) limitele între care poate varia valoarea unei forţe F orientate paralel cu planul înclinat, astfel încît corpul să rămînă în repaus;

b) unghiul β pe care trebuie să-l facă planul înclinat cu orizontala, pentru ca sub acţiunea propriei greutăţi, corpul să alunece uniform pe planul respectiv;

c) unghiul γ pe care trebuie să-l facă o forţă F' cu orizontala, în cazul cînd planul pe care se află corpul de greutate G este orizontal, astfel încît valoarea forţei F' care asigură o mişcare rectilinie şi uniformă a corpului pe plan să fie minimă. Să se exprime valoarea minimă a forţei F' în funcţie de coeficientul de frecare μ şi de greutatea G a corpului.

1.2.55. Un corp A este aruncat vertical în sus cu viteza iniţială $v_{01} = 20$ ms^{-1}, iar un alt corp B cade de la înălţimea $h = 19{,}6$ m cu viteza iniţială $v_{02} = 0$. Se cere:

a) durata de cădere a corpului B pînă la sol şi intervalele de timp în care acesta parcurge primul şi respectiv, ultimul metru din înălţimea h;

b) dependenţa de timp a distanţei x pe verticală dintre corpurile A şi B, dacă acestea încep să se deplaseze simultan şi momentul la care corpurile au aceeaşi altitudine;

c) energiile cinetice ale corpurilor A şi B cînd se găsesc la aceeaşi distanţă faţă de sol. Cele două corpuri au masele $m_A = 1$ kg şi respectiv, $m_B = 2$ kg.

1.2.56. Din vîrful unui deal porneşte, la momentul $t_0 = 0$, o sanie cu masa totală $m_1 = 90$ kg, avînd un coeficient de frecare $\mu_1 = 0{,}5$. La momentul $t_1 = 8{,}5$ s, din acelaşi punct porneşte o a doua sanie cu masa totală $m_2 = 60$ kg, avînd coeficientul de frecare $\mu_2 = 0{,}4$. Planul pe care se deplasează ambele sănii face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Să se calculeze:

a) acceleraţiile a_1 şi a_2 ale celor două sănii în timpul coborîrii lor pe deal;

b) momentul t la care cele două sănii se întîlnesc şi distanţa s de punctul de plecare la care are loc întîlnirea;

c) energia cinetică a fiecărei sănii în momentul întîlnirii.

1.2.57. O ladă de masă $M = 50$ kg alunecă cu frecare, în jos, pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Iniţial, lada se află la

înălțimea $h = 2{,}5$ m față de orizontală. De la baza inferioară a planului înclinat, lada continuă să alunece pe planul orizontal. Coeficientul de frecare pe planul înclinat și pe planul orizontal este $\mu_1 = 1/2\sqrt{3}$ și respectiv, 0,3125. Se cere să se calculeze:

a) energia lăzii la baza planului înclinat;

b) distanța l_1 parcursă de ladă pe orizontală;

c) forța medie suplimentară de frînare a lăzii pe planul orizontal, astfel încît aceasta să poată fi oprită la distanța $l_2 = 0{,}5$ m de baza planului înclinat.

1.2.58. Un proiectil de masă $m = 13$ g este lansat vertical cu o viteză $v = 710$ ms^{-1} și se încastrează într-un corp cu masa $M = 420$ g, format dintr-un metal moale. Se cere să se calculeze:

a) înălțimea la care se va ridica ansamblul corpurilor cu masa $(m + M)$ de la locul de ciocnire;

b) căldura degajată prin ciocnire.

Accelerația gravitațională este $g = 9{,}81$ m·s^{-2}.

1.2.59. Un om cu greutatea $G = 800$ N se află într-un tramvai, în picioare, fără să se țină de ceva. Tramvaiul fiind frînat, omul face instinctiv un pas înainte pentru a nu cădea. Dacă viteza tramvaiului în momentul începerii frînării este $v_0 = 5$ ms^{-1}, iar oprirea se face în timpul $t = 2{,}5$ s, se cere să se determine:

a) lungimea pasului făcut de om, dacă centrul lui de greutate se află la înălțimea $h = 1{,}25$ m de la podeaua tramvaiului;

b) spațiul parcurs de tramvai în timpul frînării.

1.2.60. Un fir de lungime $l = 4$ m este fixat la unul din capete într-un punct O, iar la capătul celălalt al firului atîrnă o bilă cu masa $m = 10$ kg. Firul este îndepărtat cu un unghi α_0 de poziția verticală și apoi este lăsat liber. Se cere să se calculeze:

a) tensiunea în fir în funcție de unghiul $\alpha \leqslant \alpha_0$ dintre fir și verticală;

b) unghiul α_0 pe care trebuie să-l facă firul cu verticala, în dreapta, pentru ca energia cinetică maximă a bilei în timpul oscilațiilor să fie $E = 200$ J;

c) unghiul maxim făcut de fir în stînga verticalei, dacă se plasează în punctul O', aflat la distanța de 2 m sub punctul O, un cui care imobilizează 2 m din fir în momentul cînd pendulul traversează verticala, în condițiile de la punctul b).

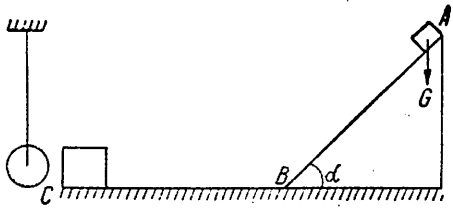


Fig. 1.129.

1.2.61. Din punctul de înălțime maximă a unui plan înclinat AB (figura 1.129), cu înălțimea $h = 3$ m, se dă drumul unui corp cu masa $m_1 = 2$ kg, care alunecă pe plan cu frecare. Unghiul dintre planul înclinat și orizontală este $\alpha = 30°$, iar coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}1$. După parcurgerea porțiunii AB pe planul înclinat, corpul continuă să se deplaseze pe porțiunea orizontală BC, fără frecare. În punctul C, se găsește un corp de masă $m_2 = 3$ kg, suspendat de un fir de lungime $l' = 2$ m. Ciocnirea dintre cele două corpuri se consideră neelastică. Se cere să se calculeze:

a) unghiul maxim pe care-l face firul cu verticala;

b) tensiunea maximă care ia naştere în fir, în timpul oscilaţiei;
c) energia de deformare a corpurilor prin ciocnire.

1.2.62. Locomotiva unui tren cu masa totală $m = 120$ tone exercită o forţă de tracţiune constantă $F_{tr} = 141\,600$ N. Trenul urcă pe o pantă de 5‰, iar coeficientul de frecare global al trenului cu şinele este $\mu = 0{,}05$. Trenul porneşte din repaus, iar după un timp $t = 12$ s de la pornirea trenului pleacă, din dreptul gării, un automobil cu viteza constantă $v = 7$ ms^{-1}, care merge pe o şosea paralelă cu calea ferată. Se cere să se calculeze:
a) acceleraţia trenului şi viteza medie a acestuia în intervalul de timp de la $t_0 = 0$ pînă la momentul $t_1 = 1$ minut;
b) momentele în care distanţa dintre locomotivă şi automobil, pe o axă paralelă cu ambele drumuri, este $d = 16$ m.

1.2.63. O sferă de masă $m_1 = 1$ kg alunecă cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală. Lungimea planului înclinat este $s_1 = 4$ m, iar coeficientul de frecare a sferei pe plan este $\mu = 0{,}2$. Sfera pleacă din punctul de înălţime maximă a planului înclinat şi îşi continuă mişcarea pe un plan orizontal. Viteza iniţială pe planul orizontal este egală cu viteza obţinută la baza planului înclinat, iar coeficientul de frecare pe planul orizontal este $\mu_1 = 0{,}1$. După ce parcurge distanţa $s_2 = 8$ m pe planul orizontal, sfera ciocneşte o altă sferă de masă $m_2 = 4$ kg care se deplasează cu viteza de 12 ms^{-1}, în sens contrar sensului de mişcare a primei sfere. Ciocnirea se consideră plastică şi instantanee. Ansamblul celor două sfere îşi continuă mişcarea spre baza planului înclinat, urcînd pînă la înălţimea h. Se cere să se calculeze:
a) viteza sferei de masă m_1 la baza planului înclinat;
b) viteza celor două sfere după ciocnire şi energia de deformare a sferelor prin ciocnire;
c) înălţimea h pe verticală, pînă la care se va urca ansamblul celor două corpuri.

1.2.64. Pe un plan înclinat de lungime $l = 12$ m, ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala, se află două corpuri: corpul 1 cu masa $m_1 = 7$ kg şi corpul 2 cu masa $m_2 = 5$ kg. Coeficientul de frecare dintre corpul 1 şi planul înclinat este $\mu_1 = 0{,}4$, iar dintre corpul 2 şi planul înclinat este $\mu_2 = 0{,}6$. La momentul iniţial, cele două corpuri se află în repaus: corpul 1 în vîrful planului, iar corpul 2 la o distanţă de 5 m depărtare de primul. În acest moment, corpurile sînt lăsate liber. Se cere să se calculeze:
a) acceleraţiile a_1 şi a_2 ale celor două corpuri la coborîrea pe planul înclinat;
b) distanţa s (măsurată din vîrful planului înclinat), timpul t_1 şi vitezele v_1 şi v_2 ale celor două corpuri în momentul cînd acestea se ciocnesc;
c) viteza iniţială v_{03} a corpului format prin contopirea corpurilor 1 şi 2 în urma ciocnirii lor plastice;
d) acceleraţia a_3 a corpului format, considerîndu-se o contopire prin alăturare, coeficienţii de frecare dintre fiecare corp şi planul înclinat rămînînd aceiaşi;
e) momentul t_3 cînd corpul format ajunge la baza planului înclinat (t_3 se măsoară de la momentul t_0, cînd corpul 1 este lăsat liber).

1.2.65. Un corp de masă m, după o cădere liberă de 320 m (fără frecare cu aerul), îşi continuă mişcarea pe o distanţă $s_1 = 40$ m, pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Coeficientul de frecare dintre corp şi

acest plan înclinat este $\mu = 0{,}2$. De la marginea inferioară a planului înclinat, corpul se deplasează pe distanța $s_2 = 1\,000$ m, pe un plan orizontal. Între planul orizontal și corp, coeficientul de frecare este tot μ. După parcurgerea spațiului s_2, corpul urcă, fără frecare, pe un plan înclinat cu unghiul $\beta = 45°$ față de orizontală. Viteza cu care corpul începe să se deplaseze pe primul plan înclinat se consideră egală cu viteza corpului, pe verticală, după ce a parcurs distanța de 320 m în cădere liberă. Se cere să se calculeze:

a) timpul t_0 după care corpul ajunge pe primul plan înclinat;

b) înălțimea H până la care se ridică corpul pe al doilea plan înclinat;

c) dependența de timp a spațiului și vitezei în cele patru etape ale mișcării.

1.2.66. Unui corp de masă $m = 1$ kg, aflat la înălțimea h pe un plan înclinat, i se imprimă în jos, paralel cu planul, o viteză $v_0 = 10$ ms^{-1}. Corpul parcurge planul înclinat în timpul $t = 2$ s și apoi își continuă drumul, pe un plan orizontal, până se oprește. Coeficientul de frecare pe planul înclinat și pe planul orizontal este același $\mu = 0{,}2$. Să se calculeze:

a) lungimea și înălțimea planului înclinat, precum și spațiul parcurs de corp pe planul orizontal;

b) valoarea forțelor de frecare pe planul înclinat și pe planul orizontal și energia consumată pentru învingerea forțelor de frecare pe întregul parcurs.

1.2.67. Un corp de masă $m_1 = 4$ kg se află la baza unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Corpul este legat de un fir inextensibil de masă neglijabilă, trecut peste un scripete fix situat la extremitatea superioară a planului înclinat. De cealaltă extremitate a firului este legat un corp de masă $m_2 = 10$ kg, situat inițial la nivelul superior al planului înclinat. Coeficientul de frecare de alunecare între corpul de masă m_1 și planul înclinat este $\sqrt{3}/2$, iar lungimea planului înclinat este $l = 2{,}5$ m. La momentul $t = 0$, sistemul este lăsat liber. Se cere să se calculeze:

a) accelerația sistemului până în momentul în care corpul de masă m_2 atinge planul orizontal, precum și viteza sistemului în acest moment;

b) spațiul parcurs de corpul cu masa m_1 până la oprire, din momentul în care corpul de masă m_2 atinge planul orizontal;

c) presupunînd că în momentul în care corpul de masă m_2 atinge planul orizontal, firul ce leagă cele două corpuri se rupe, care este energia cinetică a corpului de masă m_1, cînd ajunge la baza planului înclinat?

1.2.68. Un corp cu masa $m = 10$ kg se aruncă în jos pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală, cu o anumită viteză inițială astfel ca la pornire, energia sa totală este $E = 420$ J. Ajungînd la baza planului înclinat, corpul parcurge distanța de 5 m pe orizontală, apoi urcă pe un alt plan înclinat cu unghiul $\beta = 45°$ față de orizontală și se oprește după ce a parcurs distanța maximă pe acest plan. Coeficientul de frecare are valoarea $\mu = 0{,}2$ pe tot parcursul mișcării. Viteza corpului la baza primului plan înclinat este $v = 8{,}5$ ms^{-1}. Se cere să se calculeze:

a) distanța parcursă de corp pe primul plan înclinat și viteza inițială a acestuia;

b) energia potențială a corpului în momentul în care acesta se oprește pe cel de-al doilea plan înclinat;

c) lucrul mecanic al forțelor de frecare pe tot parcursul mișcării.

1.2.69. Un corp de masă $m = 100$ g, aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală, alunecă pe acest plan, cu coeficientul de frecare

$\mu = 0{,}2$. Să se calculeze valoarea forței care acționează asupra corpului pe direcția orizontală astfel încît:

a) corpul să urce uniform;

b) corpul să coboare uniform;

c) corpul să urce uniform accelerat cu accelerația $a_1 = 1\ ms^{-2}$;

d) corpul să coboare uniform accelerat cu accelerația $a_2 = 2\ ms^{-2}$ și respectiv, $a_3 = 15\ ms^{-2}$.

1.2.70. Un corp de masă $m = 100$ g este aruncat de jos în sus, pe verticală, cu viteza inițială $v_0 = 200\ ms^{-1}$. În punctul de înălțime maximă pe care-l poate atinge corpul, are loc o explozie în urma căreia se obțin două fragmente de mase m_1 și m_2, care se vor mișca în sensuri opuse, pe direcția verticală. Raportul maselor celor două fragmente este $m_1/m_2 = 2/3$, iar energia de explozie este $E = 5\,000$ J și se distribuie integral sub formă de energie cinetică a celor două fragmente rezultante. Să se calculeze:

a) timpul t după care corpul atinge punctul de înălțime maximă;

b) vitezele v_1 și v_2 ale celor două corpuri, imediat după explozie;

c) intervalul de timp Δt dintre momentele în care cele două fragmente ating pămîntul.

Se va considera $g \simeq 10\ ms^{-2}$.

1.2.71. Două plane înclinate, așezate față în față, sînt în contact la bazele lor. Planele au aceeași lungime l și același unghi de înclinare față de planul orizontal (figura 1.130). Din punctul A al primului plan înclinat alunecă un corp cu masa m, ce poate trece prin punctul C de pe primul pe al doilea plan înclinat și invers. Viteza cu care corpul ajunge în punctul C, în coborîre pe unul din planele înclinate, se consideră egală cu viteza cu care corpul începe să urce pe celălalt plan înclinat. Pe ambele plane înclinate, corpul alunecă cu același coeficient de frecare μ.

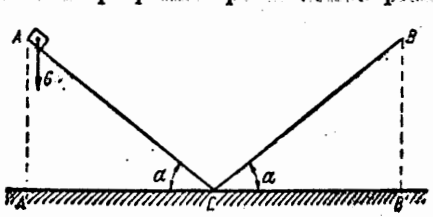


Fig. 1.130.

Se cere să se calculeze:

a) spațiul parcurs de corp la a n-a urcare pe primul plan înclinat;

b) spațiul total parcurs de corp pînă la oprire;

c) timpul necesar primei coborîri pe distanța AC și timpul necesar pentru a n-a coborîre pe primul plan înclinat.

1.2.72. Pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala se găsește un corp cu masa $m_1 = 1$ kg, legat cu un fir inextensibil ce trece peste un scripete și are la celălalt capăt un corp cu masa $m_2 = 9$ kg, care atîrnă pe verticală. Sistemul astfel format este lăsat să pornească fără viteză inițială. Coeficientul de frecare a corpului cu masa m_1 pe planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Se cere să se calculeze:

a) spațiul parcurs de corpul cu masa m_1, în timpul $t = 2$ s de la pornirea sistemului, precum și viteza acestuia la momentul t;

b) tensiunea din fir;

c) limitele între care poate varia masa m_2 pentru ca sistemul să se afle în repaus;

d) distanța maximă parcursă de corpul cu masa m_1 pe planul înclinat, dacă la momentul $t = 2$ s, firul se taie.

1.2.73. Un cărucior cu masa $m = 10$ kg este tras, în sus, pe un plan înclinat. Unghiul α dintre planul înclinat și orizontală este variabil, iar coeficientul de frecare dintre cărucior și planul înclinat este $\mu = 1/\sqrt{3}$. Se cere să se calculeze:

a) unghiul $\alpha = \alpha_1$ pentru care forța de tracțiune, necesară pentru asigurarea unei mișcări uniforme, este egală cu greutatea căruciorului;

b) unghiul $\alpha = \alpha_2$ pentru care forța de tracțiune a căruciorului, uniform pe planul înclinat, este maximă și valoarea forței pentru $\alpha = \alpha_2$;

c) randamentul planului înclinat pentru $\alpha = \alpha_1$ și $\alpha = \alpha_2$.

1.2.74. Trei trenuri, A, B și C străbat aceeași distanță orizontală $MN = s$ în același timp, în felul următor: trenul A cu o mișcare uniformă avînd viteza v_0, trenul B cu o mișcare uniform accelerată cu accelerația a, iar trenul C cu o mișcare uniform întîrziată cu accelerația de frînare tot a.

Greutatea fiecărui tren se consideră G, iar forța de frecare F este aceeași, în cazul celor trei mișcări considerate. Cantitatea de combustibil consumat de locomotivă este proporțional cu lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune. Să se arate că:

a) viteza de plecare din M a trenului B este aceeași cu viteza de sosire în N a trenului C, iar viteza de plecare din M a trenului C este egală cu viteza de sosire în N a trenului B;

b) cele trei trenuri consumă cantități diferite de combustibil.

1.2.75. La momentul $t = 0$, se produce explozia unui corp care se află în repaus pe un plan orizontal, rezultînd două fragmente A și B, de mase m_1 și respectiv, m_2. Energia rezultată din explozie se presupune că se transformă integral în energia cinetică a celor două fragmente.

Fragmentul A se mișcă cu frecare—coeficientul de frecare fiind μ — pe un plan orizontal, cu viteza inițială v_1 căpătată în urma exploziei, iar după parcurgerea distanței s_1, lovește capătul liber al unei bare de cauciuc de lungime l și secțiune S. Bara este paralelă cu direcția de deplasare a fragmentului, iar capătul opus al barei este fix. În urma lovirii, bara se scurtează cu Δl metri.

Fragmentul B cu viteza inițială v_2, primită în urma exploziei, urcă imediat după explozie pe un plan înclinat cu unghiul α, dispus în continuarea planului orizontal. Mișcarea pe planul înclinat se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ. Se cere să se calculeze:

a) vitezele v_1 și v_2 ale celor două corpuri în momentul imediat după explozie;

b) energia E_{expl} rezultată din explozie;

c) distanța s_2 parcursă de fragmentul B pînă la oprirea acestuia. Mărimile α, m_1, m_2, μ, s_1, Δl, l, S și E (modulul de elasticitate al barei) se consideră cunoscute.

1.2.76. Un corp aflat la înălțimea H față de sol parcurge, în cădere liberă fără frecare cu aerul, o distanță h_1, după care își continuă mișcarea pe un plan înclinat spre baza acestuia. Se consideră că viteza inițială a corpului pe planul înclinat este egală cu viteza cu care corpul ajunge pe plan. După parcurgerea planului înclinat, corpul își continuă mișcarea pe un plan orizontal pe care se deplasează pînă la oprire, după parcurgerea distanței $s = 114{,}8$ m. Mișcarea pe planul înclinat cît și pe planul orizontal se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind același, $\mu = 0{,}4$.

După oprirea corpului, pe planul orizontal se produce o explozie care scindează corpul în două părți de mase m_1 și m_2, aflate în raportul $m_1/m_2 = 1/2$.

După explozie, cele două părți rezultate se deplasează cu frecare pe planul orizontal, în sensuri contrare. Energia degajată în explozie, $E = 86\,400$ J, se regăsește ca energie cinetică a celor două părți ale corpului. Se cere:

a) distanța h și durata t_0 a căderii libere;

b) viteza v cu care corpul ajunge la baza planului înclinat și înălțimea H;

c) vitezele v_1 și v_2 obținute de fragmente în momentul exploziei;

d) dependența de timp a distanței Δs dintre cele două fragmente.

Se dau:

— unghiul dintre planul înclinat și orizontală $\alpha = 30°$;

— masa corpului $m = 600$ kg;

— viteza cu care corpul atinge planul înclinat $v_0 = 29{,}4$ ms^{-1}.

1.2.77. Un scripete fără greutate este așezat în vîrful a două plane înclinate care formează cu orizontala unghiurile $\alpha = 30°$ și respectiv, $\beta = 45°$ (figura 1.131). Două corpuri A și B, de mase $m_1 = m_2 = 1$ kg, sînt legate de un fir ce trece peste scripete. Se cere:

a) accelerația sistemului și tensiunea în fir, dacă se neglijează frecările pe ambele plane înclinate;

b) accelerația sistemului și tensiunea în fir, dacă pe ambele plane înclinate, corpurile alunecă cu frecare, coeficientul de frecare fiind același, $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0{,}1$.

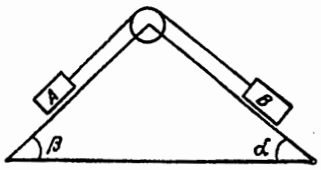


Fig. 1.131.

1.2.78. O motocicletă cu greutatea G pleacă de la baza unui plan înclinat ce face unghiul α cu orizontala, în sus pe plan. Plecarea se face din repaus, iar după parcurgerea distanței s, viteza motocicletei este v. Coeficientul de frecare este μ. Să se calculeze puterea medie dezvoltată de motorul motocicletei.

1.2.79. Două corpuri cu masele $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 1$ kg sînt atîrnate la capetele unui fir, considerat inițial inextensibil, care este trecut peste un scripete fix. La momentul inițial, cînd distanța dintre cele două corpuri este $l = 2$ m, sistemul se lasă liber. Să se calculeze:

a) timpul după care energia potențială a celor două corpuri are aceeași valoare. Se consideră că la momentul inițial, energia potențială a corpului cu masa m_1 este zero;

b) tensiunea din fir;

c) modulul de elasticitate al firului, dacă acesta avînd lungimea inițială $l_0 = 10$ m și secțiunea $S = 10^{-5}$ m^2 se alungește în timpul mișcării cu $\Delta l = 5$ mm.

1.2.80. Un elicopter se ridică vertical în sus cu accelerația $a = 1$ ms^{-2}. După intervalul de timp $\Delta t = 10$ s de la începutul urcării, din elicopter se lasă să cadă un pachet. Se cere să se calculeze timpul din momentul lansării pînă cînd pachetul atinge solul.

Frecările cu aerul se neglijează, iar accelerația gravitațională se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.81. Un cărucior cu patru roți avînd, împreună cu pasagerii, masa $m = 1\,500$ kg se deplasează pe un plan orizontal cu viteza $v = 36$ km/h. Să se calculeze:

a) forța minimă cu care fiecare sabot de frînare trebuie să apese asupra roții respective pentru a o bloca;

b) distanța parcursă prin alunecare cu roțile blocate, pînă la oprirea căruciorului;

c) puterea medie consumată prin frecare.

Coeficientul de frecare roată — șină este $\mu_2 = 0{,}1$, iar coeficientul de frecare roată — sabot este $\mu_1 = 0{,}15$. Accelerația gravitațională este $g \simeq 10\ ms^{-2}$.

1.2.82. Pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala este ridicat un corp, cu ajutorul unei forțe constante F care face unghiul $\beta = 45°$ cu planul înclinat (figura 1.132). Masa corpului este $m = 2$ kg, iar coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat este $\mu = 0{,}2$. Se cere să se calculeze valoarea forței F astfel încît corpul:

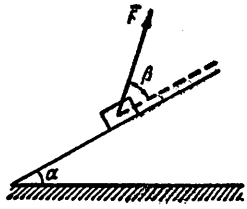


Fig. 1.132.

a) să urce uniform pe planul înclinat;

b) să coboare uniform pe planul înclinat;

c) să coboare uniform accelerat cu accelerația $a = 1\ ms^{-2}$.

1.2.83. Dintr-o fîntînă de adîncime $h = 12$ m se scoate apă cu ajutorul unui cablu cilindric de diametru $d = 1$ cm, de care este legată o găleată de volum $V = 10^{-2}\ m^3$. Cablul are masa $m = 1$ kg pe fiecare metru, iar greutatea găleții goale este $G = 20$ N. Fusul pe care se înfășoară cablul are diametrul $D_1 = 16$ cm. Pe același ax cu fusul se află o roată de diametru $D_2 = 1{,}6$ m, cu ajutorul căreia se învîrtește fusul. Se cere să se calculeze:

a) lucrul mecanic L necesar pentru a ridica găleata plină cu apă pe înălțimea h;

b) forța tangențială F_1 care trebuie aplicată tangențial la roată pentru a echilibra greutatea unei găleți pline, aflată la înălțimea $h_1 = 6$ m de la nivelul apei;

c) timpul în care un om ridică găleata plină cu apă, dacă omul dezvoltă puterea $P = 37{,}7$ W, iar 25% din lucrul mecanic efectuat se pierde prin frecări.

1.2.84. Două forțe de mărime egală cu $\sqrt{2}$ N, avînd direcții perpendiculare într-un plan orizontal, acționează asupra unui corp cu masa $m = 2{,}5$ kg, legat printr-un fir de lungime $l = 1{,}5$ m și secțiune $S = 1\ mm^2$ de un perete fix. La momentul $t = 0$, se taie firul, corpul deplasîndu-se orizontal sub acțiunea rezultantei forțelor pînă la momentul t_1, cînd acțiunea forțelor încetează, iar corpul începe să urce un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. La momentul t_1, energia cinetică a corpului este $E_c = 180$ J. Alungirea firului sub acțiunea rezultantei forțelor este $\Delta l = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm. Să se calculeze:

a) modulul de elasticitate al firului;

b) timpul t_1 la care se întrerupe acțiunea forțelor;

c) înălțimea h la care urcă corpul pe planul înclinat.

Se neglijează frecările, iar accelerația gravitațională $g \simeq 10\ ms^{-2}$.

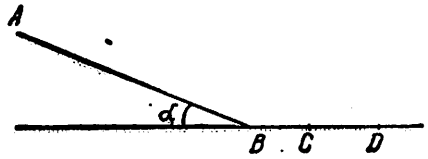


Fig. 1.133.

1.2.85. Un corp cu masa $m = 2$ kg pornește din punctul A în jos pe un plan înclinat (figura 1.133) cu unghiul $\alpha = 30°$, cu viteza inițială $v_0 = \sqrt{57}\ ms^{-1}$. Mișcarea corpului are loc fără frecare pe porțiunea $AB = a = 20$ m și continuă cu

frecare ($\mu = 0{,}102$) pe un plan orizontal, pe distanța $BC = b = 50$ m. În punctul C, corpul pătrunde într-un mediu rezistent, oprindu-se după ce a străbătut distanța $CD = c = 2{,}722$ m. Se cere:

a) viteza v_B cu care corpul ajunge în punctul B;

b) timpul t în care este parcursă distanța BC;

c) forța F ce acționează pe distanța CD;

d) să se analizeze cazul cînd viteza v_0 în punctul A ar fi fost orientată în sens invers pe planul înclinat.

1.2.86. Un automobil cu masa $m = 900$ kg pleacă din repaus, dintr-un punct A și parcurge în linie dreaptă distanța $l = ABCD$ în felul următor: pe distanța $l_1 = AB = 800$ m are o mișcare uniform accelerată atingînd în punctul B viteza $v = 90$ km/h, iar pe distanța $l_2 = BC$, pe care o parcurge în timpul $t_2 = 10$ minute, are o mișcare uniformă; pe distanța $l_3 = CD$ are o mișcare uniform încetinită astfel încît automobilul se oprește în punctul D. Distanța CD este parcursă în timpul $t_3 = 50$ secunde. Se cere:

a) timpul t_1 în care este parcursă distanța l_1 și accelerația a_1 pe această distanță;

b) accelerația de frînare a_3 pe distanța l_3;

c) distanța totală $l = AD$;

d) forța de frînare în mișcarea uniform încetinită pe distanța CD.

1.2.87. Un corp cu masa $m = 50$ grame este aruncat de jos în sus pe un plan înclinat, cu viteza inițială $v_0 = 40$ ms^{-1}. Coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}2$, iar înclinarea față de planul orizontal fiind $\alpha = 30°$, se cere să se calculeze:

a) timpul t_1 după care corpul ajunge din nou în punctul inițial;

b) viteza cu care corpul se întoarce în punctul inițial.

1.2.88. O locomotivă avînd viteza constantă v trece la momentul $t_0 = 0$ prin punctul A al unei căi ferate care descrie un arc de cerc $\widehat{AB} = 60°$. Pe o șosea rectilinie pornește din punctul A, la momentul $t_0 = 0$, un automobil care efectuează o mișcare uniform accelerată de-a lungul coardei AB, ajungînd în B la momentul $t = 3$ minute și 20 secunde. Accelerația automobilului este $a = 0{,}03$ ms^{-2}. Masa locomotivei este de 60 tone, iar forța centrifugă exercitată în centrul de greutate al locomotivei este $F = 40$ kN. Se cere să se stabilească:

a) viteza v a locomotivei;

b) intervalul de timp Δt la care automobilul sosește în B, după locomotivă.

1.2.89. Un pendul de lungime $l = 50$ cm este montat pe platforma unui vagon de cale ferată, care se deplasează uniform cu viteza $v_0 = 80$ km/h. În timpul frînării vagonului, pendulul face cu verticala unghiul $\alpha = 30°$. Masa pendulului este $m = 3 \cdot 10^{-2}$ kg. După oprirea vagonului, pendulul oscilează în jurul poziției de echilibru. Să se calculeze:

a) distanța parcursă de vagon pînă la oprire, din momentul în care se aplică frîna;

b) energia cinetică maximă în mișcarea de oscilație a pendulului;

c) perioada de oscilație a pendulului, considerînd oscilațiile izocrone.

1.2.90. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală se găsește un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg, la o distanță $s_1 = 32$ m de la marginea inferioară a planului. Plecînd din repaus, corpul alunecă pe planul înclinat cu frecare ($\mu_1 = 0{,}102$). De la baza planului înclinat, corpul își continuă mișcarea

pe un plan orizontal, alunecînd cu frecare ($\mu_1 = 0{,}204$) pe o distanță $s_2 = 39$ m, după care lovește capătul liber al unei bare de cauciuc a cărei axă este situată pe direcția de deplasare a corpului; celălalt capăt al barei este fix. Lungimea barei este $l_0 = 0{,}5$ m, secțiunea $S = 2$ cm^2, iar modulul de elasticitate al cauciucului este $E = 4 \cdot 10^6$ N/m^2. Să se calculeze:

a) viteza v_1 cu care corpul ajunge la baza planului înclinat și viteza v_2 după parcurgerea spațiului orizontal s_2;

b) scurtarea Δl a barei de cauciuc datorită lovirii acesteia de către corp.

1.2.91. Un om cu masa $M_1 = 80$ kg trece de la un capăt la altul al unei bărci de lungime $l = 5$ m. Barca se află pe o apă liniștită avînd viteza egală cu zero, la momentul cînd omul începe să se deplaseze. Datorită trecerii omului de la un capăt la altul al bărcii, aceasta se deplasează în sens contrar cu distanța $\Delta l = 2$ m. Să se calculeze greutatea bărcii.

1.2.92. Un om aflat într-o barcă trage spre el, cu ajutorul unui cablu, o altă barcă. Masa primei bărci împreună cu omul este $M_1 = 200$ kg, iar masa celei de-a doua bărci este $M_2 = 100$ kg. Forța de tracțiune din cablu este $F = 100$ N. Se neglijează forțele de frecare și se consideră că bărcile se află pe o apă liniștită. Se cere:

a) accelerațiile celor două bărci;

b) distanțele parcurse de cele două bărci în timpul $t = 5$ s.

1.2.93. Să se calculeze înălțimea h la care trebuie să fie ridicată șina exterioară a unei căi ferate față de cea interioară, la o curbă cu raza R pentru a se înlătura forța ce ar acționa spre exterior în cazul deplasării unui tren cu viteza v pe porțiunea curbei. Distanța dintre șine se consideră d.

1.2.94. Un automobil avînd viteza $v_1 = 54$ km/h începe să se deplaseze uniform accelerat și după parcurgerea distanței $l_1 = 500$ m pe un drum rectiliniu, intră într-o curbă cu viteza $v_2 = 72$ km/h, păstrîndu-și viteza constantă pe toată lungimea $l_2 = 600$ m a curbei, care este un arc de cerc cu unghiul la centru de 90°. Masa automobilului este $m = 2$ tone, iar coeficientul de frecare pe întregul drum este $\mu = 0{,}2$. Să se calculeze:

a) forța de tracțiune dezvoltată pe primii 500 m;

b) forța centrifugă dezvoltată la curbă;

c) timpul în care se parcurge întreaga distanță;

d) viteza v_l la care apare alunecarea laterală și viteza v_l la care automobilul se răstoarnă.

Distanța dintre roțile automobilului este $d = 1{,}5$ m, iar poziția centrului de greutate este la înălțimea $h = 0{,}8$ m.

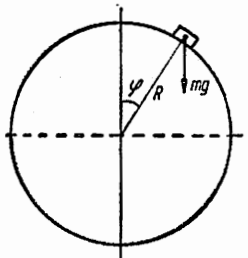


Fig. 1.134.

1.2.95. Un corp de masă m alunecă fără frecare pe o curbă circulară de rază R, așezată în plan vertical. Corpul pleacă din punctul de înălțime maximă $(h = 2R)$ al curbei.

Să se calculeze unghiul φ (figura 1.134) pentru care corpul se desprinde de pe cerc.

1.2.96. Un automobil se deplasează pe o șosea circulară de rază $R = 50$ m. Spațiul parcurs de automobil depinde de timp după legea:

$$s = 10 + 10\ t - 0{,}5\ t^2$$

unde s se măsoară în metri și t în secunde.

Să se calculeze, pentru momentul $t = 5$ s:
a) viteza automobilului;
b) accelerația tangențială, accelerația normală și accelerația totală.

1.2.97. Un fir inextensibil, de care este atîrnată o bilă de masă m, este deviat cu unghiul φ_0 de la verticală și apoi lăsat liber. Se cere să se calculeze:
a) tensiunea în fir în funcție de unghiul φ ($\varphi \leqslant \varphi_0$);
b) energia cinetică a bilei în funcție de unghiul φ.

1.2.98. Într-un vas care are forma unui trunchi de con se află o sferă de masă m. Diametrul părții inferioare a vasului se consideră d, iar pereții vasului sînt înclinați cu unghiul α față de verticală. Vasul se poate roti în jurul unei axe verticale, care este axa de simetrie a vasului. Se cere viteza unghiulară cu care trebuie să se rotească vasul pentru ca sfera, ce se află inițial pe fundul vasului, să poată ieși din vas.

1.2.99. Se cere să se calculeze:
a) viteza v necesară unui motociclist pentru a se menține perpendicular pe peretele vertical al unei camere cilindrice cu raza $R = 6$ m. Coeficientul de frecare de alunecare a roților pe perete este $\mu = 0{,}3$;
b) distanța parcursă pe un plan înclinat de un corp lansat cu viteza v, în sus pe plan. Coeficientul de frecare între corp și plan este $\mu = 0{,}3$, iar planul este înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală.

1.2.100. Un om cu greutatea G se află pe o platformă (figura 1.135) care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe, la distanța R de axa de rotație. Omul ridică un corp de greutate G_1, cu ajutorul unei frînghii ce trece peste un scripete fix. Coeficientul de frecare dintre picioarele omului și platformă este μ.

Să se stabilească între ce limite poate varia accelerația cu care omul ridică corpul de greutate G_1, pentru ca el să rămînă în repaus față de platformă.

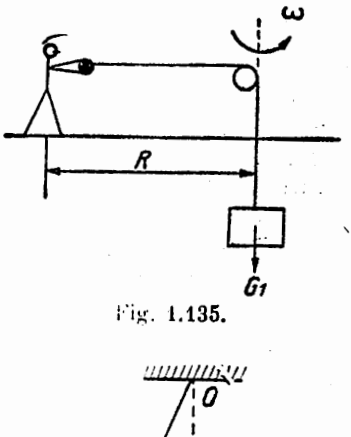


Fig. 1.135.

1.2.101. O sferă de masă m_1 se deplasează cu viteza v_{01}, iar sfera de masă m_2 se deplasează cu viteza v_{02} ($v_{02} < v_{01}$). Sferele se deplasează în același sens, ciocnindu-se central și perfect elastic. După ciocnire, sfera de masă m_1 are viteza v_1, iar sfera de masă m_2 are viteza v_2. Se cere:

a) să se exprime vitezele v_1 și v_2 în funcție de v_{01}, v_{02}, m_1 și m_2, arătîndu-se imposibilitatea egalității $v_1 = v_2$;

b) să se studieze cazul cînd $m_1 = m_2$.

1.2.102. Un corp P (figura 1.136) de dimensiuni neglijabile și masă $m = 2$ kg este suspendat de un fir de masă neglijabilă avînd lungimea $l = 40$ cm. Sistemului i se imprimă o mișcare de rotație uniformă, astfel încît corpul P descrie o traiectorie circulară în plan orizontal, cu o viteză unghiulară $\omega =$ $= 7$ rad/s.

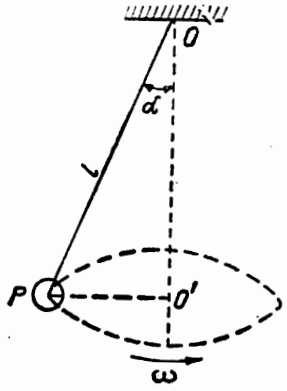


Fig. 1.136.

— Considerînd firul inextensibil, să se calculeze:

a) unghiul α dintre fir și verticală în timpul mișcării de rotație;

b) lucrul mecanic necesar pentru a aduce corpul P din starea de repaus în starea de mișcare considerată anterior.

— Dacă firul este extensibil, avînd secțiunea $S = 1$ mm^2, iar sub efectul greutății corpului P, alungirea firului este $\Delta l = 3{,}9210^{-5}$ m, să se calculeze:

c) modulul de elasticitate al materialului din care este confecționat firul și alungirea $\Delta l'$ a firului în timpul mișcării de rotație a corpului P.

1.2.103. Un autocamion cu masa $m = 3{,}6$ tone se deplasează pe o șosea orizontală, cu viteza $v = 30$ km/h. Coeficientul de frecare global este $\mu = 0{,}12$, iar randamentul global al autocamionului este $\eta = 0{,}4$. Să se calculeze:

a) lucrul mecanic efectuat de autocamion într-o oră și cantitatea de combustibil consumată în acest timp, dacă puterea calorifică a combustibilului este $q = 11\,000$ kcal/kg;

b) distanța parcursă de autocamion, fără frînare, după întreruperea alimentării cu combustibil și timpul în care este parcursă această distanță.

1.2.104. Un punct material cu masa $m = 0{,}5$ kg, legat cu un fir de lungime $l = 2$ m, descrie o mișcare circulară uniformă într-un plan orizontal. Să se calculeze:

a) perioada T, frecvența ν și energia cinetică E_c a punctului material, dacă forța centripetă este $F = 4$ N. În acest caz, să se scrie legea de mișcare a proiecției punctului material pe unul din diametrele cercului;

b) viteza unghiulară ω_r la care se produce ruperea firului, dacă acesta rezistă la o tensiune maximă $T_{max} = 9$ N;

c) dacă după ruperea firului, punctul material se deplasează rectiliniu, cu frecare ($\mu = 0{,}2$), pe un plan orizontal, se cere timpul cît durează această deplasare și distanța s parcursă pe planul orizontal.

Accelerația gravitațională se ia $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.105. Pe un șantier de construcții se utilizează un scripete mobil S_1 pentru manevrarea unor materiale, prin ridicare și coborîre, pe o înălțime $h = 20$ m, conform schiței din figura 1.137.

Corpul ridicat împreună cu containerul are masa $m_1 = 750$ kg, iar în coborîre, containerul rămas gol are masa $m_2 = 50$ kg. Se presupune că la coborîrea pînă la jumătate din înălțimea h, containerul are o mișcare uniform accelerată cu accelerația $g = 10$ ms^{-2}. Containerul este legat de scripetele mobil printr-un cablu de oțel care are modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11}$ Nm^{-2} și secțiunea $S = 0{,}5$ cm^2. Sistemul de scripeți este acționat de un motor. Se cere să se calculeze:

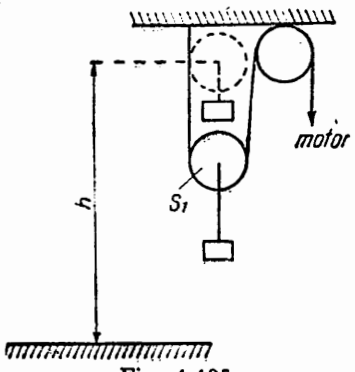


Fig. 1.137.

a) forța ce trebuie dezvoltată de motor cînd sarcina de masă m_1 este ridicată uniform și cînd aceasta este ridicată uniform accelerat cu accelerația $a = 2$ ms^{-2};

b) forța de frînare dezvoltată de motor pentru ca containerul de masă m_2 să coboare ultima jumătate din înălțimea h uniform încetinit, astfel încît să atingă solul cu viteza $v = 0$;

c) alungirea relativă a cablului cu care este legat containerul, la ridicarea uniformă și la ridicarea uniform accelerată a sarcinii de masă m_1;

d) lucrul mecanic efectuat de motor, la ridicarea uniformă și la ridicarea uniform accelerată a sarcinii de masă m_1;

e) timpul în care se ridică sarcina de masă m_1 în mișcarea uniformă, dacă puterea debitată de motor, în acest caz, este $P = 5$ kW.

1.2.106. Pentru curățirea unei fîntîni cu adîncimea totală $H = 10$ m și cu diametrul $D = 2$ m se scoate apa cu un vas de volum $V = 628$ l. Cablul de susținere se înfășoară pe tamburul unei roți dințate, care angrenează cu un șurub melc cu pasul $p = 31{,}4$ mm și turația $N = 1\,500$ rotații/minut. Roata dințată are $z = 40$ dinți, iar tamburul ei are raza $r = 16$ cm. Șurubul este pus în mișcare de un motor termic cu randamentul $\eta = 37\%$ printr-o curea de transmisie și o roată de rază $R' = 25$ cm fixată pe axa șurubului. Lucrul mecanic necesar pentru scoaterea apei este $L = 565\,200$ J.

Neținînd seama de greutatea vasului și a cablului, precum nici de frecări și de forța arhimedică, se cere:

a) adîncimea h a apei din fîntînă și numărul de vase care se scot pentru golirea ei;

b) viteza de ridicare a vasului;

c) forța de acționare la periferia roții de rază R' și puterea motorului;

d) timpul necesar pentru scoaterea apei și numărul de rotații efectuat de tambur în acest scop.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.107. Un vagon se deplasează cu frecare pe un plan orizontal. Cînd viteza de deplasare a vagonului scade la $v = 10$ ms^{-1}, de pe platforma acestuia se trage, în sens opus mișcării, un proiectil cu viteza $V = 1\,700$ ms^{-1} față de pămînt. Ca urmare a acestui lucru, vagonul își mărește viteza pînă la valoarea $v' = 29{,}77$ ms^{-1}. Pentru ca viteza vagonului să nu scadă sub valoarea v, va fi necesar să se tragă proiectile în mod periodic cu perioada $T = 30$ s. Să se determine:

a) raportul maselor primelor două proiectile și legea de variație a maselor proiectilelor trase succesiv;

b) coeficientul de frecare al vagonului și spațiul parcurs de vagon în timpul T.

1.2.108. O bilă cu masa $m = 100$ g se deplasează fără frecare pe un jgheab, reprezentat în figura 1.138, alcătuit dintr-o porțiune înclinată, continuată de o buclă verticală de rază $R = 15$ cm și apoi o porțiune orizontală. În poziția inițială, bila se află la înălțimea $h = 0{,}4$ m. Să se calculeze:

a) energia cinetică în punctele A și B ale buclei;

b) forțele cu care bila acționează asupra jgheabului în punctele A și B;

c) înălțimea minimă h de la care trebuie lăsată să cadă bila pentru ca aceasta să nu cadă cînd trece prin punctul B;

d) timpul după care viteza bilei se reduce la jumătate în mișcarea pe porțiunea orizontală, considerînd că viteza inițială a bilei pe această porțiune de drum este $v_0 = 3$ ms^{-1}, iar forța de frecare este $F = 0{,}15$ N;

e) distanța totală parcursă de bilă pe porțiunea orizontală.

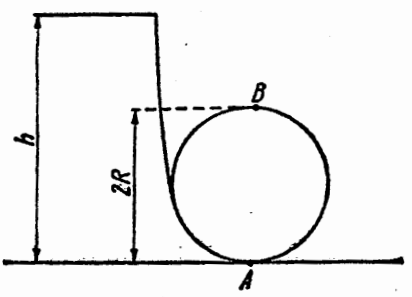


Fig. 1.138.

1.2.109. Două bile A și B, cu masele m_1 și respectiv m_2, sînt suspendate de cîte un fir de aceeași lungime l. Bila A este ridicată pînă la înălțimea h_1 (figura 1.139) față de poziția de echilibru și lăsată apoi liberă, lovește bila B aflată în repaus, care se ridică pînă la înălțimea h_2. În momentul ciocnirii, firul care susține bila A se rupe și bila A cade pe sol. Mărimile m_1, m_2, h_1, h_2, l și h se consideră cunoscute. Să se calculeze:

a) distanța d parcursă de bila A pe orizontală;

b) forța care produce ruperea firului.

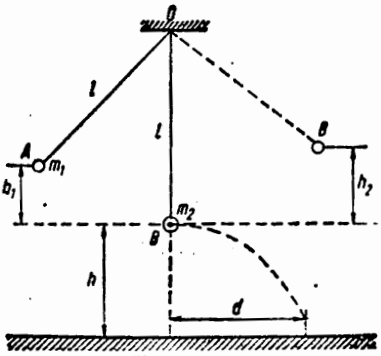


Fig. 1.139.

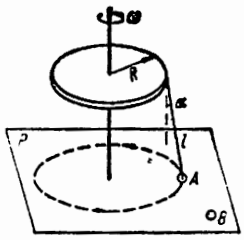


Fig. 1.140.

1.2.110. O sferă A de masă $M = 1$ kg este suspendată printr-un fir, de lungime $l = 2$ m, de marginea unui disc de rază $R = 1$ m ce se rotește în jurul axului vertical, cu viteza unghiulară ω. În planul orizontal P (figura 1.140) în care se efectuează mișcarea sferei A, se află în repaus o bilă B cu masa $m = 200$ g. Se cere:

a) dependența unghiului α de parametrii R, l și ω;

b) viteza unghiulară pentru $\alpha = 45°$;

c) distanța parcursă de bila B lovită central de sfera A în momentul ruperii firului, cînd sfera A se rotea cu viteza unghiulară $\omega = 2$ rad/s. Se știe că viteza sferei A se reduce la jumătate în urma ciocnirii, iar coeficientul de frecare a bilei B pe planul orizontal este $\mu = 0{,}3$.

1.2.111. O sferă elastică de masă $m = 10^{-2}$ kg este lăsată să cadă liber deasupra unui disc metalic orizontal. Inițial, discul se află în repaus. Neglijînd frecările și durata contactului sferei cu planul discului și știind că după ciocnirea cu discul, sfera se ridică pe verticală cu o viteză egală cu fracțiunea $k = 3/4$ din viteza avută înaintea ciocnirii, iar energia sferei la punctul cel mai înalt pe care-l poate atinge în urma ciocnirii este $E = 6{,}615$ J, să se calculeze:

a) înălțimea h de la care cade sfera;

b) spațiul parcurs de sferă după trei ciocniri succesive și să se scrie legea de variație a înălțimii maxime la care se poate ridica sfera, în urma ciocnirilor succesive.

Dacă se consideră că ciocnirea sferei cu discul este perfect elastică, iar discul se rotește cu viteza unghiulară ω, să se calculeze:

c) ω, astfel încît sfera să cadă în același punct M al discului.

1.2.112. Știind că Pămîntul se rotește în jurul Soarelui, cu perioada $T = 365$ zile, aproximativ pe un cerc cu raza $R = 150 \cdot 10^6$ km și că diametrul solar se vede de pe Pămînt sub unghiul $2\alpha = 32'$, să se calculeze:

a) masa specifică medie a Soarelui;
b) masa M_s a Soarelui;
c) raza R_s a Soarelui, considerat sferic.

1.2.113. Pe o platformă de cale ferată de masă $M_1 = 16$ tone este aşezat un tun de masă $M_2 = 3$ tone. Ţeava tunului este orientată paralel cu calea ferată, făcînd un unghi $\alpha = 60°$ cu planul orizontal. Masa proiectilului este $m = 50$ kg.

Să se calculeze viteza proiectilului, dacă din momentul tragerii, platforma se deplasează pe spaţiul $s = 3$ m, în timpul $t = 6$ s.

1.2.114. Un corp de masă $M = 0{,}5$ kg, fixat la extremitatea unei bare de masă neglijabilă şi lungime $l = 0{,}5$ m, se roteşte uniform. Să se calculeze:

a) forţa centrifugă care acţionează asupra corpului cînd bara face unghiul $\alpha = 45°$ cu verticala;

b) energia cinetică a barei în mişcare.

1.2.115. Un jgheab de lemn este format dintr-un plan înclinat MN, o buclă NPN în plan vertical, o porţiune orizontală NR şi un plan înclinat RS (figura 1.141). Pe porţiunea dintre MN şi buclă se neglijează frecările, iar pe porţiunile NR şi RS, coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}125$. Se cunosc: unghiul dintre planul RS şi orizontală $\alpha = 30°$, raza buclei $r = 20$ cm, distanţa $NR = 2$ m. Să se calculeze:

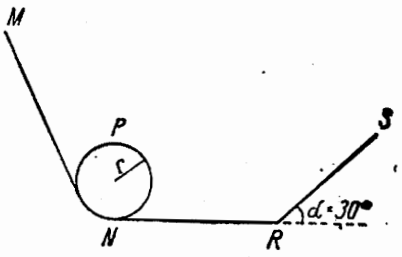


Fig. 1.141.

a) înălţimea minimă pe planul MN de la care trebuie lăsat corpul, pentru ca acesta să poată străbate bucla;

b) spaţiul s_1 pe care mobilul îl parcurge pe planul înclinat RS;

c) timpul t_2 în care corpul străbate distanţa s_1 pe planul înclinat RS la coborîre;

d) înălţimea h_1 la care urcă mobilul pe buclă cînd coboară de pe planul RS.

1.2.116. Un corp de masă m este agăţat de capătul unui fir inextensibil, de lungime l. Punctul de care se fixează celălalt capăt al firului se deplasează faţă de pămînt cu acceleraţia a ce face unghiul α cu direcţia orizontală. Să se calculeze:

a) unghiul β pe care-l face firul cu verticala;

b) forţa T cu care corpul acţionează asupra firului.

1.2.117. Pămîntul se consideră o sferă de rază $R = 6\,400$ km, care efectuează în timpul $T = 24$ h o rotaţie completă în jurul axei sale.

Să se calculeze viteza liniară a punctelor de pe suprafaţa Pămîntului:

a) la ecuator; b) la latitudinea $\varphi = 60°$ şi c) la pol.

1.2.118. Un cilindru ce se poate roti în jurul axei sale, aflată în poziţie orizontală, se înfăşoară cu un fir de capătul căruia se leagă o bilă de masă $m = 2$ kg. Lăsată să se deplaseze uniform accelerat pe verticală în jos, sfera parcurge distanţa $d = 1{,}5$ m în timpul $t = 3$ s. Raza cilindrului este $R = 4$cm. Să se calculeze:

a) acceleraţia unghiulară a cilindrului;

b) viteza unghiulară după timpul $t = 3$ s;

c) acceleraţia normală a punctelor de pe suprafaţa cilindrului la momentul t;

d) energia cinetică a sferei la momentul t.

1.2.119. Un disc se roteşte în jurul axei sale efectuînd 955 rotaţii/minut. Rotaţia uniformă a discului este asigurată de o acţiune exterioară. La 10 s de la încetarea acţiunii exterioare, discul se opreşte, după efectuarea unei mişcări de rotaţie uniform încetinite. Să se calculeze:

a) viteza unghiulară a discului în momentul încetării acţiunii exterioare;

b) acceleraţia unghiulară a discului şi numărul de rotaţii efectuate pînă la oprire.

1.2.120. Un proiectil lansat sub unghiul α cu orizontala explodează în punctul cel mai înalt al traiectoriei sale, la înălţimea $h_{max} = 20$ m. În urma exploziei, proiectilul se despică în două părţi egale ca masă. După timpul $t_1 = 1$ s de la explozie, una dintre părţi cade pe pămînt, pe verticala locului unde s-a produs explozia, la distanţa $d_1 = 1$ km de locul de tragere. Să se calculeze:

a) unghiul α sub care s-a efectuat tragerea şi componentele v_{0x} şi v_{0y} ale vitezei iniţiale a proiectilului;

b) înălţimea maximă la care s-a ridicat cea de-a doua jumătate a proiectilului;

c) distanţa d_2 de la locul tragerii, la care va cădea a doua parte a proiectilului.

Se neglijează rezistenţa aerului şi se consideră acceleraţia gravitaţională $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.121. O macara, al cărei scripete se află la înălţimea $h_0 = 36$ m de sol, ridică de la sol o piesă pînă la o înălţime h, ceea ce necesită un lucru mecanic $L = 58{,}8$ kJ. Acest lucru mecanic este produs de o maşină termică cu sursa caldă la temperatura $t_1 = 207$°C şi cu sursa rece la temperatura $t_2 = 87$°C. După oprire, la înălţimea h, piesa efectuează mici oscilaţii cu o perioadă $T = 8$ s. Se cere:

a) înălţimea h pînă la care a fost ridicată piesa;

b) tensiunea în fir în timpul ridicării piesei, dacă ridicarea se efectuează uniform accelerat în timpul $t = 4$ s;

c) viteza cu care piesa atinge fundul unui bazin cu apă, de adîncime $s = 9$ m, dacă piesa cade liber de la înălţimea h, iar densitatea piesei este de trei ori mai mare decît densitatea apei din bazin;

d) căldura Q_1 preluată de la sursa caldă şi căldura Q_2 cedată sursei reci, dacă randamentul maşinii termice este jumătate din randamentul unei maşini termice ideale, care ar funcţiona după un ciclu Carnot între temperaturile t_1 şi t_2.

1.2.122. Un pendul matematic este alcătuit dintr-un fir de oţel avînd lungimea $l_0 = 1$ m la temperatura de 0°C şi dintr-o bilă metalică de masă $m = 1$ kg. În poziţia iniţială, firul face un unghi $\varphi_0 = \pi/4$ cu verticala. Se cere:

a) viteza tangenţială v_0 ce trebuie imprimată bilei, astfel încît amplitudinea unghiulară a oscilaţiei să fie $\varphi_{max} = \frac{\pi}{3}$ radiani;

b) forţele de întindere a firului în poziţiile în care firul face cu verticala unghiurile $\varphi_1 = \varphi_{max}$ şi $\varphi_2 = 0$, pendulul fiind în regim de oscilaţie;

c) coeficientul de dilatare liniară a firului, dacă perioada oscilațiilor mici ale pendulului la temperatura de 100°C este cu 0,055% mai mare decît la temperatura de 0°C;

d) masa m' pe care trebuie să o aibă bila pentru ca sub acțiunea greutății ei, pendulul aflîndu-se în repaus, deformarea elastică a firului, considerat extensibil, să fie la 0°C egală cu dilatația liniară a firului încălzit pînă la temperatura de 100°C. Secțiunea firului este $S = 1\ mm^2$, iar modulul de elasticitate al oțelului $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}\ Nm^{-2}$.

1.2.123. Un ciclist deplasîndu-se cu viteza v efectuează un viraj orizontal de rază R. Se cere:

a) să se exprime forța centrifugă ce acționează asupra ciclistului, dacă sistemul ciclist-bicicletă se asimilează cu un punct material de masă m;

b) viteza maximă ce poate fi atinsă de ciclist în viraj pe o pistă, fără să derapeze, dacă frecările între sol și roți exercită o forță tangențială $f = 200N$. Se consideră $m = 100$ kg, raza medie a pistei $R = 10$ m, iar lărgimea pistei $l = 5$ m.

Se va lua $g \simeq 10\ ms^{-2}$.

1.2.124. Un corp de masă m este lansat în sus, pe verticală, într-un cîmp gravitațional uniform, de intensitate — g.

a) Să se găsească relația dintre altitudinea h_0 atinsă de corp și viteza sa inițială v_0.

b) Se consideră cîmpul creat de Pămînt, presupus omogen și sferic de rază R. La suprafața solului, intensitatea cîmpului este g. Să se afle relația dintre altitudinea h_1 și viteza v_0 a corpului. Să se arate că dacă h_1 este mic față de R, se regăsește relația obținută la punctul a).

c) Viteza v_0 se imprimă aplicînd corpului de masă m o forță constantă f, vertical în sus. Se cere, în acest caz, relația dintre forța f, viteza inițială v_0, durata acțiunii forței și drumul parcurs de corp în timpul t.

1.2.125. Două sfere mici, de mase $m_1 = 100$ g și $m_2 = 50$ g, sînt fixate la capătul unor fire, considerate inextensibile, cu lungimile $l_1 = 28$ cm și $l_2 = 30$ cm. Celelalte capete ale firelor sînt legate de o a treia sferă, care este pusă în rotație în jurul unui ax vertical (fig. 1. 142). Se cere să se calculeze:

a) frecvența de rotație pentru ca firul de care este legată cea de-a treia sferă să rămînă vertical;

b) vitezele v_1 și v_2 ale celor două sfere, în cazul punctului a) și diferența de nivel între cele două sfere;

c) energia necesară pentru punerea în mișcarea celor două sfere.

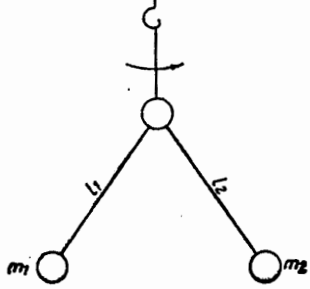


Fig. 1.142.

1.2.126. Două mobile de mase m_1 și m_2 descriu mișcări circulare uniforme pe două traiectorii situate, una în plan orizontal și cealaltă în plan vertical. Razele celor două traiectorii circulare sînt $R_1 = R_2 = R = 1$ m, iar vitezele unghiulare ale celor două corpuri sînt $\omega_1 = 3{,}435\ rad \cdot s^{-1}$ și respectiv

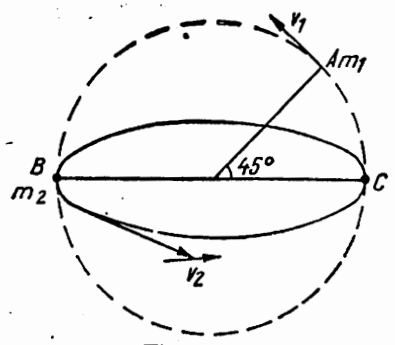


Fig. 1.143.

$\omega_2 = 3{,}141$ rad·s^{-1}. Mobilele pleacă simultan din punctele A și B, indicate în figura 1.143. Să se calculeze:

a) timpul după care cele două mobile se ciocnesc, specificîndu-se punctul de ciocnire;

b) căldura produsă prin ciocnirea plastică a celor două mobile (se consideră $m_1 = 0{,}5$ kg și $m_2 = 1$ kg);

c) viteza corpului format prin ciocnirea plastică și unghiul dintre această viteză și viteza primului corp în momentul ciocnirii.

1.2.127. Un automobil trece peste un pod convex cu viteza $v = 72$ km/h. La ieșirea de pe pod intră, cu frecare, într-o curbă cu raza $R = 100$ m. Coeficientul de frecare de alunecare laterală pe șosea este $\mu = 0{,}5$. Distanța dintre roțile automobilului este $d = 1{,}5$ m, iar înălțimea centrului său de greutate față de șosea este $h = 0{,}4$ m. Să se calculeze:

a) raza de curbură a podului, astfel ca la mijlocul acestuia, automobilul să apese cu 4/5 din greutatea acestuia;

b) viteza v_1 la care apare alunecarea laterală a automobilului și viteza v_2 la care se poate produce rostogolirea lui.

1.2.128. Un proiectil este lansat sub unghiul α cu orizontala pe un plan înclinat cu unghiul β față de orizontală. Să se determine unghiul α în funcție de unghiul β (considerat fix), astfel încît bătaia de-a lungul planului înclinat să fie maximă.

1.2.129. O mașină cu masa m se deplasează pe un pod, într-o mișcare uniformă, cu viteza v. Să se calculeze forța cu care apasă mașina asupra podului, dacă podul este: a) orizontal; b) arcuit convex; c) arcuit concav.

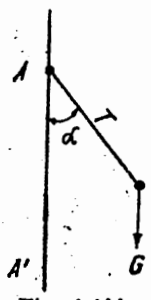


Fig. 1.144.

1.2.130. O sferă de masă $M = 1$ kg, de dimensiuni neglijabile, este fixată la extremitatea unei tije T de masă neglijabilă (figura 1.144), articulată în partea superioară de axul vertical AA' căruia i se imprimă o mișcare de rotație uniformă. Lungimea tijei T este $l = 1$ m. Să se calculeze:

a) viteza de rotație ω a sistemului astfel ca tija să facă unghiul $\alpha = 30°$ cu axul AA';

b) energia cinetică a sferei pentru $\alpha = 30°$ și energia totală ce trebuie cedată sistemului, aflat inițial în repaus, pentru a i se imprima mișcarea respectivă.

1.2.131. O sferă de masă m este suspendată de un fir de lungime l. Firul este deviat cu un unghi α de la poziția de echilibru și din această poziție, sistemul este lăsat liber. Firul se rupe cînd tensiunea T este egală cu 2,5 mg. Se cere să se calculeze:

a) valoarea minimă a unghiului α pentru ca firul să se rupă în momentul trecerii prin poziția de echilibru;

b) unghiul β pe care-l face firul cu verticala în momentul ruperii, dacă inițial firul face unghiul $\alpha_0 = 90°$ cu verticala.

1.2.132. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg este legat printr-un fir inextensibil, un capăt al firului fiind fixat în punctul O (fig. 1.147). Corpul este ţinut într-o astfel de poziţie ca firul să facă unghiul $\alpha = 30°$ cu verticala. Să se calculeze:

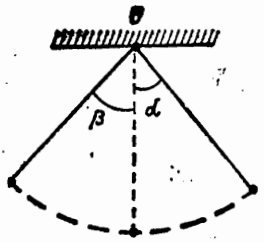


Fig. 1.147.

a) forţa de întindere a firului cînd corpul fiind în repaus, firul face unghiul α cu verticala;

b) forţa care tinde să readucă corpul în poziţie de echilibru;

c) forţa de întindere a firului cînd corpul, lăsat liber, trece prin poziţia de echilibru;

d) viteza trangenţială v_0 care trebuie imprimată corpului pentru ca, trecînd prin poziţia de echilibru, să-şi continue drumul în partea opusă pînă face unghiul $\beta = 60°$ cu verticala.

1.2.133. Un vagon cu masa m_1 se deplasează pe un traseu orizontal, pornind cu viteza v_0. După intervalul de timp t_1 de la pornire, vagonul de masă m_1 ciocneşte un al doilea vagon cu masa m_2, care se află în repaus. Vagoanele îşi continuă drumul, împreună, pînă la oprire. În tot timpul mişcării, coeficientul de frecare este μ pentru ambele vagoane. Să se calculeze:

a) spaţiul parcurs de primul vagon pînă la ciocnire şi viteza lui în momentul ciocnirii;

b) viteza celor două vagoane după ciocnire şi spaţiul parcurs de acestea pînă la oprire.

1.2.134. O bilă de masă $m = 0{,}2$ kg este suspendată printr-un fir de lungime $l = 1$ m şi secţiune $S = 0{,}2$ mm^2. Bilei i se imprimă o mişcare de rotaţie, astfel încît firul descrie un con, făcînd cu verticala un unghi $\alpha = 30°$. Să se calculeze:

a) numărul de rotaţii executate de bilă în timp de un minut;

b) alungirea firului, dacă acesta este extensibil avînd modulul de elasticitate $E = 10^{11}$ Nm^{-2};

c) tensiunea maximă suportată de fir, dacă acesta se rupe cînd bila efectuează 60 de rotaţii pe minut.

1.2.135. Un punct material execută 150 de oscilaţii pe minut, cu o amplitudine $A = 0{,}05$ m. Să se calculeze:

a) frecvenţa şi pulsaţia oscilaţiilor;

b) viteza şi acceleraţia maximă a punctului material, scriindu-se ecuaţia mişcării oscilatorii, dacă faza iniţială $\varphi_0 = 15°$;

c) raportul dintre energia cinetică şi energia potenţială a punctului material, în momentul în care elongaţia este jumătate din amplitudine.

1.2.136. Un oscilator constituit dintr-un punct material cu masa $m = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ kg, atîrnat la capătul unui resort, vibrează sub acţiunea forţei elastice a resortului, conform ecuaţiei:

$$y = 10^{-1} \sin \left(\frac{\pi}{8} t + \frac{\pi}{8} \right) \text{m}.$$

Se cere:

a) perioada şi frecvenţa oscilaţiei;

b) viteza maximă şi acceleraţia maximă a punctului material;

c) valoarea maximă a forţei care acţionează asupra punctului material;

d) relaţiile care exprimă dependenţa de timp a energiei cinetice, potenţiale şi totale a punctului material;

e) timpul în care punctul material efectuează drumul de la jumătatea amplitudinii la $\sqrt{3}/2$ din amplitudine.

1.2.137. Un corp de masă $m = 8$ kg, suspendat de un arc, oscilează rectiliniu în jurul punctului de echilibru. Arcul se întinde cu 0,2 m sub acţiunea unei forţe $F = 98$ N. Să se calculeze:

a) perioada oscilaţiei corpului de masă m, precum şi frecvenţa şi pulsaţia oscilaţiei;

b) amplitudinea oscilaţiilor, în absenţa amortizărilor;

c) energia totală, de oscilaţie, a corpului suspendat;

d) viteza corpului în punctul în care acesta ar fi în echilibru, în absenţa oscilaţiei şi în punctul în care elongaţia este maximă.

1.2.138. Un pendul simplu de lungime $l = 1{,}18$ m, cu masa $m = 0{,}5$ kg, primeşte un impuls orizontal $H = 1{,}7$ kg ms^{-1} în momentul cînd acesta se află în poziţia de echilibru. În urma acţiunii impulsului H, pendulul începe să oscileze. Să se calculeze:

a) energia primită iniţial de corpul cu masa m şi unghiul maxim făcut de fir cu verticala;

b) forţa de întindere cînd pendulul trece din nou prin poziţia de echilibru;

c) variaţia temperaturii mediului, dacă frecvenţa de oscilaţie a pendulului variază cu 0,05%, firul fiind din cupru şi avînd coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.

1.2.139. Un punct material de masă $m = 25$ g execută oscilaţii armonice cu amplitudinea $A = 0{,}12$ m. Ştiind că în momentul în care punctul material trece prin poziţia de echilibru, viteza lui este $v_0 = 9{,}6$ ms^{-1}, se cere:

a) ecuaţia mişcării oscilatorii;

b) elongaţia y_1 la momentul cînd $t_1 = \frac{7}{6} T$ şi elongaţia y_2 la momentul cînd viteza oscilatorului este un sfert din v_0;

c) frecvenţa ν şi perioada T a oscilaţiei;

d) valoarea maximă a forţei elastice, F_{max}.

1.2.140. Un pendul matematic este format dintr-un fir de lungime $l = 49$ m şi un corp punctiform cu masa $m = 6$ kg. Se imprimă pendulului o mişcare oscilatorie în jurul poziţiei de echilibru. Să se calculeze:

a) perioada micilor oscilaţii ale pendulului;

b) unghiul maxim pe care-l poate face pendulul cu poziţia de echilibru, fără ca firul să se rupă. Firul se rupe dacă la capătul acestuia, aflat în poziţie verticală, se atîrnă un corp cu masa $m' = 12$ kg;

c) energia cinetică maximă a pendulului în momentul cînd trece prin poziţia de echilibru, în cazul punctului b).

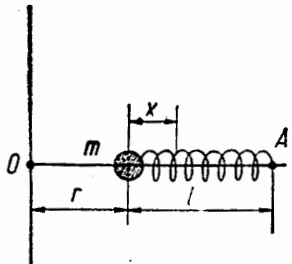


Fig. 1.148.

1.2.141. O tijă rigidă OA (figura 1.148) se poate roti în jurul unei axe verticale. Un corp de masă m alunecă fără frecare pe tija orizontală OA. Corpul de masă $m = 20$ g este fixat printr-un resort ce are cealaltă extremitate fixată în punctul A. Cînd sistemul se află în repaus, $r = 2$ cm şi $l = 10$ cm.

Resortul este astfel construit încît acesta se alungește cu $\Delta l = 1$ cm, dacă de el se suspendă un corp cu masa $M = 1$ kg. Se cere:

a) relația dintre numărul n de rotații pe minut a sistemului și deplasarea x a corpului de masă m. Să se calculeze n pentru $x = 1$ m și pentru $x = 1$ cm;

b) raportul $\Delta n/n$ în funcție de Δx și x, unde Δn este variația numărului de rotații pe minut cînd corpul se deplasează de la distanța x la distanța $x + \Delta x$. Să se calculeze Δn pentru $\Delta x = 0{,}2$ mm și $x = 1$ mm, $x = 1$ cm;

c) raportul $\Delta n/n$, dacă corpul alunecă pe tijă cu frecare ($\mu = 0{,}1$).

1.2.142. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg este așezat pe un plan orizontal și legat de un suport vertical prin intermediul unui resort cu coeficientul de elasticitate $k = 20$ N $\cdot$ m^{-1}. Coeficientul de frecare dintre corp și planul orizontal este $\mu = 0{,}15$. În poziția inițială, cînd arcul este netensionat, se imprimă corpului o viteză $v_0 = 3$ ms^{-1} în sensul alungirii arcului. Se cere să se calculeze:

a) distanța x pînă la care se depărtează corpul de poziția de echilibru;

b) frecvența de oscilație;

c) spațiul total parcurs de corp pînă la oprire.

1.2.143. Un corp cu masa $m = 10$ g oscilează în jurul poziției de echilibru, avînd elongația dată de ecuația:

$$y = 0{,}4 \sin 2\pi(5t + 1/6) \text{ m}.$$

Cînd trece prin punctul de elongație minimă, oscilatorul lovește o bilă de masă $m_1 = 5$ g, transferîndu-i întreaga sa energie. În urma acestei ciocniri, bila capătă o viteză orientată pe verticală în sus: Se cere:

a) amplitudinea, perioada și faza inițială a oscilației;

b) viteza oscilatorului după timpul $t_1 = 0{,}05$ s de la începutul oscilației;

c) înălțimea la care se va ridica bila de masă m_1, în urma ciocnirii.

1.2.144. Un camion cu masa $m = 10$ t se deplasează pe o șosea orizontală, cu viteza $v = 10$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) energia consumată pentru atingerea acestei viteze, considerînd $v_0 = 0$ și frecările neglijabile;

b) puterea motorului ca viteza camionului să rămînă constantă, dacă forța de frecare este $F_f = 100$ N pentru fiecare tonă;

c) consumul de combustibil pe oră, în condițiile de la punctul b), dacă motorul are randamentul $\eta = 60\%$ și folosește un combustibil cu puterea calorică $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ J/kg;

d) de cîte ori trebuie mărită puterea motorului pentru ca urcînd o pantă cu înclinarea 5/100, viteza camionului să rămînă tot $v = 10$ ms^{-1}? Pe pantă, se consideră coeficientul de frecare rezultat la punctul b).

1.2.145. Între două stații, distanța este de 20 km și avînd o diferență de nivel de 76 m, calea ferată prezintă o pantă regulată. Timpul necesar unui tren pentru a parcurge această distanță este de 40 minute. Garnitura este compusă dintr-o locomotivă de 8 tone, 3 vagoane de 35 tone fiecare și un vagon poștal de 15 tone.

A. Neglijîndu-se forțele de frecare, se cere:

a) forța de tracțiune exercitată de locomotivă;

b) lucrul mecanic total efectuat și puterea dezvoltată de locomotivă.

B. Forța de frecare fiind 1/100 din greutatea tractată, să se calculeze elementele cerute la punctul A.

1.2.146. De la marginea superioară a unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală se dă drumul simultan la două corpuri: unul în lungul planului, iar celălalt pe verticală. Cînd corpul de pe verticală a străbătut jumătate din înălțimea h a planului înclinat, celălalt corp pătrunde într-o zonă în care coeficientul de frecare este μ. Zona în care coeficientul de frecare este μ ține pînă la baza planului înclinat și se continuă pe planul orizontal. Să se calculeze:

a) timpul în care corpul ce coboară pe planul înclinat ajunge la baza acestuia;

b) viteza corpului după ce a parcurs distanța d pe planul orizontal și timpul total în care corpul se deplasează pe orizontală.

Mărimile h, α, μ și d se consideră cunoscute.

1.2.147. După parcurgerea în mișcare uniform accelerată a unei porțiuni de 250 m de cale ferată rectilinie și orizontală, o drezină de 10 tone intră într-o curbă, cu viteza $v_1 = 72$ km/h și iese din curbă cu viteza $v_2 = 43{,}2$ km/h. Viteza inițială a drezinei este $v_0 = 54$ km/h. Curba reprezintă un sfert de cerc cu raza $R = 500$ m, iar coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}025$. Se cere:

a) forțele de tracțiune dezvoltate de motorul drezinei pe cele două trasee;

b) forțele orizontale care apasă pe șine la intrarea și la ieșirea din curbă;

c) timpul de parcurgere a celor două trasee de cale ferată.

Se consideră $g \simeq 10$ ms^{-2}.

1.2.148. Un vas plin cu apă este suspendat de un fir cu lungimea $l = 1{,}5$ m. Se imprimă sistemului o mișcare de rotație în planul vertical. Masa vasului și a apei este $M = 3$ kg. Se cere să se calculeze:

a) numărul de rotații pe secundă necesare pentru ca apa să nu cadă din vas;

b) tensiunea maximă suportată de fir, dacă se efectuează două rotații pe secundă;

c) frecvența de rotație, astfel încît în punctul cel mai de sus al traiectoriei, vasul să fie în stare de imponderabilitate.

1.2.149. O locomotivă de 100 tone trage patru vagoane de cîte 50 tone fiecare.

a) Plecînd din repaus, locomotiva atinge viteza $v_1 = 36$ km/h în timpul $t = 10$ secunde. Să se calculeze forța totală de tracțiune exercitată de locomotivă și forța cu care locomotiva trage trenul format din cele patru vagoane.

b) Atingînd viteza v_1, trenul începe să urce pe o pantă ascendentă, ridicîndu-se cu 2 m pe un parcurs de 100 m. În 20 de secunde de mișcare pe pantă, uniform accelerat, locomotiva atinge viteza $v_2 = 72$ km/h. Să se calculeze accelerația, spațiul parcurs și lucrul mecanic efectuat de locomotivă, în timpul de 20 de secunde.

c) Puterea maximă a locomotivei fiind 4 500 kW, care este timpul minim în care trenul ar putea atinge viteza de 120 km/h? Cu ce viteză maximă ar putea urca o pantă cu înclinarea de 3‰?

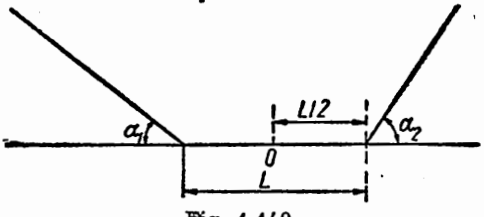


Fig. 1.149.

1.2.150. Se consideră un spațiu plan, orizontal, de lungime L, care separă bazele a două plane înclinate cu unghiurile α_1 și α_2 față de orizontală (figura 1.149). În punctul O aflat la mijlocul distanței L, se află în repaus două corpuri punctiforme A și B, cu masele m_1 și m_2, alipite

între ele. Masele sînt puse în mișcare prin explozia unui corp de masă M și se deplasează pe aceeași dreaptă, în sensuri opuse. Întreaga energie de explozie a corpului de masă M este preluată de corpurile cu masele m_1 și m_2, iar puterea specifică de explozie este q. Corpurile A și B se deplasează cu frecare (coeficientul de frecare este μ), atît pe planul orizontal cît și pe planele înclinate.

Să se calculeze vitezele cu care corpurile A și B revin în punctul O.

1.2.151. Două bile cu masele m_1 și m_2 sînt suspendate liber de două fire de lungimi l_1 și l_2, astfel încît bilele vin în contact. Bila A se deplasează în planul firelor, de la poziția inițială, cu unghiul α (figura 1.150), apoi este lăsată liberă. Se produce o ciocnire elastică a bilelor. Să se calculeze:

a) unghiurile α_1 și α_2 cu care vor devia firele față de verticală, după prima ciocnire. Unghiurile se consideră mici;

b) energiile bilelor după prima ciocnire.

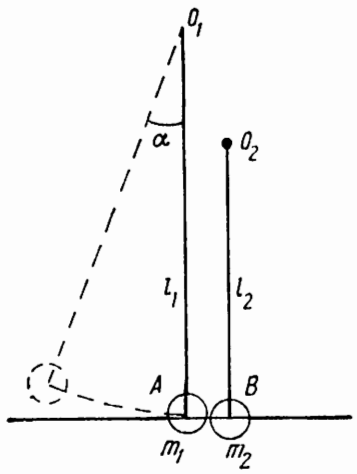


Fig. 1.150.

1.2.152. Un ascensor ce se află în mișcare verticală, mai întîi cu accelerația ascendentă $a = 2\ \text{ms}^{-2}$ și apoi cu accelerația descendentă $a_1 = 3\ \text{ms}^{-2}$, conține 7 lăzi identice, așezate una peste alta și avînd fiecare greutatea $G = 100$ N. Coeficientul de frecare între lăzi este μ, iar coeficientul de frecare între ultima ladă și podeaua ascensorului este μ'. Se cere să se calculeze:

a) forța de apăsare a primei lăzi pe a doua, a celor două pe cea de-a treia etc., pentru valorile a și a_1 ale accelerațiilor;

b) forța orizontală necesară pentru deplasarea laterală a întregului lot de lăzi, în cele două cazuri;

c) condițiile de realizare a deplasării orizontale, dacă forța este aplicată, orizontal, în mijlocul lăzii a 6-a.

1.2.153. Un proiectil este lansat dintr-un tun, sub unghiul α cu orizontala. Să se calculeze:

a) viteza inițială de lansare a proiectilului, dacă se ține seama de recul. Se neglijează rezistența aerului și se presupune că recul este numai orizontal;

b) de cîte ori se micșorează bătaia, datorită reculului;

c) viteza imprimată instalației de lansare, datorită reculului.

Se dă: M — masa instalației de lansare;

v_0 — viteza inițială a proiectilului, dacă nu se ține seama de recul;

m — masa proiectilului.

1.2.154. O bilă de masă m_1, care se deplasează cu viteza v_1, este lovită de o altă bilă de masă m_2, care ajunge pe prima deplasîndu-se în același sens, cu viteza v_2. Ciocnirea se consideră perfect neelastică. Se cere:

a) viteza bilelor după ciocnire și energia lor cinetică;

b) considerînd că bilele se deplasează una spre alta și că energia cinetică a bilei cu masa m_1 este de 20 de ori mai mare decît energia cinetică a bilei de masă m_2, se cere relația dintre masele m_1 și m_2 astfel ca după ciocnire, bilele să se deplaseze în sensul în care s-a deplasat bila de masă m_2 înainte de ciocnire.

1.2.155. Un corp cu masa $m = 300$ kg porneşte din repaus şi se deplasează pe un plan orizontal, cu acceleraţia $a_1 = 0{,}1$ ms^{-2} timp de 1 minut, după care forţa de tracţiune încetează să mai acţioneze. În continuare, corpul coboară pe o pantă înclinată cu unghiul $\alpha_1 = 30°$ faţă de orizontală, de lungime $l_1 = 50$ m. Ajuns la baza acestui plan înclinat, corpul continuă să se deplaseze orizontal pe distanţa $s = 50$ m, iar apoi urcă pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha_2 = 45°$ faţă de orizontală. Pe planele înclinate, coeficientul de frecare este $\mu_1 = 0{,}1$, iar pe porţiunile orizontale este $\mu = 0{,}2$. Se cere:

a) forţa de tracţiune pe prima porţiune orizontală;

b) viteza cu care corpul ajunge la baza primului plan înclinat;

c) înălţimea la care se ridică corpul pe al doilea plan înclinat şi energia corpului în momentul opririi.

1.2.156. Să se calculeze înălţimea h de la care trebuie să alunece, fără frecare, un mobil de masă $m = 10$ kg, pentru a putea să parcurgă un looping de rază $R = 5$ m.

Ce distanţă va parcurge corpul pe orizontală după efectuarea loopingului, dacă între corp şi planul orizontal, coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}3$?

Considerînd că după efectuarea loopingului, corpul izbindu-se de un obstacol, se opreşte într-un interval de 0,2 secunde, să se afle forţa medie de izbire.

1.2.157. Un pendul efectuează oscilaţii cu amplitudinea unghiulară $\alpha = 45°$, revenind în poziţia de echilibru cu viteza $v = 3{,}39$ ms^{-1}. Acceleraţia gravitaţională în locul considerat este $g = 9{,}81$ ms^{-2}, iar masa bilei atîrnată de capătul firului este $m = 0{,}5$ kg. Se cere:

a) lungimea pendulului şi perioada oscilaţiilor;

b) energia potenţială în punctul cu elongaţia maximă.

1.2.158. Se consideră un corp cu greutatea $G = 49$ N, suspendat de un arc. Arcul respectiv se alungeşte cu 9 cm sub acţiunea unei forţe $F = 58{,}8$ N. Se cere:

a) perioada de oscilaţie a corpului de greutate G;

b) energia de oscilaţie.

1.2.159. Un punct material de masă m se mişcă în planul xOy avînd coordonatele date de expresiile:

$$x = a \cos \omega t; \quad y = b + c \sin \omega t.$$

Se cere:

a) ecuaţia traiectoriei;

b) viteza şi acceleraţia punctului material;

c) forţa rezultantă care acţionează asupra acestui punct material.

1.2.160. Un corp de masă $m = 5$ kg execută o mişcare oscilatorie armonică. Ştiind că pentru a îndepărta corpul din poziţia de repaus pînă în punctul M situat la distanţa maximă de această poziţie, se cheltuieşte un lucru mecanic $L = 0{,}55$ J şi că în punctul M, asupra corpului acţionează forţa elastică $F = 2{,}5$ N, să se afle:

a) amplitudinea A şi perioada T a mişcării;

b) ecuaţia de mişcare a corpului, dacă:

— se ia ca origine a timpului și a spațiului, momentul și respectiv, poziția corpului cînd se află în punctul de echilibru;

— se ia ca origine a timpului și a spațiului, momentul și respectiv, poziția corpului cînd trece prin punctul M.

1.2.161. Un corp cu masa m este suspendat de un fir prins pe un stativ fixat pe un cărucior. Să se afle tensiunea T din fir și unghiul α dintre fir și verticală, dacă căruciorul:

a) se deplasează pe orizontală, cu accelerația a;

b) urcă și respectiv, coboară cu accelerația a pe un plan înclinat cu unghiul β față de orizontală;

c) coboară cu frecare pe planul înclinat amintit, coeficientul de frecare fiind μ;

d) să se calculeze perioada de oscilație a pendulului, în fiecare din cazurile de mai sus.

1.2.162. Un corp cu masa $m = 2$ g este suspendat de un fir inextensibil, de masă neglijabilă și lungime $l_0 = 1$ m. Corpul execută mici oscilații în jurul poziției de echilibru, cu frecvența $\nu = 0{,}496$ s^{-1}.

a) Să se scrie ecuația de mișcare a corpului, considerînd că la momentul $t = 0$, acesta se găsește în poziția de echilibru și viteza inițială în acest moment este $v = 12{,}6$ cm s^{-1}.

b) Corpul este îndepărtat de la poziția de echilibru astfel că firul face unghiul $\alpha = 60°$ cu verticala. Care este tensiunea din fir cînd corpul trece prin poziția de echilibru?

c) În momentul trecerii prin poziția de echilibru (în condițiile punctului b), firul se rupe și corpul cade pe un plan orizontal aflat la distanța $h = 19{,}62$ m sub centrul de greutate al corpului aflat în poziție de echilibru. Să se afle distanța orizontală parcursă de corp — față de verticala punctului de echilibru — și viteza cu care corpul atinge planul orizontal.

1.2.163. Un punct material execută o mișcare oscilatorie dată de ecuația: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Se cere să se calculeze:

a) dependența accelerației punctului material de elongația x;

b) dependența accelerației punctului material de viteza v;

c) dacă $\varphi_0 = \pi/3$ și perioada $T = 0{,}06$ s, care sînt momentele cele mai apropiate la care viteza și accelerația punctului material au valorile de două ori mai mici decît valorile maxime respective?

1.2.164. Prin compunerea a două mișcări oscilatorii, de aceeași direcție și de aceeași frecvență, cu amplitudinile $A_1 = 2$ cm și respectiv, $A_2 = 4$ cm, se obține o oscilație armonică cu amplitudinea $A = 5$ cm. Să se calculeze diferența de fază dintre cele două mișcări oscilatorii ce se compun.

1.2.165. Un punct material efectuează o mișcare oscilatorie după legea $x = A \sin(2\pi t + \pi/6)$. Să se calculeze:

a) momentul în care energia potențială este egală cu energia cinetică;

b) energia totală a punctului material de masă m;

c) forța sub acțiunea căreia corpul execută mișcarea oscilatorie indicată.

1.2.166. Două surse coerente de unde sonore, de aceeași putere, se află la distanța $l_1 = 2{,}5$ m și respectiv, $l_2 = 2{,}4$ m de microfon. Undele se consideră plane. Să se calculeze relația dintre amplitudinea undei rezultante și a undelor inițiale, dacă lungimea de undă este $\lambda = 0{,}3$ m.

1.2.167. Să se calculeze modulul Young pentru un metal în care sunetul se propagă cu viteza $v = 4\,700$ ms^{-1}. Densitatea metalului este $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}.

1.2.168. Pe un cărucior (figura 1.151) este fixată o bară orizontală, de-a lungul căreia poate aluneca fără frecare un manşon de masă $m = 1$ kg. De manşon sînt legate două arcuri, al căror coeficient de elasticitate comun este $k = 0{,}1$ kgf/cm. Să se afle legea de mişcare a manşonului în raport cu un sistem de referinţă legat de cărucior, în următoarele cazuri:

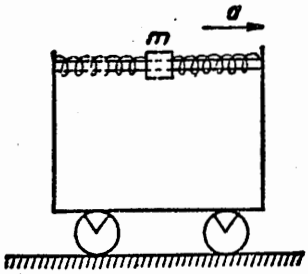


Fig. 1.151.

a) căruciorul primeşte o acceleraţie care creşte încet de la zero pînă la valoarea a;

b) căruciorul primeşte brusc, la $t = 0$, acceleraţia $a = 0{,}48$ ms^{-2} care rămîne constantă;

c) căruciorul este menţinut în repaus şi manşonul se deplasează cu distanţa $l = 6$ cm, faţă de poziţia de echilibru. Manşonul şi căruciorul se lasă liberi, concomitent. Să se studieze natura mişcării ce apare din acest moment.

Se consideră că la echilibru, centrele de greutate ale manşonului şi căruciorului se aflau pe aceeaşi verticală. Masa căruciorului (fără manşon) este $M = 5$ kg.

1.2.169. Un resort liniar are lungimea L_1 cînd se găseşte liber, în poziţie verticală. Dacă la capătul resortului se atîrnă un corp cu masa m, lungimea lui devine: $L_1 + L = L_2$. După ce resortul împreună cu corpul de masă m_1 au atins poziţia de echilibru, un al doilea corp cu masa m cade de la înălţimea L_2 peste primul, cu care se ciocneşte neelastic. Să se calculeze:

a) perioada şi amplitudinea oscilaţiei sistemului;

b) înălţimea maximă atinsă de sistem, deasupra poziţiei iniţiale de echilibru.

1.2.170. Un satelit artificial avînd masa $m = 1\,200$ kg descrie o traiectorie circulară în jurul Pămîntului, la înălţimea $h = 230$ km de sol. Să se calculeze:

a) acceleraţia gravitaţională la înălţimea satelitului;

b) viteza liniară a satelitului;

c) energia necesară pentru plasarea satelitului pe orbită, făcîndu-se abstracţie de frecarea cu aerul;

d) de cîte ori va fi mai mare perioada de oscilaţie a unui pendul aflat în satelit, faţă de perioada de oscilaţie a pendulului aflat la suprafaţa Pămîntului.

Acceleraţia gravitaţională la sol este $g_0 = 9{,}8$ ms^{-2}, raza Pămîntului este $R = 6\,370$ km.

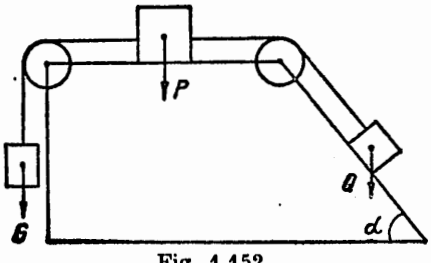


Fig. 1.152.

1.2.171. Trei corpuri cu greutăţile G, P şi Q sînt legate între ele, ca în figura 1.152. Coeficientul de frecare pe planul orizontal şi respectiv, pe planul înclinat este acelaşi, egal cu μ. Se neglijează masa scripeţilor. Se cere:

a) să se studieze mişcarea corpurilor;

b) să se determine reacţiile în firele de legătură.

1.2.172. Greutatea unui corp la poi este $G = 9{,}81$ N. Se cere:
a) greutatea aceluiași corp la ecuator;
b) de cîte ori trebuie să se rotească Pămîntul mai repede decît normal, pentru ca la ecuator, corpurile să nu aibă greutate?

1.2.173. O rachetă este lansată de pe Pămînt spre Lună. Să se calculeze:
a) distanța de la suprafața Pămîntului, pe direcția ce unește centrele Pămîntului și Lunii, pînă în punctul în care racheta va fi atrasă de Pămînt și de Lună cu forțe egale și de sens opus;
b) de cîte ori va crește sau se va micșora perioada de oscilație a unui pendul matematic transportat de pe Pămînt pe Lună.

1.2.174. Să se arate cum variază greutatea unui corp cu distanța h de la suprafața Pămîntului, pentru h cuprins între zero și $20\,R_p$. La ce înălțime h, greutatea corpului scade cu o treime din greutatea acestuia la sol? Care este accelerația gravitațională la înălțimea $h = 5\,R_p$?

1.2.175. O planetă se deplasează pe o orbită eliptică avînd Soarele în unul din focare. Luînd în considerare lucrul mecanic al forțelor gravitaționale, să se indice punctul de pe traiectorie în care viteza planetei va fi maximă și punctul în care viteza va fi minimă.

1.2.176. Să se calculeze înălțimea minimă de la suprafața Pămîntului atinsă de primul satelit sovietic, lansat la 4 octombrie 1957, dacă se consideră cunoscute următoarele date: înălțimea maximă atinsă de satelit $h_{max} = 900$ km; perioada de rotație a satelitului $T_s = 96$ minute.

1.2.177. Pentru realizarea legăturii internaționale prin televiziune este suficient să avem trei sateliți care se rotesc pe aceeași orbită circulară, în planul ecuatorului de la răsărit spre apus și aflați la distanța unghiulară de 120° unul față de altul. Perioada de rotație a fiecărui satelit este $T = 24$ h.
Se cere:
a) raza orbitei și viteza unghiulară pentru un astfel de satelit;
b) lucrul mecanic necesar pentru a scoate de pe orbită un astfel de satelit de masă $m = 2\,000$ kg.

1.2.178. Să se stabilească la ce înălțime trebuie să se rotească un satelit artificial al Pămîntului, pentru a rămîne tot timpul deasupra aceluiași punct de pe suprafața Pămîntului.

1.2.179. Un satelit artificial al Pămîntului, cu masa $m = 60$ kg, se rotește pe o traiectorie circulară aflată la înălțimea $h = 180$ km de suprafața solului. Se cere:
a) viteza satelitului;
b) perioada de rotație a satelitului în jurul Pămîntului;
c) greutatea satelitului la înălțimea h;
d) perioada unui pendul matematic aflat în satelit, dacă la suprafața Pămîntului, pendulul bate secunda.

1.2.180. Doi sateliți se deplasează de-a lungul unei orbite circulare în același sens, la o distanță mică unul de altul. Se pune problema trecerii unui container de pe primul satelit pe al doilea. Viteza containerului în raport cu satelitul este v, mult mai mică decît viteza V a satelitului.
Să se stabilească dacă containerul ajunge mai repede pe cel de-al doilea satelit cînd este aruncat în sensul mișcării sateliților sau în sens opus.

1.2.181. O sferă cu densitatea $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3 este aruncată de jos în sus, cu o viteză inițială $v_0 = 24{,}5$ ms^{-1}, de la suprafața apei unui bazin. La înapoiere, sfera se scufundă fără frecare în apa bazinului ($\rho_a = 10^3$ kg/m^3), pînă la adîncimea s. Să se calculeze:

a) înălțimea maximă la care ajunge sfera;

b) adîncimea maximă s pînă la care se scufundă sfera în bazin;

c) densitatea ρ' a unui lichid în care sfera, la plutire, să fie scufundată cu jumătate din volumul său.

1.2.182. La o turbină vine apa printr-o conductă de lungime $l = 500$ m și cu aria secțiunii $A = 400$ cm^2. Conducta este înclinată cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Se cere:

a) debitul de apă în m$^3 \cdot$ s^{-1} și în kg $\cdot$ s^{-1};

b) puterea utilă a axului turbinei, dacă randamentul turbinei este $\eta_1 = 0{,}9$;

c) viteza cu care lovește apa paletele turbinei, dacă ajutajul reduce secțiunea la 1/10;

d) cu cît se ridică temperatura apei care ajunge la paletele turbinei, dacă în timpul căderii se pierde prin frecare 1/250 din energie?

e) turbina acționînd o pompă care ridică apa la înălțimea $h = 70$ m, iar randamentul pompei fiind $\eta_2 = 0{,}85$, să se calculeze debitul apei pompate, în m$^3 \cdot$ s^{-1}.

1.2.183. Un cub cu latura $a = 8$ cm, confecționat dintr-un material cu densitatea $\rho_c = 800$ kgm^{-3}, se scufundă în apă astfel ca fața sa superioară să se afle la o adîncime $h = 2{,}5$ m. Să se calculeze:

a) rezultanta forțelor ce acționează asupra cubului;

b) accelerația cubului lăsat liber;

c) timpul t după care fața superioară a cubului atinge suprafața apei și viteza cubului la momentul t;

d) fracțiunea x din latura cubului, care rămîne cufundată în apă, la echilibru.

1.2.184. O grindă de lemn ($\rho = 700$ kgm^{-3}) cu dimensiunile 2 m $\times$ 30 cm $\times$ 15 cm este ținută la o adîncime de 2 m, într-un bazin cu apă. La momentul $t_0 = 0$, grinda este lăsată liberă. Să se determine:

a) forța necesară pentru menținerea grinzii la adîncimea dată;

b) timpul în care grinda se ridică la suprafața apei;

c) înălțimea porțiunii scufundate la plutirea grinzii cu fața de arie mai mare în jos și forța F' care trebuie să acționeze asupra grinzii ca înălțimea porțiunii scufundate să fie de 14 cm.

1.2.185. O sferă cu volumul $V = 400$ cm^3, din material cu densitatea $\rho_1 = 750$ kgm^{-3}, este cufundată într-un lac sărat la adîncimea $h_1 = 20$ m, de unde i se imprimă de jos în sus, vertical, o viteză $v_1 = 5$ ms^{-1}. Să se calculeze:

a) accelerația a cu care se deplasează sfera, dacă densitatea apei este $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ kgm^{-3};

b) timpul t_1 în care sfera ajunge la suprafața apei și viteza v cu care sfera ajunge la suprafața apei;

c) înălțimea h_2 la care se ridică sfera deasupra apei în aer și adîncimea h_3 la care ajunge sfera cînd, în căderea ei, se scufundă în apă. Se neglijează frecările sferei cu apa și cu aerul.

1.2.186. În două vase comunicante de formă cilindrică, avînd secțiunile $S_1 = 10$ cm^2 și respectiv, $S_2 = 20$ cm^2, se află mercur. Deasupra mercurului, în primul vas se toarnă 1 l de apă. Tot în acest vas se introduce un corp de masă $m = 200$ g, care plutește în apă. Să se calculeze cu cît se ridică nivelul mercurului în al doilea vas.

1.2.187. Două vase cilindrice, cu diametrul $D = 4$ cm fiecare, sînt unite în partea de jos printr-un tub de volum neglijabil. Într-unul din vase se toarnă 0,5 l apă, iar în celălalt 0,5 l petrol. Densitatea apei este $\rho_1 = 10^3$ kgm^{-3}, iar densitatea petrolului este $\rho_2 = 800$ kgm^{-3}. Să se calculeze înălțimea lichidelor în cele două vase comunicante.

1.2.188. O scîndură $AB = l$ este articulată în punctul A, iar celălalt capăt este prins printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix, prin intermediul unui resort, de punctul fix M (figura 1.152, A). Pentru ca scîndura să rămînă orizontală, să se calculeze:

a) alungirea resortului;

b) mărimea, direcția și sensul reacției din articulația A.

Se cunosc:

greutatea scîndurii $G_s = 150$ N;

lungimea resortului netensionat $l_0 = 0{,}5$ m;

constanta elastică a resortului $k = 10^4$ Nm^{-1};

unghiul dintre firul ce leagă capătul B și orizontală $\alpha = 30°$.

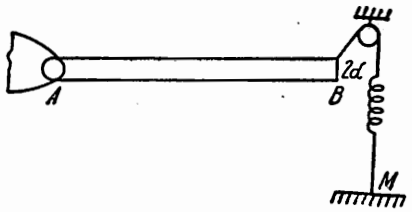


Fig. 1.152, A

c) Presupunînd că un cărucior de greutate $G_c = 150$ N se poate deplasa suficient de lent pornind din punctul A spre B, se cere alungirea resortului în funcție de distanța x între cărucior și punctul A.

1.2.189. O scară de lungime l se sprijină cu un capăt pe un perete lucios și cu celălalt capăt pe sol. Se cere să se calculeze:

a) unghiul maxim dintre scară și peretele vertical pentru care scara nu cade, dacă coeficientul de frecare dintre scară și sol este $\mu_1 = 0{,}4$;

b) forța de frecare dintre scară și sol, necesară pentru ca să nu alunece cînd un om de masă $m = 60$ kg se află la 3 m de capătul de sus al scării. Lungimea scării în acest caz se ia $l = 10$ m, iar masa ei $M_s = 1{,}5$ kg. Echilibrul se cere cînd unghiul dintre scară și orizontală este $\alpha = 60°$;

c) înălțimea la care se poate ridica pe scară ($l = 6$ m, $M_s = 10$ kg) un om de masă $m = 60$ kg. Unghiul dintre scară și peretele vertical fiind $\beta = 30°$, coeficientul de frecare dintre capătul scării și sol se ia în acest caz $\mu_2 = 0{,}433$.

1.2.190. Se consideră o bară AB absolut rigidă și de greutate neglijabilă. Asupra barei acționează un sistem de forțe paralele (figura 1.153). Se dau $F_1 = 2$ N, $F_2 = 1$ N, $F_3 = 3$ N, $F_4 = 4$ N și $F_5 = 5$ N. Bara are lungimea $AB = 6a$.

Se cere să se calculeze forțele paralele F_A și F_B cu care trebuie acționat la capetele barei astfel încît aceasta să se afle în echilibru, sub acțiunea sistemului format din cele șapte forțe.

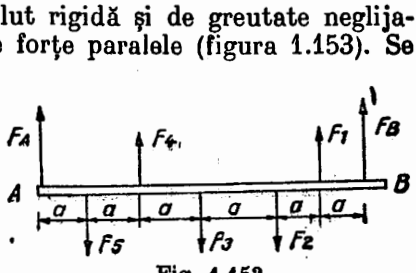


Fig. 1.153.

1.2.191. Două bare absolut rigide AB și AC sînt articulate în punctul A și de asemenea, în punctele B și C ale unei suprafețe orizontale (figura 1.154), astfel încît bara AB formează unghiul $\alpha = 45°$, iar bara AC unghiul $\beta = 60°$ cu orizontala. De articulația A se leagă un fir inextensibil, iar de capătul liber al firului se leagă un corp P cu masa $m = 100$ kg. Masa barelor se neglijează. Se cere să se calculeze tensiunile ce apar în barele AB și AC.

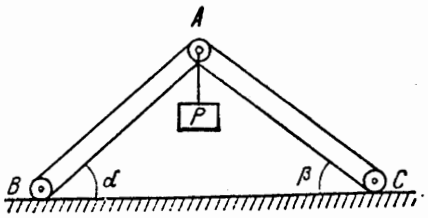


Fig. 1.154.

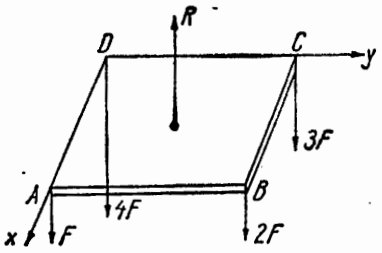


Fig. 1.155.

1.2.192. Se consideră o placă $ABCD$ pătrată, cu latura s și de greutate neglijabilă. În punctele A, B, C și D acționează forțele F, $2F$, $3F$ și respectiv, $4F$ (figura 1.155). Să se calculeze forța R cu care trebuie acționat asupra plăcii, pentru ca aceasta să rămînă în echilibru, precum și coordonatele x și y ale punctului de aplicație a forței R.

1.2.193. Se consideră un sistem format din trei bare AB, BC și CD, articulate între ele la capetele B și C și articulate în punctele A și D fixate pe o suprafață orizontală (figura 1.156). Se consideră $AD = BC$ și $AB = CD$. În articulația C acționează pe orizontală o forță $F_C = 100$ N. Să se calculeze forța F_B aplicată vertical în articulația B astfel încît sistemul indicat să rămînă în echilibru. Poziția de echilibru este astfel încît $\sphericalangle BAD = 30°$ și $\sphericalangle ADC = 90°$.

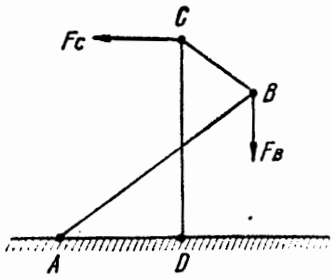


Fig 1.156.

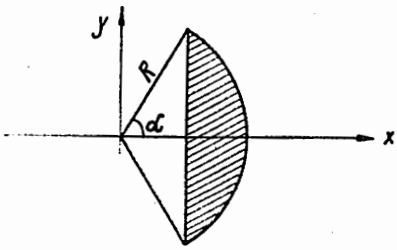


Fig. 1.157.

1.2.194. Să se determine poziția centrului de greutate al ariei unui segment de cerc de rază R (figura 1.157), avînd unghiul la centru 2α (în radiani).

1.2.195. Două corpuri cu masele m_1 și m_2 sînt legate printr-un fir inextensibil care trece peste un scripete fix. Suprafețele plane pe care corpurile stau, la momentul inițial, în repaus formează unghiurile α și β cu orizontala

(figura 1.158). Corpul din dreapta are centrul de greutate cu înălțimea h mai jos decît centrul de greutate al corpului din stînga. Dacă sistemul este lăsat liber, centrele de greutate ale celor două corpuri se află la aceeași înălțime, după timpul τ. Coeficientul de frecare dintre corpuri și cele două plane înclinate se consideră μ.

Să se stabilească relația dintre masele m_1 și m_2.

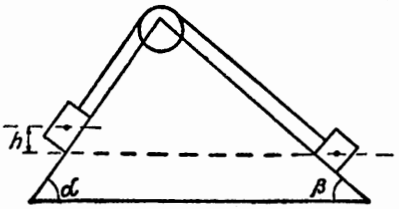


Fig. 1.158.

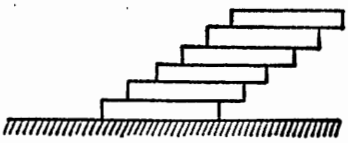


Fig. 1.159.

1.2.196. Un număr n de cărămizi sînt așezate una peste alta, în genul indicat în figura 1.159. Se consideră că între cărămizi nu există nici o forță de legătură și că fiecare cărămidă are lungimea l. Să se calculeze distanța maximă dintre fața din dreapta a cărămizii celei mai de sus și fața din stînga a cărămizii celei mai de jos, astfel încît sistemul să rămînă în echilibru.

1.2.197. În figura 1.160 se indică o parte dintr-o plasă orizontală tensionată. Porțiunea AB este tensionată cu o forță egală cu 10 N. Se cere să se calculeze tensiunile din porțiunile CD și DE. Nu se ține seama de masa firelor.

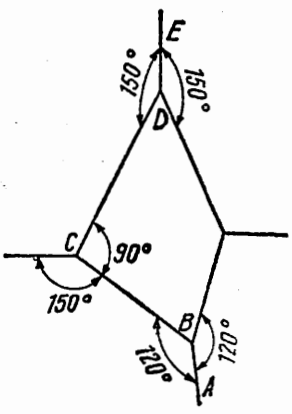


Fig. 1.160.

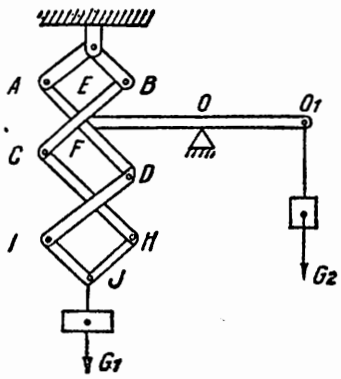


Fig. 1.161.

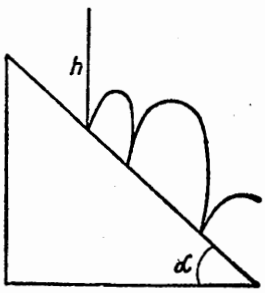


Fig. 1.162.

1.2.198. Se dă sistemul de bare și de greutăți indicat în figura 1.161. Barele AD, BC, CH, DI și brațul OO_1 al pîrghiei sînt de două ori mai lungi decît barele AE, EB, IJ, JH și brațul FO. Se neglijează greutatea barelor și a pîrghiei.

Să se calculeze raportul greutăților G_1 și G_2 pentru ca sistemul să se afle în echilibru.

1.2.199. O bilă elastică cade liber de la o înălțime h pe un plan înclinat care face unghiul α cu orizontala (figura 1.162). Ciocnirea între bilă și plan se consideră perfect elastică. Se cere să se calculeze raportul distanțelor între care bila, sărind succesiv, lovește planul înclinat.

1.2.200. Două platane pe care se află corpuri de mase egale, $m = 3$ kg, sînt suspendate de capetele unui fir ce trece peste doi scripeți ficși. Firul dintre scripeți este tăiat, iar capetele libere se leagă de un dinamometru (figura 1.163). Se neglijează masele platanelor, scripeților și dinamometrului. Să se calculeze:

a) indicația dinamometrului;

b) masa m_1 ce trebuie adăugată pe un platan pentru ca indicația dinamometrului să rămînă cea calculată la punctul a), dacă de pe celălalt platan se ia un corp cu masa $m_2 = 1$ kg.

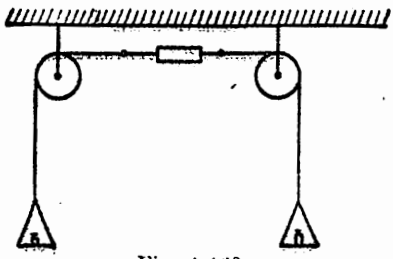


Fig. 1.163.

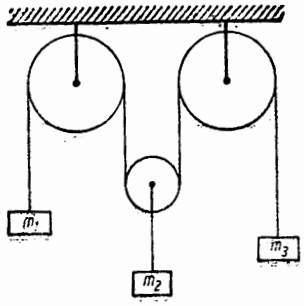


Fig. 1.164.

1.2.201. Se consideră un sistem format din doi scripeți ficși și unul mobil (figura 1.164). Un fir trecut peste sistemul de scripeți are la capetele lui corpurile de mase m_1 și m_3. De scripetele mobil se atîrnă un corp cu masa m_2. Diametrul scripetelui mobil se consideră egal cu distanța dintre extremitățile interioare ale celor doi scripeți ficși, astfel că porțiunile firului ce susține scripetele mobil sînt verticale. Se neglijează masele scripeților și ale firelor. De asemenea, se neglijează frecările.

Să se calculeze accelerațiile a_1, a_2 și a_3 ale corpurilor de mase m_1, m_2 și respectiv, m_3.

1.2.202. Se dă sistemul de scripeți indicat în figura 1.165. Masa scripeților și a firelor se neglijează. Se neglijează și frecarea. Să se determine:

a) accelerațiile corpurilor cu masele m_1 și m_2;

b) sensul de rotație al scripeților în timpul deplasării corpurilor.

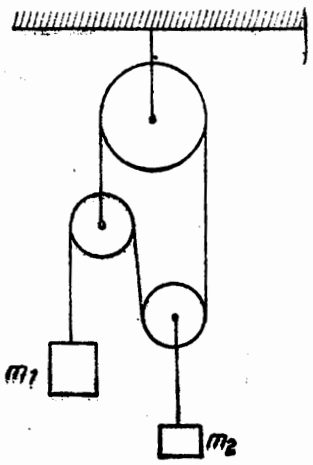


Fig. 1.165.

1.2.203. Două corpuri cu masele egale cu m sînt suspendate de capetele unui fir trecut peste doi scripeți ficși (figura 1.166). Un al treilea corp,

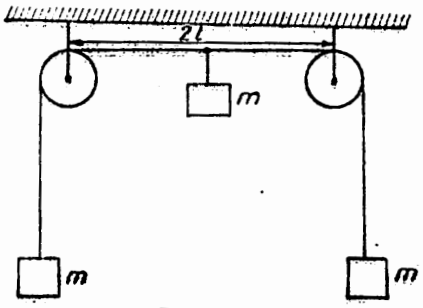


Fig. 1.166.

tot cu masa m, este suspendat la mijlocul porțiunii firului aflate între cei doi scripeți ficși. Distanța dintre axele scripeților se consideră $2l$. Se neglijează frecarea la axele scripeților și greutatea firelor.

Să se calculeze înălțimea de la care coboară corpul al treilea, cînd sistemul este lăsat liber.

1.2.204. Un disc rigid și omogen (figura 1.167) se rotește pe un plan orizontal, cu viteză constantă.

a) Să se demonstreze că viteza liniară de rotație a punctelor de pe periferia discului, în raport cu centrul O, este egală cu viteza de translație a discului.

b) Să se calculeze mărimea și direcția vitezelor punctelor A, B, C și D de pe periferia discului, în raport cu un observator aflat în repaus la o distanță oarecare de disc.

c) Să se stabilească poziția punctelor de pe disc care au aceeași viteză ca și centrul discului, în raport cu observatorul considerat la punctul precedent.

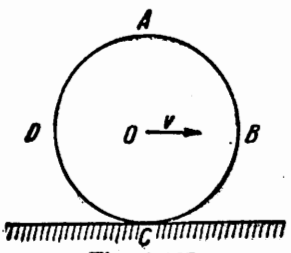


Fig. 1.167.

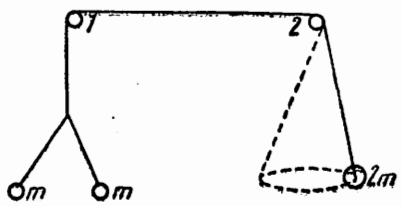


Fig. 1.168.

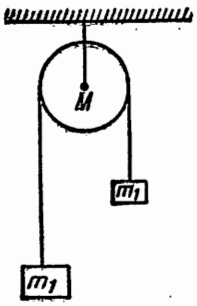


Fig. 1.169.

1.2.205. Trei corpuri aflate într-o mișcare de rotație sînt legate de capetele unui fir care trece peste două cuie (figura 1.168). Două corpuri, cu aceeași masă m fiecare, sînt atîrnate în partea stîngă și un corp cu masa $2m$ este atîrnat în partea dreaptă. Se neglijează masa firului și frecarea.

Se cere să se stabilească dacă sistemul format din cele trei corpuri va fi în echilibru.

1.2.206. Două corpuri cu masele m_1 și m_2 sînt legate de capetele unui fir ce trece peste un scripete cu masa M (figura 1.169) și cu momentul de inerție J. Se consideră că firul nu alunecă pe scripete. Să se calculeze:

a) accelerația corpurilor;

b) tensiunea în fir și efortul în suportul scripetelui.

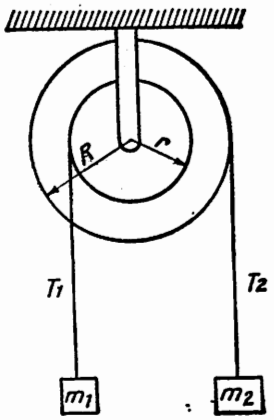


Fig. 1.170

1.2.207. Pe un scripete cilindric diferențial sînt înfășurate în sensuri opuse două fire de greutate neglijabilă. De capetele firelor sînt legate două corpuri cu masele m_1 și m_2 (fig. 1.170). Momentul de inerție al scripetelui se consideră J. Să se calculeze:

a) accelerația unghiulară a sistemului;

b) tensiunile T_1 și T_2 în fire.

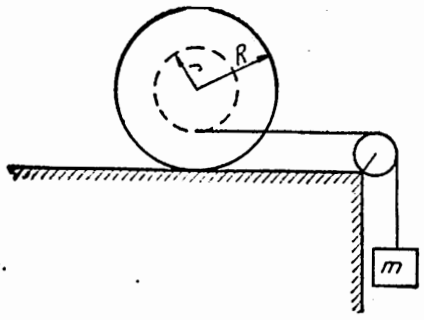


Fig. 1.171.

1.2.208. Un tub cilindric cu raza r este conectat, cu ajutorul unor spițe, la două cercuri de rază R (fig. 1. 171). Masa ambelor cercuri este M, iar masa tubului și a spițelor se neglijează în raport cu M. Un fir ce trece peste un scripete este înfășurat în jurul tubului. De celălalt capăt al firului se leagă un corp cu masa m. Masa firului și a scripetelui se neglijează. Se cere să se determine:

a) accelerația corpului de masă m;

b) tensiunea în fir;

c) forța de frecare ce acționează între cercuri și suprafața orizontală, astfel ca cercurile să nu alunece și coeficientul de frecare pentru care cercurile încep să alunece.

1.2.209. Un cilindru omogen de rază R se rotește, fără alunecare, pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală. Cilindrul este lăsat liber de la înălțimea $h (h > R)$. Viteza inițială a cilindrului este zero. Să se calculeze:

a) viteza centrului de inerție și viteza unghiulară de rotație a cilindrului, în momentul cînd acesta atinge planul orizontal;

b) forța de frecare a cilindrului pe plan;

c) coeficientul de frecare μ pentru care cilindrul se poate rostogoli, fără alunecare, pe planul înclinat.

1.2.210. O roată sub forma unui disc cu masa $M = 8$ kg și cu raza $R =$ $= 30$ cm se află în stare de repaus. Se cere să se calculeze:

a) lucrul mecanic necesar pentru a aduce roata într-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\omega = 10$ rad/s;

b) lucrul mecanic cheltuit, dacă discul ar fi avut o grosime mai mică, dar o rază de două ori mai mare, masa discului rămînînd aceeași.

REZOLVĂRI ȘI SOLUȚII

1.1.1. a) Fie v_1 viteza căruciorului la momentul t_1. Avem deci:

$$v_1 = v_0,$$
$$v_2 = v_1 + at,$$
$$v_3 = v_1 + 2at,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = v_1 + (n-1)at.$$

Din raportul $\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_1 + at} = \frac{1}{3}$ rezultă:

$$s_1 = \frac{1}{2} at,$$
$$s_2 = 3/2\ at,$$
$$s_3 = 5/2\ at,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = \frac{(2n-1)}{2} at.$$

Aflăm segmentele parcurse de cărucior între două măsurări consecutive ale vitezei:

$$s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} t = at^2,$$

$$s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} t = 2at^2,$$

$$s_3 = \frac{v_3 + v_4}{2} = 3at^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s_n = \frac{v_n + v_{n-1}}{2} t = nat^2.$$

Deci

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 \dots = 1 : 2 : 3 : 4 \dots$$

b) $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{10} = at^2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 55\, at^2.$

1.1.2. a) $h = \frac{gt^2}{2}$; $h - \frac{h}{n} = \frac{g(t-1)^2}{2}$,

$$t^2 - 2t + 1 = \frac{n-1}{n} t^2;\ \frac{1}{n} t^2 - 2t + 1 = 0;\ t^2 - 2nt + n = 0.$$

$$t_{1,2} = n \pm \sqrt{n(n-1)}.$$

Se obţin două soluţii:

$$t_1 = [n + \sqrt{n(n-1)}]\ \text{s};\ t_2 = [n - \sqrt{(n+1)}]\ \text{s}.$$

Deoarece pentru $n > 1$, $t_2 < 1$ s rămîne valabilă soluţia t_1.

b) $v = gt_1 = g[n + \sqrt{n(n-1)}]\ \text{ms}^{-1}$.

1.1.3. Dacă plecăm de la relaţia

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},\quad \frac{gt^2}{2} - v_0 t + h = 0.$$

Înlocuind valorile v_{01} şi h obţinem ecuaţia:

$$t^2 - 9t + 8 = 0;\ \text{de unde}\ t_1 = 8\ \text{s},\ t_2 = 1\ \text{s};$$

iar dacă înlocuim v_{02} şi h avem:

$$t^2 - 6t + 8 = 0;\ \text{de unde}\ t_1 = 4\ \text{s},\ t_2 = 2\ \text{s}.$$

Deci dacă $v_0 = v_{01}$, corpul atinge înălţimea h, în urcare, după timpul $t = 1$ s, iar în coborîre ajunge la aceeaşi înălţime după 8 s. Dacă însă $v_0 = v_{02}$, corpul ajunge la înălţimea h după 2 s, în urcare şi după 4 s în coborîre. Adică în ambele cazuri, corpul ajunge la înălţimea h, în coborîre.

1.1.4. a) Vitezele corpului la momentele t_1, t_2 şi t_3 sînt respectiv:

$$v_1 = v_0 + at_1;\ v_2 = v_0 + at_2;\ v_3 = v_0 + at_3.$$

Segmentele parcurse în intervalele de timp $(t_2 - t_1)$, $(t_3 - t_2)$ şi $(t_3 - t_1)$ sînt:

$$x_2 - x_1 = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2}(t_2 - t_1);$$

$$x_3 - x_2 = \frac{2v_0 + at_2 + at_3}{2}(t_3 - t_2);$$

$$x_3 - x_1 = \frac{2v_0 + at_1 + at_3}{2}(t_3 - t_1).$$

De unde:

$$2v_0 + at_1 + at_2 = 2\,\frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1};$$

$$2v_0 + at_2 + at_3 = 2\,\frac{(x_3 - x_2)}{t_3 - t_2};$$

$$2v_0 + at_1 + at_3 = 2\,\frac{(x_3 - x_1)}{t_3 - t_1}.$$

Scădem a doua ecuație din prima:

$$a(t_1 - t_3) = 2\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}\right).$$

De unde

$$a = 2\,\frac{t_1(x_2 - x_3) + t_2(x_3 - x_1) + t_3(x_1 - x_2)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)}\ \text{ms}^{-2}.$$

Înlocuind accelerația avem:

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{1}{t_1 - t_3}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}\right)(t_1 + t_2)\,\text{ms}^{-1}.$$

1.1.5. a) Cele două pietre trebuie să ajungă în același timp la înălțimea h:

$$\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2\left(h_2 + \frac{v_0^2}{2g} - h\right)}{g}} = \sqrt{\frac{2(h_1 - h)}{g}}.$$

De unde se obține:

$$v_0 = \frac{(h_1 - h_2)\sqrt{g}}{\sqrt{2\,(h_1 - h)}} \approx 3{,}7\ \text{ms}^{-1}.$$

b) $v_1 = \sqrt{2g\,(h_1 - h)} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9{,}8} = 3\sqrt{19{,}6} \approx 13{,}2\ \text{ms}^{-1}$;

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_2 - h)} = \sqrt{13{,}69 + 78{,}4} \approx 9{,}6\ \text{ms}^{-1}.$$

1.1.6. a) Din figura 1.13 rezultă:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0\sqrt{3} - 2gt}{v_0};$$

$$\frac{v_0}{\sqrt{3}} = v_0\sqrt{3} - 2gt;\quad 2gt = v_0\sqrt{3} - \frac{v_0}{\sqrt{3}} = \frac{2v_0}{\sqrt{3}};$$

$$t = \frac{2 \cdot 33{,}9}{2 \cdot 1{,}73 \cdot 9{,}8} = 2\ \text{s}.$$

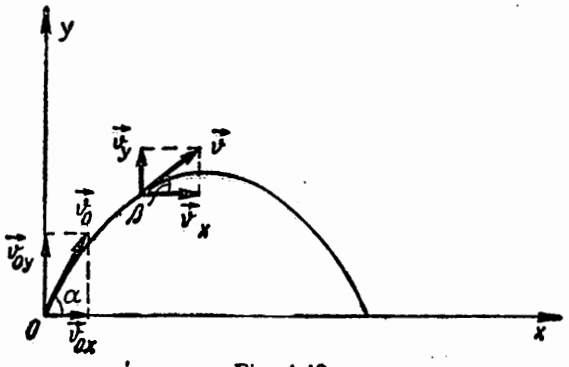


Fig. 1.12.

b) $x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{33{,}9^2}{9{,}8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 101{,}7$ m.

1.1.7. a) Ghiulelele trebuie să se ciocnească în punctul de înălțime maximă atins de cea de-a doua ghiulea, deoarece în acest caz, prima ghiulea parcurge o distanță minimă și deci timpul pînă la ciocnire va fi minim. Timpul în care a doua ghiulea atinge înălțimea maximă este

$$t = \frac{v_{02}}{g}$$

sau înălțimea maximă

$$h_{2max} = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Prima ghiulea trebuie să se afle la înălțimea h_{2max} după timpul $t + \tau$, deci:

$$h_{2max} = v_{01}(t + \tau) - \frac{g(t + \tau)^2}{2}$$

sau:

$$v_{02}t - \frac{gt^2}{2} = v_{01}(t + \tau) - \frac{gt^2}{2} - gt\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

De unde

$$\tau^2 + \frac{2}{g}(v_{02} - v_{01})\tau + \frac{2(v_{02} - v_{01})v_{02}}{g^2} = 0.$$

Rezolvînd această ecuație obținem:

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{g}\left[(v_{01} - v_{02}) \pm \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}\right].$$

Deoarece

$$\sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2} > v_{01} - v_{02}$$

avem o soluție univocă pentru τ:

$$\tau = \frac{1}{g}\left[(v_{01} - v_{02}) + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}\right] \simeq 54{,}5 \text{ s}.$$

b) Viteza primei ghiulele în momentul întîlnirii este:

$$v_1 = g\left(\frac{v_{02}}{g} + \tau - \frac{v_{01}}{g}\right) \simeq 436{,}1 \text{ ms}^{-1}.$$

1.1.8. a) Din prima ecuație aflăm

$$t = \frac{x}{4}.$$

Introducînd în a doua relație:

$$y = 2\frac{x}{4} + 6 = 0{,}5x + 6.$$

Punctul material se deplasează pe o dreaptă.

b) $\sin 2t = \frac{x}{5}$; $y = 5\sqrt{1 - \sin^2 2t} = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

$$y^2 = 25 - x^2; \quad x^2 + y^2 = 25.$$

În acest caz, traiectoria punctului material este un cerc.

1.1.9. Notăm cu $\tau = 60$ s timpul după care pleacă al doilea autobuz și considerăm că distanța d între autobuze se realizează după timpul t de la plecarea primului autobuz.

$$s_1 = \frac{at^2}{2}\ ;\quad s_2 = \frac{a(t-\tau)^2}{2}\ ;$$

$$d = s_1 - s_2 = \frac{at^2}{2} - \frac{a(t-\tau)^2}{2} = at\tau - \frac{a}{2}\tau^2.$$

De unde:

$$t = \frac{d + a\tau^2/2}{a\tau} = \frac{1\,500 + 900}{30} = 80 \text{ s}.$$

b) $v_1 = at = 40$ ms^{-1}; $v_2 = a(t-\tau) = 10$ ms^{-1}.

1.1.10. a) Spațiul parcurs de corp în timpul $t_n = n$ s este:

$$s_n = \frac{at_n^2}{2} = \frac{an^2}{2},$$

iar în timpul $t_{n-1} = (n-1)$ s este

$$s_{n-1} = \frac{at_{n-1}^2}{2} = \frac{a(n-1)^2}{2}.$$

În secunda a n-a va parcurge spațiul:

$$s^n = s_n - s_{n-1} = \frac{an^2}{2} - \frac{a(n-1)^2}{2} = \frac{a}{2}(2n-1).$$

Deci

$$s^3 = \frac{a}{2}(2\cdot 3 - 1) = \frac{5a}{2} = 5 \text{ m}.$$

De unde $a = \dfrac{2\cdot 5}{5} = 2$ ms^{-2}.

b) $v = at = 2\cdot 12 = 24$ ms^{-1};

$$s_{12} = \frac{2\cdot 12^2}{2} = 144 \text{ m}.$$

1.1.11. a) Punctul de contact între disc și cerc se consideră centrul în jurul căruia se rotește discul la momentul dat (centrul de rotație instantaneu). Viteza unghiulară a discului va fi:

$$\omega' = \frac{v_{O'}}{OA} = \frac{v_{O'}}{R},$$

unde $v_{O'}$ este viteza punctului O'. Viteza unghiulară a punctului O' în mișcarea sa în jurul centrului O este

$$\omega = \frac{v_{O'}}{OO'} = \frac{v_{O'}}{R}.$$

Deci $\omega' = \omega$, ceea ce înseamnă că în timp ce centrul O' efectuează o rotație în jurul centrului O, discul face la fel o singură rotație în jurul axei sale proprii.

b) Raționînd analog ca la punctul a) avem:

$$\omega' = \frac{v_{O'}}{OA} = \frac{v_{O'}}{R},$$

$$\omega = \frac{v_{O'}}{OO'} = \frac{v_{O'}}{3R}.$$

Deci

$$\omega' = 3\omega.$$

În timp ce centrul O' efectuează o singură rotație în jurul centrului O, discul efectuează trei rotații în jurul axei proprii.

1.1.12. Această problemă admite mai multe soluții. Ne oprim la una din ele:

$$x = (2t + A \sin \pi t)\text{m} \qquad (1)$$

unde A este o constantă. Spațiul parcurs în timp de două secunde este:

$$\Delta x = 2(t + 2) + A \sin \pi(t + 2) - 2t - A \sin \pi t =$$

$$= 4 + A[\sin (\pi t + 2\pi) - \sin \pi t] = 4 \text{ m}.$$

Se vede însă că ecuația (1) nu reprezintă o mișcare rectilinie și uniformă, deoarece nu se parcurg spații egale în intervale arbitrare de timp egale. Să luăm, de exemplu, intervale de timp egale cu 0,5 s:

$$t = 0, \; x_0 = 0;$$

$$t = 0{,}5\,\text{s}, \; x_{0,5} = 1 + A \sin \frac{\pi}{2} = (1 + A)\text{m};$$

$$t = 1\,\text{s}, \; x_1 = 2 + A \sin \pi = 2 \text{ m};$$

. . . . . .

Deci în prima jumătate de secundă se parcurge $(1 + A)$m, iar în a doua jumătate de secundă

$$x_1 - x_{0,5} = 2 - 1 - A = (1 - A)\text{m},$$

mișcarea fiind rectilinie și uniformă numai pentru $A = 0$.

1.1.13. a) Volumul benzii ce trece în timpul t pe lîngă capul de înregistrare este

$$V_1 = v_0 t d h.$$

Volumul benzii de pe bobina plină era

$$V_0 = \pi r_0^2 h,$$

iar după un timp t va fi

$$V = \pi r^2 h,$$

unde

$$V = V_0 - V_1 = \pi r_0^2 h - v_0 t d h = \pi r^2 h.$$

De unde

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{v_0 t d}{\pi}} = r_0 \sqrt{1 - \frac{v_0 t d}{\pi r_0^2}}.$$

Inițial, viteza unghiulară este

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r_0}.$$

Iar după timpul t, viteza unghiulară a bobinei inițial pline va fi:

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{r_0 \sqrt{1 - \frac{v_0 t d}{\pi r_0^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0 t d}{\pi r_0^2}}}.$$

b) Lungimea benzii poate fi aflată din relația:

$$ldh = \pi r_0^2 h; \quad l = \pi \cdot \frac{r_0^2}{d}.$$

Deci $t_{max} = \dfrac{l}{v_0} = \dfrac{\pi r_0^2}{v_0 d}$. (2)

Dacă introducem în relația (1), obținem viteza unghiulară maximă când prima bobină devine goală:

$$\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0 d t_{max}}{\pi r_0^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0 d}{\pi r_0^2} \cdot \dfrac{\pi r_0^2}{v_0 d}}} = \infty \qquad (3)$$

Acest rezultat se explică prin faptul că am considerat că bobina se înfășoară începînd cu raza $r_1 = 0$. În realitate, $r_1 > 0$. Acest lucru nu afectează formula (1). Lăsăm cititorul să demonstreze. Ținînd seama de acest lucru, calculăm lungimea l și t_{max}:

$$ldh = \pi(r_0^2 - r_1^2)h; \quad l = \pi \frac{r_0^2 - r_1^2}{d};$$

$$t_{max} = \frac{l}{v_0} = \pi \frac{r_0^2 - r_1^2}{v_0 d}.$$

Deci

$$\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0 d t_{max}}{\pi r_0^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0 d}{\pi r^2} \cdot \dfrac{\pi(r_0^2 - r_1^2)}{v_0 d}}} = \frac{r_0}{r_1}\omega_0.$$

1.1.14. a) Componenta orizontală a vitezei rămîne constantă, deci componenta orizontală a accelerației este zero. Accelerația totală a pietrei este orientată pe verticală în jos fiind egală cu accelerația gravitațională g:

$$a = g = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Din figura 1.15 se vede:

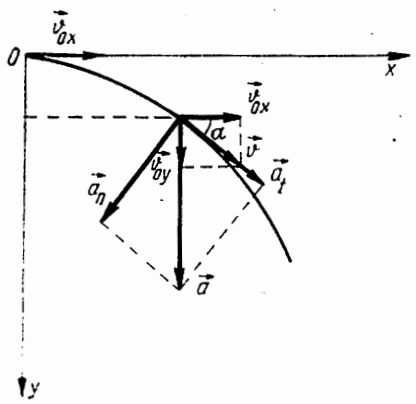


Fig. 1.15.

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{a} = \frac{a_n}{g}; \quad a_n = g\frac{v_x}{v};$$

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{a_t}{a} = \frac{a_t}{g}; \quad a_t = g\frac{v_y}{v}.$$

Înlocuind avem:

$$a_t = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2 t^2}} = 5{,}4 \text{ ms}^{-2};$$

$$a_n = \frac{g v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2 t^2}} = 8{,}2 \text{ ms}^{-2}.$$

b) $h = \dfrac{gt^2}{2}; \quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 2 \text{ s};$

$$d = v_{0x} t = 15 \cdot 2 = 30 \text{ m}.$$

1.1.15. a) Din figura 1.16 rezultă:

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$; $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} + gt$.

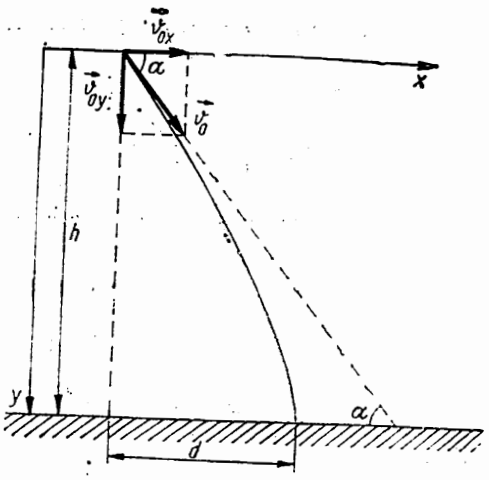


Fig. 1.16.

Fie τ timpul de cădere a bombei pe verticală:

$$h = v_{0y}\tau + \frac{g\tau^2}{2},$$

de unde

$$\tau_{1,2} = -\frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + 2\frac{h}{g}}.$$

A doua soluție este fără sens, deci

$$\tau = -\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + 2\frac{h}{g}} =$$

$$= -13{,}2 + \sqrt{13{,}2^2 + 150} = 4{,}8 \text{ s}.$$

Distanța d este:

$$d = v_{0x} \cdot \tau = 75 \cdot 4{,}8 = 360 \text{ m}.$$

b) $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$; $v_y = v_{0y} + g\tau = 129{,}75 + 47{,}04 = 176{,}79$ ms^{-1};

$$v = \sqrt{75^2 + 176{,}79^2} \simeq 192 \text{ ms}^{-1}.$$

1.1.16. a) Timpul τ este suma timpului τ_1 necesar propagării sunetului de la fundul fîntînii la suprafață și a timpului τ_2 necesar mișcării pietrei de la suprafață la fundul fîntînii:

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad \tau_1 = \frac{h}{v_s}.$$

Dacă considerăm $\tau_2 \gg \tau_1$ și $\tau = \tau_2$, atunci adîncimea calculată va fi

$$h_2 = \frac{g\tau_2^2}{2} = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Adîncimea reală a fîntînii este h. Deci eroarea relativă comisă este

$$\Delta h = \frac{h_2 - h}{h} \text{ sau } \frac{h_2}{h} = \Delta h + 1.$$

Dé unde

$$h = \frac{h_2}{\Delta h + 1} = \frac{g\tau^2}{2(\Delta h + 1)}.$$

Deoarece în realitate

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

avem:

$$\tau = \frac{g\tau^2}{2v_s(\Delta h + 1)} + \sqrt{\frac{\tau^2}{\Delta h + 1}} \text{ sau } 1 - \frac{g\tau}{2v_s(\Delta h + 1)} = \sqrt{\frac{1}{\Delta h + 1}}.$$

De unde:

$$\tau = \frac{2v_s(\Delta h + 1)}{g}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{\Delta h + 1}}\right).$$

Dacă $\Delta h = 5\% = 0{,}05$, avem

$$\tau = \frac{2 \cdot 340 \cdot 1{,}05}{10}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1{,}05}}\right) = 71{,}4 \cdot 0{,}0254 = 1{,}82 \text{ s}.$$

b) Dacă $\Delta h = 10\% = 0{,}1$, atunci

$$\tau = \frac{2 \cdot 340 \cdot 1{,}1}{10}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1{,}1}}\right) = 74{,}8 \cdot 0{,}0466 \simeq 3{,}49 \text{ s}.$$

1.1.17. a) Traiectoria corpului pînă la a doua cădere pe Pămînt este indicată în figura 1.17.

În momentul căderii în punctul B, corpul are vitezele

$$v_x = v_{0x} = 10 \text{ ms}^{-1}, \; v_y = gt = g\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 19{,}6 \text{ ms}^{-1}.$$

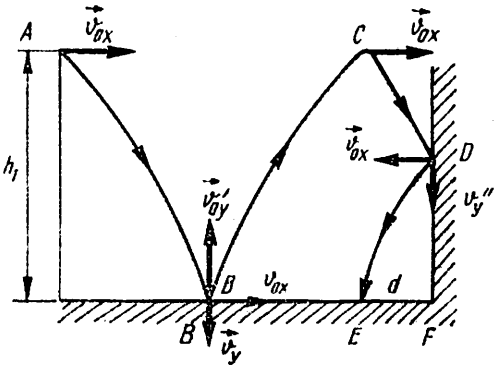


Fig. 1.17.

Prin ciocnirea elastică în punctul B, se schimbă sensul vitezei v_y devenind v_{0y}. Din B corpul se ridică la înălțimea

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{19{,}6^2}{19{,}6} = 19{,}6 \text{ m} = h_1.$$

b) Pînă în punctul C de înălțime maximă, corpul se ridică în timpul

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = 2 \text{ s}$$

parcurgînd pe orizontală distanța $d_1 = v_{0x}t_1 = 20$ m.

În punctul D, corpul ajunge cu:

$$v_x = v_{0x} = 10 \text{ ms}^{-1} \text{ și } v_y = g\frac{l - 40}{v_{0x}} = 9{,}8 \text{ ms}^{-1}.$$

Distanța EF de la perete va fi

$$d = EF = \frac{v_y}{g}v_{0x} = 10 \text{ m}.$$

1.1.18. a) $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ sau

$$\frac{g\tau_2^2}{2} = v_s\tau_1 = v_s(\tau - \tau_2); \; g\tau_2^2 + 2v_s\tau_2 - 2v_s\tau = 0.$$

De unde

$$\tau_2 = -\frac{v_s}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_s^2 + 2gv_s\tau} = -\frac{v_s}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\tau\left(\frac{v_s}{g}\right)},$$

$$\tau_2 = -34{,}7 + \sqrt{1\,620{,}49} = -34{,}7 + 40{,}2 = 5{,}5 \text{ s}.$$

$$h = \frac{9{,}8 \cdot 5{,}5}{2} = \frac{296{,}45}{2} = 148{,}22 \text{ m}.$$

b) Considerînd $\tau_2 = \tau$ obținem:

$$h_2 = \frac{9{,}8 \cdot 36}{2} = 176{,}2 \text{ m}.$$

$$\Delta h = \frac{h_2 - h}{h} 100\% = \frac{2\,820}{148}\% = 19{,}2\%.$$

1.1.19. a) În momentul lansării, viteza obiectului este egală cu viteza elicopterului:

$$v_1 = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 384{,}16} = 39{,}2 \text{ ms}^{-1}.$$

După lansare, obiectul se mai ridică pe verticală în sus pe înălțimea

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = 78{,}4 \text{ m}; \quad h_t = h + h_1 = 462{,}56 \text{ m}.$$

b) $t = \frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{2h_t}{g}} = 4 + 9{,}7 = 13{,}7$ s,

$$v = g \cdot t_c = 9{,}8 \cdot 9{,}7 = 93{,}06 \text{ ms}^{-1}.$$

1.1.20. a) Fie m masa corpului. Accelerația corpului în căderea în aer se află din relația

$$ma_1 = mg - F_r = m(g - 0{,}28571\ g),$$

$$a_1 = g(1 - 0{,}28571) = 7 \text{ ms}^{-2};$$

$$v_1 = \sqrt{2a_1h_1} = 7 \text{ ms}^{-1}.$$

b) Accelerația de frînare a corpului în apă se află din formula:

$$v_c\rho_c a_2 = V_c\rho_a g - V_c\rho_c g; \quad a_2 = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c} g = \frac{2}{3} g;$$

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{49}{\frac{4}{3}g} = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3{,}75 \text{ m}.$$

1.1.21. a) $ma = F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)$;

$$a = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g.$$

b) Pentru $F = F_0$ avem $a = 0$, de unde

$$F_0 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

1.1.22. a) $ma' = F \cos \alpha - \mu(mg + F \sin \alpha)$.

$$a' = \frac{F}{m}(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g.$$

b) $F_0' = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$.

Comparînd rezultatele vedem că $a' < a$, iar $F_0' > F_0$.

1.1.23. Știm că variația impulsului particulei este egală cu impulsul forței

$$\vec{mv} - \vec{mv_0} = \vec{F}\tau.$$

Din figura 1.21 se vede că vectorul $\overrightarrow{AD} = \vec{F}_\tau$ este egal ca mărime și sens cu vectorul $m(\vec{v} - \vec{v}_0)$. Forța $\vec{F}$ este orientată deci pe normala la suprafața peretelui.

Din triunghiul ABC se obține:

$$BC = |m\vec{v} - m\vec{v}_0| = m|\vec{v}_0|\cos\alpha + m|\vec{v}|\cos\alpha;$$

cum $|\vec{v}| = |\vec{v}_0| = v_0$ avem:

$$F_\tau = \sqrt{2}\, mv_0 \text{ sau } F = \sqrt{2}\frac{mv}{\tau} = 70{,}5 \text{ N}.$$

Noi am calculat forța $\vec{F}$ care acționează asupra bilei din partea peretelui. Conform legii a treia a lui Newton, bila va acționa asupra peretelui cu o forță $\vec{F}'$ egală și de sens contrar cu $\vec{F}$:

$$\vec{F}' = -\vec{F}.$$

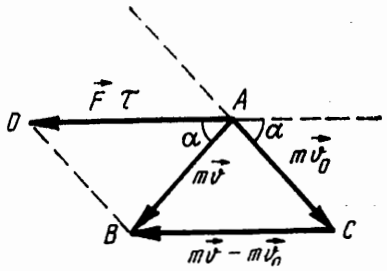


Fig. 1.21.

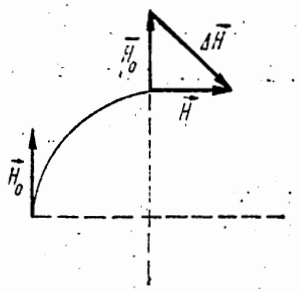


Fig. 1.22.

1.1.24. a) $T = 4t = 10$ s, $\nu = \frac{1}{T} = 0{,}1\ s^{-1}$; $\omega = 2\pi\nu = 0{,}628\ \frac{rad}{s}$.

b) Valoarea vitezei corpului pe cerc este

$$v = \frac{2\pi r}{4t} = 2\ ms^{-1}.$$

Pentru calculul variației impulsului, trebuie să știm valoarea și sensul impulsului la momentele $t = 0$ și $t = 2{,}5$ s (fig. 1.22):

$$|\vec{H}_0| = |\vec{H}| = mv = 1\ kg\,ms^{-1},$$

$$\Delta\vec{H} = \vec{H} - \vec{H}_0.$$

Din figura 1.22 se vede că valoarea lui $\Delta\vec{H}$ este

$$|\Delta\vec{H}| = \sqrt{|\vec{H}_0|^2 + |\vec{H}|^2} = 1{,}41\ kg\ ms^{-1}.$$

1.1.25. a) Notăm cu D lungimea diametrului OO' (vezi fig. 1.23); cînd corpul coboară pe verticală atinge cercul în punctul O' după timpul

$$t_0 = \sqrt{\frac{2D}{g}}. \qquad (1)$$

Deplasarea pe coarda OA se face, în absența frecării, cu accelerația

$$a = g \sin \alpha, \sin \alpha = \frac{h}{l}.$$

Deci

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}. \quad (2)$$

Din figura 1.23 rezultă:

$$\sin \beta = \frac{D - h}{\sqrt{D^2 - l^2}} = \cos \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{h^2}{l^2} + \frac{D^2 + h^2 - 2Dh}{D^2 - l^2} = 1,$$

$$D^2h^2 - 2l^2Dh + l^4 = 0,$$

$$h = \frac{2l^2D \pm \sqrt{4l^4D^2 - 4l^4D^2}}{2D^2} = \frac{l^2}{D}.$$

Deci $l^2 = hD$.
Înlocuind în relația (2) avem

$$t = \sqrt{\frac{2D}{g}} = t_0.$$

b) În cazul cînd coeficientul de frecare $\mu > 0$: $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$,

$$t_f = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}} = \sqrt{\frac{2D}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha}}.$$

Pentru $\alpha = \pi/2$, adică pentru cazul cînd mișcarea are loc pe diametrul OO', $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ și

$$t_f = t_0.$$

Raportul $\frac{t_0}{t_f} = \sqrt{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha}$.

1.1.26.

a) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t = 1{,}57 \cdot 2 = 3{,}14$ rad/s.

b) $v = \omega \cdot r = 2{,}355$ ms^{-1}.

c) $a_t = \varepsilon r = 1{,}1775$ ms^{-2}.

d) $a_n = \omega^2 r = \varepsilon^2 t^2 r = 7{,}3947$ ms^{-2}.

e) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \varepsilon^4 t^4 r^2} = \varepsilon r \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4} = a_t \sqrt{1 + 39{,}4384} =$

$= 1{,}1775 \cdot 6{,}36 = 7{,}4899$ ms^{-2}.

f) unghiul α dintre rază cercului și accelerația totală se află din relația

$$\sin \alpha = \frac{a_t}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}}.$$

Pentru $t = 2$ s: $\sin \alpha = \frac{1}{6{,}36} = 0{,}1572$;

$$\alpha = \text{arc sin } 0{,}1572 \simeq 9°3'.$$

1.1.27. a) $v = v_0 + F/m \cdot t$,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \frac{2F}{m}tv_0 + \frac{F^2}{m^2}t^2\right) = E_c,$$

$$mv_0^2 + 2Ftv_0 + \frac{F^2}{m}t^2 - 2E_c = 0,$$

$$m^2v_0^2 + 2(Ftv_0 - E_c) + F^2t^2 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{-2(Ftv_0 - E_c) \pm 2\sqrt{F^2t^2v_0^2 - 2Ftv_0E_c + E_c^2 - F^2t^2v_0^2}}{2v_0^2}$$

$$m_{1,2} = 20 \text{ kg}.$$

b) $s = v_0t + \frac{at^2}{2} = 75$ m; $a = \frac{F}{m} = 0{,}5$ ms^{-2},

c) $L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 10(100 - 25) = 750$ J,

$$v = v_0 + at = 5 + 0{,}5 \cdot 10 = 10 \text{ ms}^{-1},$$

sau

$$L = F \cdot s = 75 \cdot 10 = 750 \text{ J}.$$

1.1.28 a) $T = 27{,}322 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 2{,}36 \cdot 10^6$ s,

$$v_L = \frac{2\pi R_L}{T} = 1\,022 \text{ ms}^{-1},$$

b) $a_n = \frac{v_L^2}{R_L} = 2{,}73 \cdot 10^{-2}$ ms^{-2}.

c) $\frac{R_L}{R_p} = \frac{3{,}84 \cdot 10^8}{6{,}37 \cdot 10^6} = 60$; $\left(\frac{R_L}{R_p}\right)^2 = 3\,600$; $g = a_n\left(\frac{R_L}{R_p}\right)^2 = 9{,}828$ ms^{-2}.

Obținerea acestui rezultat indică precizia destul de mare cu care cunoaștem mărimile T, R_L și R_p.

1.1.29. a) Calculăm viteza medie

$$\bar{v} = \frac{AB}{t}; \; t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{3v_1} + \frac{2AB}{3v_2} = \frac{AB}{3} \cdot \frac{v_2 + 2v_1}{v_1v_2};$$

$$\bar{v} = \frac{3v_1v_2}{v_2 + 2v_1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 8}{8 + 4} = 4 \text{ ms}^{-1}.$$

$$AB = \bar{v} \cdot t = 1\,800 \cdot 4 = 7\,200 \text{ m} = 7{,}2 \text{ km}.$$

b) $v^2 = v_1^2 + 2g\frac{2AB}{3}\sin\alpha$; $\sin\alpha = \frac{3(v^2 - v_1^2)}{4gAB}$;

$$\sin\alpha = \frac{3 \cdot 480}{4 \cdot 10 \cdot 4800} = \frac{3}{4}10^{-2} = 0{,}0075.$$

$$\alpha = \text{arc sin } 0{,}0075 \simeq 26'.$$

1.1.30. a) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = 4{,}9$ ms^{-2};

$$v = \sqrt{2ah} = 7 \text{ ms}^{-1}.$$

b) $h_{max} = 2h + \frac{v^2}{2g} = 10 + \frac{49}{2 \cdot 9,8} = 12,5$ m.

1.1.31. a) Accelerația sistemului este:

$$a_1 = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g.$$

După parcurgerea distanței h, viteza corpurilor este

$$v_1 = \sqrt{2a_1 h} = \sqrt{2 \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} gh}.$$

Corpul de masă m continuă să se deplaseze uniform încetinit cu accelerația de frînare,

$$a_2 = \mu g,$$

$$d = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{m_2 - \mu m_1}{(m_1 + m_2)\mu} h; \quad \mu[d(m_1 + m_2) + m_1 h] = m_2 h,$$

$$\mu = \frac{m_2 h}{(m_1 + m_2)d + m_1 h} = \frac{30 \cdot 4}{80 \cdot 5 + 50 \cdot 4} = 0,2.$$

b) $a_1 = \frac{30 - 10}{80} = \frac{1}{4} g; \quad a_2 = 0,2\ g;$

$$v_1 = \sqrt{2g} \simeq 4,45 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t = \frac{v_1}{a_1} + \frac{v_2}{a_2} = v_1 \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \simeq 4,09 \text{ s}.$$

1.1.32. Din figura 1.25 se vede că greutatea $\vec{G}$ se compune din forța atracției universale $\vec{G}_a$ și forța centrifugă $\vec{F}_{cf}$:

$$\vec{G} = \vec{G}_a + \vec{F}_{cf}; \quad G = \sqrt{\vec{G}_a^2 + \vec{F}_{cf}^2 - 2\vec{G}_a \vec{F}_{cf} \cos \varphi};$$

$$F_{cf} = m\omega^2 R,$$

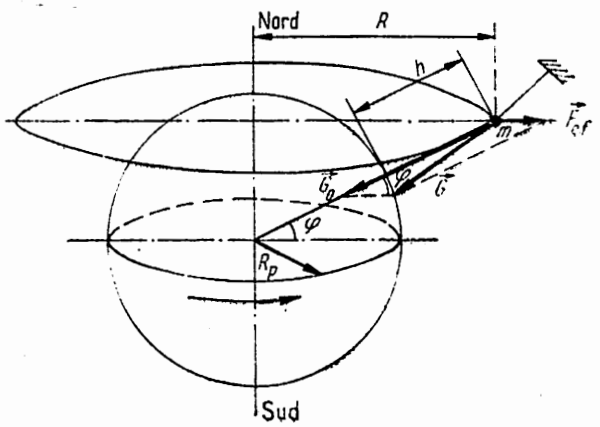


Fig. 1.25.

unde $R = (R_p + h)\cos\varphi$; $F_{cf} = \dfrac{4\pi^2 m(R_p + h)\cos\varphi}{T^2}$;

$$G_a = \gamma \frac{mM}{(R_p + h)^2},$$

$$G = m\sqrt{\gamma^2 \frac{M^2}{(R_p + h)^2} + \frac{16\pi^2(R_p + h)^2\cos^2\varphi}{T^4} - 8\frac{\gamma\pi^2 M\cos^2\varphi}{T^2(R_p + h)}}.$$

Dacă $\varphi = \pm \pi/2$, adică la polul Nord, respectiv la polul Sud,

$$G = \gamma \frac{mM}{(R_p + h)^2} = G_a.$$

Dacă $\varphi = 0$, adică la ecuator,

$$G = G_a - F_{cf} = m\left(\frac{\gamma M}{(R_p + h)^2} - 4\pi^2 \frac{R_p + h}{T^2}\right).$$

Pentru $h = 0$,

$$G = m\left(g - 4\pi^2 \frac{R_p}{T^2}\right); \quad R_p = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad T = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}26 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

$$4\pi^2 \frac{R_p}{T^2} = \omega^2 R_p = 0{,}0336.$$

Adică la ecuator, acceleraţia gravitaţională este cu $\dfrac{0{,}034 \cdot 100}{g}\% = 0{,}34\%$ mai mică decît la poli.

Prezenţa acceleraţiei centripete şi respectiv, a forţei centrifuge de inerţie constituie o abatere a sistemelor de referinţă legate de Pămînt de la referenţialele inerţiale. Pe baza calculelor efectuate prin rezolvarea acestei probleme, putem spune că sistemele de referinţă legate de Pămînt sînt inerţiale cu o precizie de 0,3%.

1.1.38. a) De regulă, această problemă se rezolvă pe următoarea schemă:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha). \tag{1}$$

De unde $\cos\alpha = 1 - \dfrac{v_0^2}{2gl}$. (2)

Considerînd masa m pentru bara B (fig. 1.26) concentrată la distanţa l de punctul **O**, obţinem acelaşi unghi în ambele cazuri.

Există însă o greşeală de principiu în schema de mai sus. În procesul de oprire a vagonului, asupra corpului de masă m (cazul A) şi asupra barei B acţionează o forţă de inerţie, iar energia cinetică poate în principiu să varieze.

În valoare absolută, forţa de inerţie este

$$F_i = m|\vec{a}| = m\frac{v_0}{\tau}.$$

Această forţă creează un moment de rotaţie:

$$M_i = F_i \cdot l = \frac{mv_0}{\tau} l = J\varepsilon,$$

unde ε este accelerația unghiulară, iar J este momentul de inerție față de axa ce trece prin punctul O.

$$\varepsilon = \frac{mv_0 l}{\tau \cdot J}.$$

Deci în momentul opririi trenului, atît masa m cît și centrul barei B vor avea viteza unghiulară

$$\omega = \varepsilon \cdot \tau = \frac{mv_0 l}{J}.$$

Energia cinetică care trebuie egalată cu energia potențială este

$$E_c = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2 l^2}{2J}.$$

În cazul A, momentul de inerție este $J = ml^2$.

$$E_c = \frac{m^2 v_0^2 l^2}{2ml^2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Deci pentru unghiul α este valabilă formula (2).

b) Pentru bara B, momentul de inerție este $J = \frac{m(2l)^2}{3} = \frac{4ml^2}{3}$;

$$E_c = \frac{3m^2 v_0^2 l^2}{8l^2 m} = \frac{3}{4}\,\frac{mv_0^2}{2},$$

$$\frac{3}{4}\,\frac{mv_0^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha),$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{v_0^2}{gl}. \qquad (3)$$

Deși cele două sisteme au aceleași mase și centrele de greutate la aceeași distanță de centrul de rotație, se obțin unghiuri diferite datorită faptului că momentele de inerție J sînt diferite.

1.1.34. a) Datorită acțiunii forței de inerție $\vec{F}_i = -m\vec{a}$, suprafața benzinei din rezervor va face unghiul α cu orizontala (fig. 1.27). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ma}{mg}$; $a = g\operatorname{tg}\alpha = 2\ \text{m s}^{-2}$;

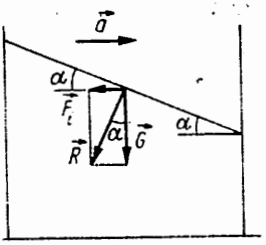


Fig. 1.27.

$$a = \mu g = \operatorname{tg}\alpha \cdot g; \quad \mu = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}2.$$

b) $v = v_0 - at = 0$; $t = \frac{v_0}{a} = 15$ s.

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = 22{,}5\ \text{m}.$$

1.1.35. a)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2,$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2',$$

$$v_1 + v_1' = v_2',$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

b) $\frac{v_1'}{v_1} = \frac{1}{3} = \frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1}$; $\frac{m_1}{m_2} = 2$.

c) $E_{c2}' = \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_2}{2} \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$,

$E_{c2}' = E_{c1} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$, $m_1 = 2m_2$;

$E_{c2}' = E_{c1} \frac{4 \cdot 2m_2^2}{(3m_2)^2} = \frac{8}{9} E_{c1} = 4$ J.

1.1.36. a) Din formulele

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1; \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

se vede că dacă $m_1 = m_2$,

$$v_1' = 0; \quad v_2' = v_1.$$

Adică prin această ciocnire, încetinirea este cea mai eficace, deoarece la o singură ciocnire, neutronul își pierde practic întreaga energie cinetică cedînd-o atomului de hidrogen.

b) Dacă $m_2 = 12\ m_1$,

$$v_1' = \frac{11}{13} v_1; \quad v_2' = \frac{2}{13} v_1.$$

Deci energia neutronului după ciocnire este

$$E_{c1}' = \frac{121}{169} E_{c1}, \quad E_{c1} - E_{c1}' = \frac{48}{169} E_{c1}.$$

Se pierde deci numai $\sim 30\%$ din energia inițială.

1.1.37. a) Față de referențialul S legat de vagon, bila va cădea pe verticală (figura 1.28), deoarece viteza relativă a bilei față de vagon în momentul căderii este zero. Față de referențialul S', în momentul căderii, bila are viteza $\vec{v}_0$ egală cu viteza trenului față de pămînt și deci va avea o traiectorie corespunzătoare aruncării cu viteza orizontală $\vec{v}_0$ de la înălțimea h.

Timpul de cădere a bilei este

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}67 \text{ s},$$

$$d = v_0 t = 20 \cdot 0{,}67 = 13{,}4 \text{ m}.$$

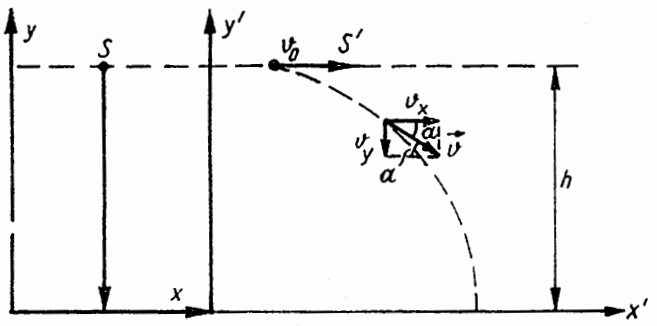


Fig. 1.28.

b) După $t = 0{,}4$ s, $v_y = 0{,}4\ g = 3{,}92$ ms^{-1}, $v_x = v_0 = 20$ ms^{-1};

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 20{,}1 \text{ ms}^{-1}; \quad \text{tg } \alpha = v_y/v_x = 0{,}196;$$

$$\alpha = \text{arc tg } 0{,}196 = 11°.$$

1.1.38. a) Asupra corpului A acționează greutatea $\vec{mg}$ și reacția $\vec{R}$ din partea firului. Rezultanta acestor forțe $\vec{F}$ este forța centripetă, orientată perpendicular pe axa de rotație OB.

$$F = mg \text{ tg } \varphi = m\omega^2 AO \sin \varphi = m\omega^2 l \sin \varphi,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{g}{\omega_1^2 l} = \frac{9{,}8}{49 \cdot 0{,}4} = 1/2.$$

Deci $\varphi_1 = 60°$.

b) $\cos \varphi_2 = \dfrac{g}{\omega_2^2 l} = \dfrac{9{,}8}{1{,}96 \cdot 0{,}4} = 12{,}5.$

Este evident că un asemenea rezultat este fără sens.
De fapt, noi am obținut ecuația

$$mg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = m\omega^2 l \sin \varphi$$

sau

$$g \sin \varphi - \omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

care se împarte în două ecuații:

$$\omega^2 l \cos \varphi - g = 0, \quad \sin \varphi = 0.$$

Prima ecuație are soluția

$$\cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 l}, \tag{1}$$

iar a doua ecuație are soluția

$$\varphi = 0. \tag{2}$$

Cum $g/\omega^2 l > 1$, rămîne singura soluție valabilă $\varphi = 0$. Adică firul nu se abate de la poziția verticală. Acest rezultat este valabil pentru orice ω care satisface inegalitatea

$$\omega < \sqrt{g/l}. \tag{3}$$

Dacă

$$\omega > \sqrt{g/l}, \tag{4}$$

atunci atît soluția (1) cît și soluția (2) reprezintă poziții de echilibru ale firului, numai că soluția (2) va indica o poziție de echilibru instabil.

Se poate arăta că dacă este satisfăcută inegalitatea (3), atunci soluția (2) indică o poziție de echilibru stabil.

În acest sens, trebuie văzut echilibrul momentelor forței de greutate $\vec{mg}$ și a forței centrifuge $m\omega^2 l \sin \Delta\varphi$ față de punctul O (fig. 1.29), unde $\Delta\varphi$ este un unghi mic pe care-l face firul cu verticala.

$$M_1 = mgl \sin \Delta\varphi,$$

$$M_2 = m\omega^2 l^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi.$$

Dacă $M_1 > M_2$, atunci firul se întoarce în poziția verticală

$$mgl \sin \Delta\varphi > m\omega^2 l^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi.$$

$\Delta\varphi$ fiind mic putem considera $\cos \Delta\varphi = 1$ și obținem:

$$\omega < \sqrt{g/l},$$

adică relația (3) care indică condiția de echilibru stabil în poziția $\varphi = 0$.

1.1.39. Din figura 1.30 rezultă:

$$t_A = \sqrt{2H/g};\ t_B = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{1-\frac{h}{H}} + \sqrt{\frac{h}{H}}\right);$$

$$\frac{t_B}{t_A} = \sqrt{1-\frac{h}{H}} + \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Notăm cu $x = h/H$ și ridicăm la pătrat:

$$\left(\frac{t_B}{t_A}\right)^2 = 1 - x + x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 1 + 2\sqrt{x(1-x)}.$$

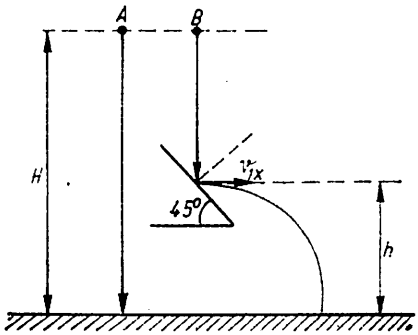


Fig. 1.30.

Se vede că raportul t_B/t_A va fi maxim dacă expresia

$$(1-x)x = x - x^2$$

va fi maximă. Această expresie poate fi scrisă sub forma

$$-(x - 1/2)^2 + \frac{1}{4}.$$

Deci t_B/t_A va fi maxim dacă

$$x = h/H = \frac{1}{2};\quad h = \frac{H}{2} = 19{,}6 \text{ m}.$$

b) Cînd corpul B se ciocnește de planul înclinat, viteza lui este

$$v_{1y} = \sqrt{2g(H-h)} = 19{,}6 \text{ ms}^{-1}.$$

Prin ciocnire

$$v_{1y} = v_{1x},$$

$$d = v_{1x}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 39{,}2 \text{ m}.$$

c) $v_A = \sqrt{2gH} = 19{,}6\sqrt{2}$ ms^{-1},

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2g(H-h) + 2gh} = \sqrt{2gH} = 19{,}6\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}.$$

Din legea conservării energiei era clar că cele două corpuri trebuie să aibă aceeași viteză cînd ajung la sol.

1.1.40. a) Din figura 1.31 se obține

$$\sphericalangle \alpha = \pi - \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}\pi = 135°.$$

b) $mv_1 = \sqrt{(mv_1')^2 + (mv_2')^2}$; $v_1 = \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2} = v_1'\sqrt{2} = 7{,}05$ ms^{-1}.

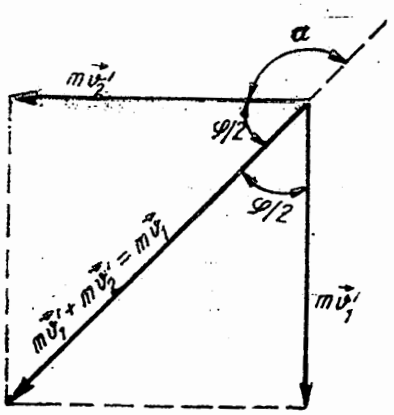


Fig. 1.31.

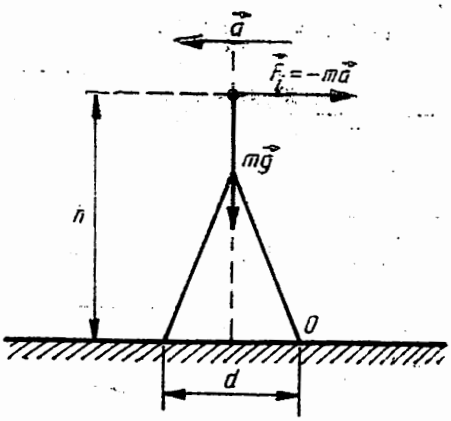


Fig. 1.32.

1.1.41. a) În timpul opririi, asupra omului va acționa pe lîngă greutatea $\vec{mg}$ orientată pe verticală și forța de inerție $\vec{F}_i = -\vec{ma}$, unde $\vec{a}$ este accelerația de frînare a autobuzului (figura 1.32).

Pentru ca omul să se poată menține în poziție verticală trebuie ca momentele forțelor $\vec{F}_i$ și $\vec{mg}$ față de punctul O să fie egale și de sensuri opuse.

$$mg\frac{d}{2} = mah; \quad a = \frac{gd}{2h} = 2{,}1 \text{ ms}^{-2}.$$

$$t = \frac{v_0}{a} = 10 \text{ s}.$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{441}{4{,}2} = 105 \text{ m}.$$

b) $a_{max} = \frac{gd_{max}}{2h} = 3{,}5 \text{ ms}^{-2}$;

$$t_{min} = \frac{v_0}{a_{max}} = \frac{21}{6{,}5} = 6 \text{ s}.$$

1.1.42. a) $G_1 = m(g + a_1) = 5 \cdot 15 = 75$ N.
b) $G_2 = m(g - a_2) = 5 \cdot 6 = 30$ N.
c) $G_3 = m(g - a_3) = 5 \cdot 7{,}8 = 39$ N.
d) $G_4 = m(g + a_4) = 5 \cdot 17 = 85$ N.

1.1.43. a) $F - m_2g = (m_1 + m_2)a_1$,

$$a_1 = \frac{F_2 - m_2g}{m_1 + m_2} = \frac{245 - 196}{98} = 0{,}5 \text{ ms}^{-2}.$$

Viteza sistemului în momentul încetării acțiunii forței F este:

$$v_0 = a_1t_1 = 5 \text{ ms}^{-1}.$$

După încetarea forței F, sistemul se deplasează cu accelerația

$$a_2 = \frac{m_2g}{m_1 + m_2} = \frac{20 \cdot 9{,}8}{98} = 2 \text{ ms}^{-2},$$

$$t = 2\frac{v_0}{a_2} = 5 \text{ s}.$$

b) $s = 2\frac{v_0^2}{2a_2} = 12{,}5$ m.

c) Înaintea încetării acțiunii forței F:

$$\begin{aligned} F - T_1 &= m_1 a_1, \\ T_1 - m_2 g &= m_2 a_1, \end{aligned} \qquad T = 206 \text{ N}.$$

După încetarea acțiunii forței F

$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2 a_2, \\ T_2 &= m_1 a_2, \end{aligned} \qquad T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 156 \text{ N}.$$

1.1.44. a) Deoarece ambele forțe acționează pe același suport, accelerația barei este

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m}; \quad F_1 - T = m_x a; \; m_x = m\frac{x}{l};$$

$$T = F_1 - m_x a = F_1 - \frac{F_1 - F_2}{l} x.$$

Pentru $x = 0$; $T = F_1$; iar pentru $x = l$, $T = F_2$.
Deci tensiunea T scade liniar de la F_1 la F_2.
b) Dacă $F_1 = F_2 = F$ pentru orice secțiune transversală a barei vom avea

$$F - T = 0; \; T = F.$$

Adică tensiunea T este aceeași independent de distanța x.

1.1.45. Fie v viteza bărcii față de mal:

$$l = vt$$

unde t este timpul în care omul se deplasează în barcă de la un capăt la altul.

Sistemul om + barcă poate fi considerat închis și deoarece inițial se afla în repaus, putem scrie:

$$mv_0 - Mv = 0; \; v = \frac{m}{M} v_0.$$

În timpul t, omul se deplasează față de mal pe distanța $L - l$, deci

$$t = \frac{L - l}{v_0}.$$

De unde

$$l = vt = \frac{m}{M} v_0 \frac{(L - l)}{v_0} = \frac{m}{M}(L - l_0),$$

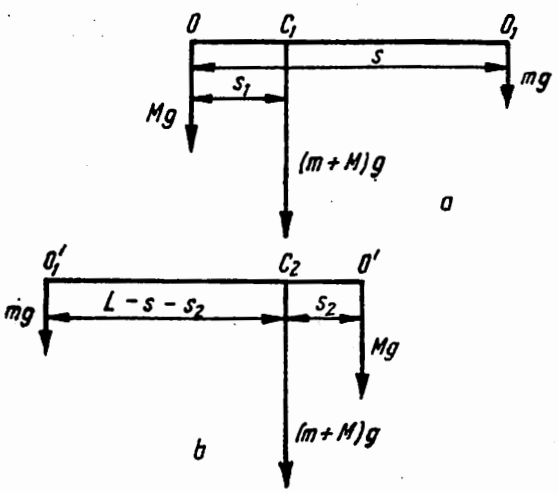


Fig. 1.35.

$$l\left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{m}{M} L; \; l = \frac{m}{m + M} L.$$

Problema se mai poate rezolva și altfel. Deoarece sistemul om + barcă este închis, adică asupra lui nu acționează forțe exterioare, centrul lui de greutate nu-și schimbă poziția. Acest lucru se indică în figura 1.35.

Centrul de greutate al bărcii se deplasează cu distanța

$$l = OO' = s_1 + s_2.$$

Momentele forțelor mg și Mg față de centrele de greutate C_1 și C_2 sînt egale ca mărime și de sens contrar:

$$Mgs_1 = mg(s_1 + s_2) \qquad (1)$$

$$Mgs_2 = mg(L - s_3 - s). \qquad (2)$$

De unde

$$s_1 = \frac{m}{M+m}s,$$

$$s_2 = \frac{m}{m+M}(L-s);\ l = s_1 + s_2 = \frac{m}{m+M}L.$$

1.1.46. a) Dacă $m_1 = m_2$, sistemul este în repaus și

$$m_1 g - T = 0;\ T - m_2 g = 0;\ T = m_1 g = m_2 g = 49\ \text{N}.$$

b) Dinamometrul va indica tensiunea în fir. Dacă din corpul A se ia masa $\Delta m_1 = 2$ kg avem:

$$m_1' = m_1 - \Delta m_1,$$

$$m_2' = m_2 + \Delta m_2 = m_1 + \Delta m_2.$$

Accelerația sistemului va fi

$$a = \frac{m_2' - m_1'}{m_1' + m_2'}g,$$

$$m_2' g - T' = m_2' a = m_2' g \frac{m_2' - m_1'}{m_1' + m_2'};\quad T' = T$$

de unde:

$$\frac{2(m_1 - \Delta m_1)(m_1 + \Delta m_2)}{m_1 - \Delta m_1 + m_1 + \Delta m_2} = \frac{2(m_1 - \Delta m_1)(m_1 + \Delta m_2)}{2m_1 - \Delta m_1 + \Delta m_2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (5 + \Delta m_2)}{8 + \Delta m_2}$$

sau

$$\frac{30 + 6\Delta m_1}{8 + \Delta m_2} = 5;\ \Delta m_2 = 10\ \text{kg}.$$

Deci $m_1' = 3$ kg; $m_2' = 15$ kg;

$$T' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 15}{18}g = \frac{90}{18}g = 5g = 49\ \text{N}.$$

1.1.47. La momentul $t = 0$, poziția centrului de greutate se află din condiția (figura 1.37):

$$x_1 m_1 g = x_2 m_2 g, \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 2R, \qquad (2)$$

$$x_1 = 2x_2,$$

$$2x_2 + x_2 = 2R;\ x_2 = \frac{2}{3}R;\ x_1 = \frac{4}{3}R.$$

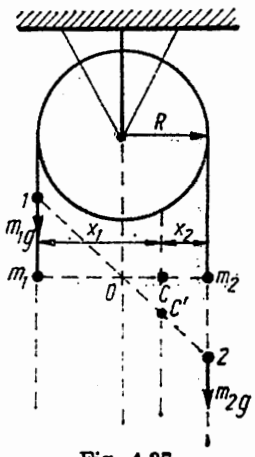


Fig. 1.37.

Relațiile (1) și (2) fiind valabile pentru orice poziție *1* și *2* a corpurilor A și B, rezultă că centrul de greutate al celor două corpuri se deplasează pe verticala CC' în jos.

După un timp t de la momentul inițial, centrul de greutate C a parcurs distanța,

$$y = CC',$$

iar corpurile A și B au parcurs aceeași distanță

$$d = \frac{at^2}{2}, \quad \text{unde} \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{2m_1 - m_1}{3m_1} g = g/3,$$

deci $d = \frac{gt^2}{6}$.

Din figura 1.37 se vede egalitatea

$$\frac{d}{R} = \frac{v}{x_1 - R} = \frac{3y}{R}, \quad y = \frac{d}{3} = \frac{gt^2}{18}.$$

Centrul de greutate se află în repaus sau într-o mișcare rectilinie și uniformă numai dacă sistemul este închis, adică dacă forțele exterioare care acționează asupra fiecărui corp se echilibrează reciproc. În cazul de față, corpurile A și B se află sub acțiunea greutății proprii și a tensiunii T din fir, care nu se echilibrează reciproc. În acest sens, sistemul din figura 1.37 lăsat liber nu poate fi considerat sistem închis.

1.1.48. a) $h = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{2h}{t^2} = 1{,}4$ ms^{-2};

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g; \quad \mu = \frac{m_2 g - (m_1 + m_2)a}{m_1 g};$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} - \frac{(m_1 + m_2)a}{m_1 g} = 0{,}2.$$

b) $m_2 g - \mu m_1 g = 0$;

$$m_2 = \mu m_1 = 20 \text{ kg}.$$

1.1.49. a) $\frac{1}{2} kx^2 = mgh$; $k = \frac{2mgh}{x^2} = 1\,450$ Nm^{-2}.

b) $\omega = \sqrt{k/m} = 70$ rad/s;

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 11{,}15 \text{ Hz}.$$

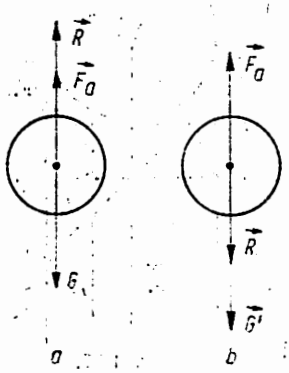


Fig. 1.38.

1.1.50. Dacă balonul coboară cu viteză constantă (figura 1.38):

$$Mg = F_a + R,$$

unde R este forța de rezistență a aerului.

După aruncarea unui corp cu masa m din încărcătura balonului

$$(M - m)g = F_a - R.$$

De unde

$$2Mg - mg = 2F_a; \quad m = 2\left(M - \frac{F_a}{g}\right).$$

1.1.51. a) Pentru ca pendulul să poată efectua o rotație completă în plan vertical (fig. 1.39) este necesar ca

$$\frac{mv_B^2}{l} = mg;\ v_B^2 = lg.$$

Din legea conservării energiei

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv_B^2}{2};\quad v_0^2 = 4gl + lg = 5gl;$$

$$v_0 = \sqrt{5gl};\ H_0 = m\sqrt{5gl}.$$

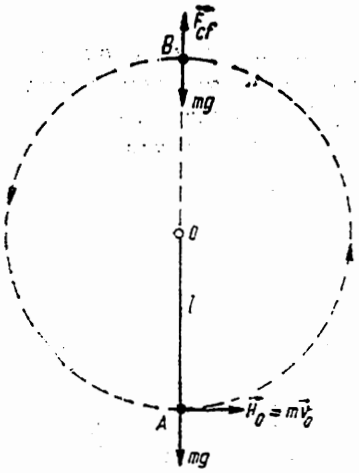


Fig. 1.39.

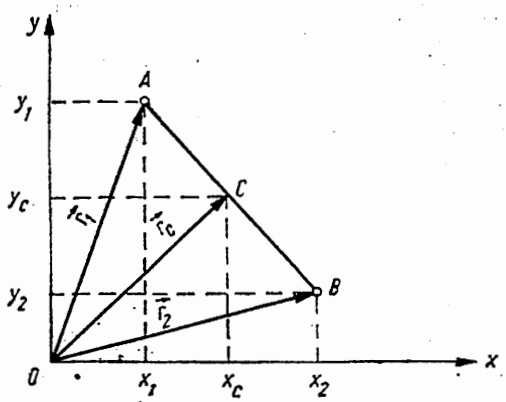


Fig. 1.40.

b) Cînd pendulul trece din nou prin poziția de echilibru:

$$T = mg + \frac{mv_0^2}{2} = mg + 5mg = 6mg.$$

1.1.52. Ecuația unei drepte în planul xOy este

$$y = ax + b.$$

Dacă dreapta trece prin punctele A și B, atunci (fig. 1.40)

$$y_1 = ax_1 + b;\quad y_2 = ax_2 + b;$$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};\quad b = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}.$$

Deci dacă dreapta trece prin punctele A și B, ecuația ei este

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,x + \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}. \qquad (1)$$

Coordonatele punctului C sînt:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2};\quad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Pentru ca punctul C să se afle pe dreaptă (1) trebuie ca

$$y_c = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_c + \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{m_1 y_1 (x_1 - x_2) + m_2 y_2 (x_1 - x_2)}{(m_1 + m_2)(x_1 - x_2)} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Deci punctul C se află pe dreapta AB

$$CA = \sqrt{(y_1 - y_c)^2 + (x_1 - x_c)^2}, \quad CB = \sqrt{(y_2 - y_c)^2 + (x_2 - x_c)^2}.$$

$$y_1 - y_c = y_1 - \frac{m_1 y_1 - m_1 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (y_1 - y_2)}{m_1 + m_2},$$

$$x_1 - x_c = \frac{m_2 (x_1 - x_2)}{m_1 + m_2}, \quad x_2 - x_c = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}, \quad y_2 - y_c = \frac{m_1 (y_2 - y_1)}{m_1 + m_2},$$

$$CA = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}; \quad CB = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2};$$

$$\frac{CA}{CB} = m_2/m_1.$$

1.1.53. Dacă S este un referențial inerțial, atunci S' este la fel inerțial numai în cazul cînd acesta se deplasează rectiliniu și uniform, cu viteza $\vec{V}$ = const. față de S. Fie $m_i (i = 1, 2, \ldots n)$ masele corpurilor ce compun sistemul considerat și $\vec{v}_i$ viteza corespunzătoare față de referențialul S.

Față de referențialul S' vom avea:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \vec{V},$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'^2 + E_p.$$

Deoarece energia potențială E_p depinde numai de poziția relativă a corpurilor de masă m_i, aceasta nu depinde de sistemul de referință.

$$E' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} (\vec{v}_i + \vec{V})^2 + E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^2 + \vec{V} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + E_p.$$

Din $\vec{V}$ = const., rezultă:

$\frac{M\vec{V}^2}{2}$ = const., unde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ masa sistemului, iar $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{H}$, impulsul total al sistemului.

Dacă în referențialul S, energia este constantă, înseamnă că sistemul este închis și deci impulsul total se conservă:

$$\vec{H} = \text{const.} \text{ și deci } \vec{H} \cdot \vec{V} = \text{const.}$$

Deci

$$E' = E + \frac{M\vec{V}^2}{2} + \vec{V}\vec{H} = \text{const.}$$

1.1.54. Fie E energia care trece în energia cinetică a sistemului proiectil plus tun. Dacă tunul este fixat de sol, întreaga energie E trece în energia cinetică a proiectilului:

$$E = \frac{mv_{p1}^2}{2}; \quad d_1 = \frac{v_{p1}^2}{g}\sin^2\alpha = \frac{2E}{mg}\sin^2\alpha.$$

Dacă tunul este liber, atunci o parte din energia E este preluată de tun:

$$E' = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{mv_{p2}^2}{2}, \text{ unde } \vec{V} \text{ este viteza tunului.}$$

Este clar că viteza $\vec{V}$ a tunului este orientată pe orizontală. Deoarece asupra sistemului tun plus proiectil nu acționează forțe exterioare, impulsul sistemului se conservă:

$$-MV + mv_{p2}\cos\alpha = 0; \quad V = \frac{m}{M}v_{p2}\cos\alpha,$$

$$E = \frac{M}{2}\frac{m^2}{M^2}v_{p2}^2\cos^2\alpha + \frac{mv_{p2}^2}{2} = \frac{mv_{p2}^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\cos^2\alpha\right),$$

$$v_{p2}^2 = \frac{2E}{m\left(1 + \frac{m}{M}\cos^2\alpha\right)},$$

$$d_2 = \frac{v_{p2}^2}{g}\sin^2\alpha = \frac{2E}{mg\left(1 + \frac{m}{M}\cos^2\alpha\right)}\sin^2\alpha,$$

$$\frac{d_1}{d_2} = 1 + \frac{m}{M}\cos^2\alpha.$$

1.1.55. La înălțimea $h/2$ de la sol, adică în punctul A (fig. 1.41), sfera va avea viteza $\vec{v}_1$ orientată pe verticală în jos și egală ca mărime cu $\sqrt{gh}$.

Se pune problema dacă aplicarea legii conservării impulsului pentru sistemul bilă + glonț este îndreptățită. Întrebarea este rațională, deoarece legea conservării impulsului

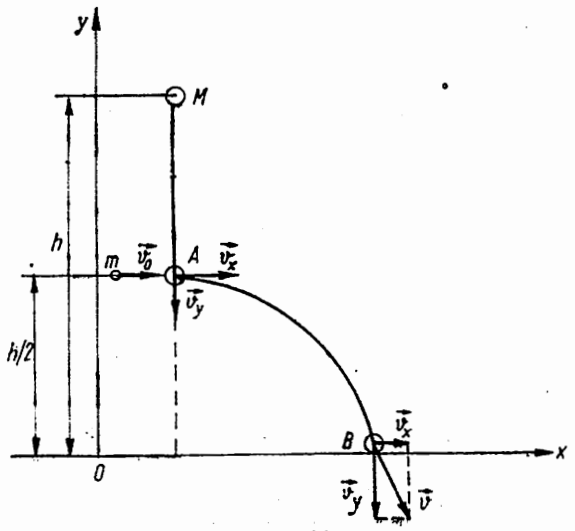


Fig. 1.41.

se aplică numai la sisteme închise, iar sistemul bilă + glonț se află în cîmpul gravitațional al Pămîntului și deci nu poate fi considerat sistem închis, legea conservării impulsului scriindu-se pentru momentele t_1 și $t_2 = t_1 + \Delta t$, unde Δt este timpul de ciocnire. Intervalul Δt fiind foarte mic, forțele gravitaționale schimbă starea sistemului foarte puțin. Cu precizarea neglijării acestei schimbări de stare a sistemului bilă + glonț, putem aplica legea conservării impulsului:

$$mv_0 = (M + m)v_x$$

și (1)

$$Mv_1 = (M + m)v_y.$$

Energia cinetică imediat după ciocnire este

$$E_{CA} = (m + M)\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}, \tag{2}$$

iar energia potențială:

$$E_{pA} = (m + M)gh/2. \tag{3}$$

În momentul cînd sistemul glonț + bilă ajunge în punctul B

$$E_{CB} = (m + M)\frac{v^2}{2}; \quad E_{pB} = 0. \tag{4}$$

Deci

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + gh. \tag{5}$$

Din (1):

$$v_x = v_0\frac{m}{m + M}; \quad v_B = v_1\frac{M}{m + M} = \sqrt{gh}\,\frac{M}{M + m}.$$

Introducînd în (5) avem

$$v = \sqrt{gh\left[\left(\frac{M}{M + m}\right)^2 + s\right] + \left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v_0^2}. \tag{6}$$

Pentru V relația este simplă: $V = \sqrt{2gh}$,

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{M + m}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{2gh}\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v_0^2} = \sqrt{2}.$$

Aflăm deci înălțimea h din condiția:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{m + M}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{2gh}\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v_0^2 = 2;$$

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 v_0^2 = 3 - \left(\frac{M}{m + M}\right)^2; \quad h = \frac{\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v_0^2}{g\left[3 - \left(\frac{M}{M + m}\right)^2\right]} = 111{,}64 \text{ m}.$$

1.1.56. Asupra platanului cu sfera A acționează forța G_1 orientată spre centrul Pămîntului,

$$G_1 = \gamma\frac{mM}{R_p^2} + \gamma\frac{m_2M}{R_p^2},$$

iar asupra platanului cu sfera B acționează atît masa Pămîntului cît și masa m_1 a sferei C,

$$G_2 = \gamma \frac{mM}{R_p^2} + \gamma \frac{mm_1}{d^2}.$$

Balanța fiind în echilibru,

$$G_1 = G_2; \quad \frac{m_2 M}{R_p^2} = \frac{mm_1}{d^2}.$$

De unde

$$M = \frac{mm_1 R_p^2}{m_2 d^2} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 10^3 (6{,}4)^2 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 10^{-7} (57)^2 \cdot 10^{-4}} \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

1.1.57. a) $\gamma \frac{mM}{(3/2R)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} m\, 3/2\ R,$

$$\gamma M = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{27}{8} R^3 = \gamma \frac{4\pi}{3} \rho R^3; \quad \rho = \frac{81\pi}{8\gamma T^2}.$$

b) $G = \frac{\gamma mM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T'^2} mR = 0,$

$$\gamma M = \frac{4\pi^2}{T'^2} R^3 = \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \rho'; \quad \rho' = \frac{3\pi}{\gamma T'^2},$$

$$\rho' = \frac{3 \cdot 3{,}14}{6{,}67 \cdot 10^{-11} (36)^2 \cdot 10^6} \simeq 110 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

1.1.58. Faptul că raționamentul nu este corect rezultă evident din relația

$$v = v_0 - at = 20 - 24 = -4 \text{ms}^{-1}.$$

Automobilul cu $v_0 = 20$ ms^{-1} nu se poate opri pe distanța $d = 80$ m, în timpul $t = 10$ s, pentru nici o valoare a lui μ.

Pentru ca automobilul să se oprească trebuie să parcurgă distanța minimă

$$d_{\min} = \frac{v_0}{2} t = 100 \text{ m}.$$

Dacă $d = d_{\min} = 100$ m,

$$\mu' g = \frac{400 - 200}{100} = 2 \text{ ms}^{-2}; \quad \mu' = \frac{2}{g},$$

$$v = v_0 - at = 20 - 20 = 0.$$

În acest caz, valoarea lui μ' este corectă.

1.1.59. a) $\left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}\right) - \left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}\right) = F \cdot (x_1 - x_0).$

Putem alege sistemul de referință $xO'y$ (fig. 1.43) în care $x_0 = 0$ și $v_0 = 0$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = F \cdot x_1.$$

Fie x_1 deplasarea pentru care forța elastică a arcului este egală și de sens contrar cu F. Atunci

$$x_1 = F/k.$$

În acest caz

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = kx_1^2; \quad \frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2}; \quad v_1 = x_1 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Deși pentru $x = x_1$, forțele se echilibrează, corpul nu se oprește, deoarece are viteza v_1. El va continua să se deplaseze pînă la distanța x_2 cînd vom avea egalitatea

$$\frac{kx_2^2}{2} = F \cdot x_2; \quad x_2 = \frac{2F}{k} = 2x_1.$$

După aceasta, corpul se deplasează în sens invers într-o mișcare accelerată pînă în punctul $x = x_1$ și încetinită pînă în punctul $x = x_3$:

$$\frac{kx_3^2}{2} = F \cdot x_3; \quad x_3 = 0 \text{ și } x_3 = 2F/k.$$

A doua soluție nu este valabilă, deoarece pentru $x < x_2$ avem $x < \frac{2F}{k}$. Rămîne deci soluția $x_3 = 0$.

Corpul va efectua, deci, oscilații în jurul punctului $x_1 = \frac{F}{k}$ cu amplitudinea $A = |x_1|$.

b) Dacă $\vec{F}$ crește foarte încet de la zero la F, corpul se deplasează din punctul $x_0 = 0$ pînă în punctul $x = x_1$ unde rămîne în repaus.

1.1.60. Din figura 1.44 putem scrie conservarea proiecțiilor impulsului pe axele Ox și Oy.

$$mv_0 = MV \cos \beta. \tag{1}$$

$$mv = MV \sin \beta. \tag{2}$$

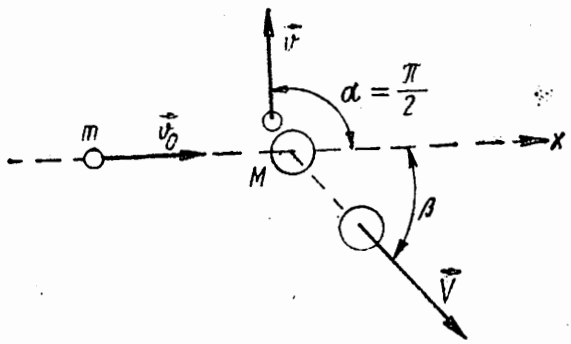


Fig. 1.44.

iar legea conservării energiei

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

Din (1) și (2) obținem:

$$V^2 = \frac{m^2}{M^2}(v_0^2 + v^2).$$

Introducînd în (3) avem:

$$v = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}\, v_0^2} = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; \quad V = v_0 \sqrt{\frac{2m^2}{M(M-m)}};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

Se vede că aceste relații au sens numai dacă $m < M$.

1.1.61. Corpurile vor efectua mișcări oscilatorii cu pulsația ω.
Accelerațiile lor vor fi respectiv:

$$a_1 = -\omega^2 x_1;\ a_2 = -\omega^2 x_2,$$

unde x_1 și x_2 sînt elongațiile corpurilor A și B.
Asupra corpului B va acționa forța

$$F' = m_2 a_2 = -m_2\omega^2 x_2.$$

Pe de altă parte, $F' = k(x_1 - x_2)$.
De unde

$$k(x_1 - x_2) = -m_2\omega^2 x_2$$

sau $x_1 = \dfrac{k - m_2\omega^2}{k} x_2$, deci dacă $k = m_2\omega^2$, $x_1 = 0$.

Acest rezultat pare destul de straniu.
Am obținut condiția

$$k = m_2\omega^2 \text{ sau } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

Adică ω este egală cu pulsația proprie a corpului B cînd corpul A se află în repaus. Deci condiția ca $x_1 = 0$ este ca să fie satisfăcută condiția de rezonanță pentru corpul de masă m_2. Este clar că x_1 nu este totdeauna zero, deoarece prin mișcarea corpului A se transmite acțiunea forței F la corpul B. Dar în condițiile de rezonanță, o oscilație a corpului A cu o amplitudine foarte mică este suficientă pentru a întreține oscilațiile corpului B.
Sistemul din figura 1.45 este un sistem de amortizare dinamică, des utilizat în tehnică pentru înlăturarea unor vibrații nedorite.

1.1.62. Din figura 1.46 rezultă evident că nu se deplasează corpul nici pe verticală și nici în lungul firului. Această concluzie însă nu are nimic comun cu rezolvarea problemei, deoarece forța este legată de accelerație și nu de viteză. Corpul rotindu-se pe cerc în planul orizontal, posedă o accelerație centripetă orientată pe raza cercului pe care se deplasează. Această accelerație are proiecție diferită de zero pe direcția firului și proiecția zero pe verticală.
Rezultă deci că rezolvarea A este incorectă.

1.1.63. Inițial, sistemul are energia potențială,

$$E_{p_i} = MgL + mgL.$$

Se consideră orizontala AA (figura 1.47) ca origine a înălțimii de la sol.
Cînd bara ajunge în poziția verticală, energia totală a sistemului este:

$$E_f = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + mg(L + l),$$

v fiind viteza cu care corpul de masă m ajunge în punctul O''.
Viteza unghiulară ω a corpurilor m și M fiind aceeași avem:

$$\frac{v}{l} = \frac{V}{L};\ v = \frac{l}{L} V.$$

Din legea conservării energiei

$$(M + m)gL = V^2\left(\frac{ml^2}{2L^2} + \frac{M}{2}\right) + mg(L + l)$$

sau

$$g(ML - ml) = V^2\left(\frac{ml^2 + ML^2}{2L^2}\right).$$

De unde:

$$V = L\sqrt{\frac{2g(ML - ml)}{ml^2 + ML^2}}.$$

Dacă $l = 0$

$$V = \sqrt{2gL}.$$

1.1.64. a) $F_1 - T = m_1 a$, $T - F_2 = m_2 a$, $a = \dfrac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$.

$$T = -m_1 \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} + F_1 = \frac{m_2 F_1 + m_1 F_2}{m_1 + m_2} = 112{,}5\ \text{N}.$$

b) Dacă $\mu \neq 0$,

$$F_1 - \mu m_1 g - T = m_1 a_1, \quad T - \mu m_2 g - F_2 = m_2 a_2, \quad a_1 = \frac{F_1 - F_2 - \mu(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

$$T = F_1 - \mu m_1 g - m_1 \frac{F_1 - F_2 - \mu(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 F_1 + m_1 F_2}{m_1 + m_2}.$$

Deci indicația dinamometrului nu depinde de coeficientul de frecare μ.

c) Dacă $\vec{F}_2$ acționează în același sens cu $\vec{F}_1$

$$F_1 - T = m_1 a_2, \quad F_2 + T = m_2 a_2, \quad a_2 = \frac{F_1 + F_2}{m_1 + m_2},$$

$$T = m_2 \frac{F_1 + F_2}{m_1 + m_2} - F_2 = \frac{m_2 F_1 - F_2 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Dacă $F_1 m_2 = F_2 m_1$ sau $F_1/F_2 = m_1/m_2$, atunci $T = 0$.

1.1.65. Corect este raționamentul B obținut pe baza legii conservării impulsului. Raționamentul a) este incorect, deoarece nu se ține seama de energia pierdută prin frînarea glonțului în cutie.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m + M}{2} V^2 + \Delta E,$$

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m + M}{2} \cdot \frac{m^2}{(M + m)^2} v^2 = \frac{mM}{m + M} \frac{v^2}{2},$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mM}{m + M} \frac{v^2}{2} + \frac{m + M}{2} V^2, \quad \text{de unde } V = \frac{mv}{m + M}.$$

1.1.66. a) Cablul fiind omogen, masa unității de lungime a cablului este $\rho = m/l$, unde m este masa cablului.

$$\frac{m}{l} xg = \frac{m}{l}(l - x)\mu g;$$

$$\frac{x}{l} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu; \quad \mu = \frac{x}{l - x};$$

b) $\mu \leqslant 1$; $\dfrac{\tau}{l - \tau} \leqslant 1$; $x \leqslant l/2$; $x_1 = \dfrac{l}{2}$.

1.1.67. Accelerația căruciorului trebuie să fie orientată în dreapta. Față de cărucior, aflat într-o mișcare accelerată, asupra corpurilor acționează și forțele de inerție

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}.$$

Condiția de echilibru este

$$mg - \mu ma - \mu Mg - Ma = 0,$$

$$a(M + \mu m) = g(m - \mu M),$$

$$a = \frac{m - \mu M}{M + \mu m} g \simeq 0{,}47 \text{ ms}^{-2}.$$

1.1.68. a) $Mg - T_1 = Ma$, $\quad Mg = (M + 4m)a$,

$T_1 - T_2 = ma$, $\quad a = \dfrac{M}{M + 4m} g$;

$T_2 - T_3 = ma$,

$T_3 - T_4 = ma$,

$T_4 = ma$,

$$T_1 = Mg - M \frac{M}{M + 4m} g = \frac{4mM}{M + 4m} g,$$

$$T_2 = T_1 - ma = \frac{3mM}{M + 4m} g,$$

$$T_3 = \frac{2mM}{M + 4m} g; \quad T_4 = \frac{mM}{M + 4m} g.$$

b) $Mg - T_1' = Ma_1$,

$T_1' - T_2' - \mu mg = ma_1$,

$T_2' - T_3' - \mu mg = ma_1$, $\quad a_1 = \dfrac{M - 4\mu m}{M + 4m} g$;

$T_3' - T_4' - \mu mg = ma_1$,

$T_4' - \mu mg = ma_1$,

$$T_1' = Mg - Ma_1 = Mg\left(1 - \frac{M - 4\mu m}{M + 4m}\right) = \frac{4Mm(1 + \mu)}{M + 4m} g = T_1(1 + \mu),$$

$$T_2' = \frac{3mM(1 + \mu)}{M + 4m} g = T_2(1 + \mu),$$

$$T_3' = \frac{2mM(1 + \mu)}{M + 4m} g = T_3(1 + \mu),$$

$$T_4' = \frac{mM(1 + \mu)}{M + 4m} g = T_4(1 + \mu).$$

1.1.69. a) Fie $\vec{F_1}$ forța cu care scîndura acționează pe orizontală asupra cubului. Cubul va acționa asupra scîndurii cu o forță egală, dar de sens contrar. Ecuațiile de mișcare pe orizontală sînt:

$$Ma_1 = F - F_1, \quad ma_2 = F_1.$$

Dacă mișcarea are loc fără salturi pentru cub, atunci $a_1 = a_2$,

$$M \frac{F_1}{m} = F - F_1; \; F_1\left(\frac{M}{m} + 1\right) = F; \quad F_1 = \frac{m}{m + M} F.$$

Deoarece $F_1 \leqslant \mu mg$ sau $\dfrac{M}{m + M} F \geqslant \mu mg$,

$$F \geqslant \mu(m + M)g.$$

b) Pentru $F_1 = \mu mg$,

$$Ma_1 = F - \mu mg,$$

$$ma_2 = \mu mg,$$

unde a_1 și a_2 sînt accelerațiile scîndurii și respectiv, a cubului față de planul orizontal considerat fix.

$$a_1 = \frac{F - \mu mg}{M}\ ;\ a_2 = \mu g;$$

$$a_1 > a_2.$$

Accelerația relativă a cubului față de scîndură va fi:

$$a_r = a_1 - a_2 = \frac{F - \mu(m + M)g}{M}\ ;$$

$$l = \frac{a_r t^2}{2}\ ;\ t = \sqrt{\frac{2l}{a_r}} = \sqrt{\frac{2Ml}{F - \mu g(m + M)}},$$

se vede că dacă $F = \mu g(m + M)$, timpul $t = \infty$, adică corpul nu alunecă de pe scîndură.

1.1.70. a) $mgh = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - nmgh,$

$$gh(n + 1) = \frac{v_0^2}{2}\ ;\ h = \frac{v_0^2}{2(n + 1)g}.$$

Dacă $n = 1$; $h = \frac{v_0^2}{4g}$.

Se vede că oricare ar fi $n > 0$, $h < h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

b) $mgH - mgh = \frac{mv^2}{2} = nmgh,$

$$h = \frac{H}{n + 1}.\ \text{Pentru}\ n = 1,\ h = \frac{H}{2}.$$

c) $\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh = (n + 1)mgh,$

$$h = \frac{H}{n + 1} + \frac{v_0^2}{2(n + 1)g}\ ;\ h \leqslant H;\ \frac{v_0^2}{2(n + 1)g} \leqslant \frac{n}{n + 1}H;\ n \geqslant \frac{v_0^2}{2gH}.$$

1.1.71. $mv = (m + M)V$; $v = \sqrt{2gh}$;

$$V = \frac{mv}{m + M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}.$$

Energia cinetică inițială a sistemului taler și corp este:

$$E_{c_i} = \frac{(m + M)V^2}{2} = \frac{m + M}{2} \cdot \frac{m^2 2gh}{(M + m)^2} = \frac{m^2 gh}{m + M}.$$

Întinderea arcului este condiționată de energia cinetică și de lucrul mecanic al forțelor de greutate

$$(m + M)gy,$$

unde y este deplasarea de la poziția inițială. În momentul căderii corpului, arcul nu era în stare de relaxare, avînd o întindere inițială y_0' datorită greutății talerului

$$Mg = ky_0';\ y_0' = \frac{Mg}{k}.$$

Deci

$$\frac{ky^2}{2} - \frac{ky_0^2}{2} = \frac{m^2gh}{M+m} + (M+m)g(y - y_0)$$

sau

$$\frac{ky^2}{2} - \frac{k}{2}\frac{M^2g^2}{k^2} = \frac{m^2gh}{M+m} + (M+m)g\left(y - \frac{Mg}{k}\right).$$

Înmulțind cu $2/k$

$$y^2 - \frac{2(M+m)g}{k}y - \frac{M^2g^2}{k^2} - \frac{m^2gh}{(M+m)}\frac{2}{k} + \frac{2}{k}\frac{(M+m)Mg^2}{k} = 0,$$

sau

$$y^2 - \frac{2(M+m)g}{k}y - \frac{2m^2gh}{k(m+M)} + \frac{M(M+2m)g^2}{k^2} = 0,$$

$$y = \frac{(M+m)g}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k}}.$$

Poziția $y_0 = \frac{m+M}{k}g$ corespunde poziției de echilibru, în jurul căreia sistemul oscilează cu amplitudinea

$$A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k}}.$$

Dacă $h = 0$, $A = mg/k$.

1.1.72. Prin greutatea corpului față de rachetă, înțelegem forța cu care corpul apasă asupra rachetei,

$$ma = R - F_a,$$

unde R este reacția peretelui rachetei, egală și de sens contrar cu forța cu care corpul apasă asupra peretelui. Deci, în modul,

$$R = G,$$

F_a este forța atracției universale între corp și Pământ,

$$F_a = mg_h = mg_0\left(\frac{R_p}{r}\right)^2.$$

Înlocuind obținem:

$$G = ma + mg_0\left(\frac{R_p}{r}\right)^2 =$$

$$= mg_0\left[1 + \left(\frac{R_p}{r}\right)^2\right],$$

$n = 1$ $G = 2mg_0$;

$n = 2$ $G = 1{,}25\ mg_0$,

$n = 5$ $G = 1{,}04\ mg_0$;

$n = 10$ $G = 1{,}01\ mg_0$.

Dependența greutății G de distanța r este indicată în figura 1.55.

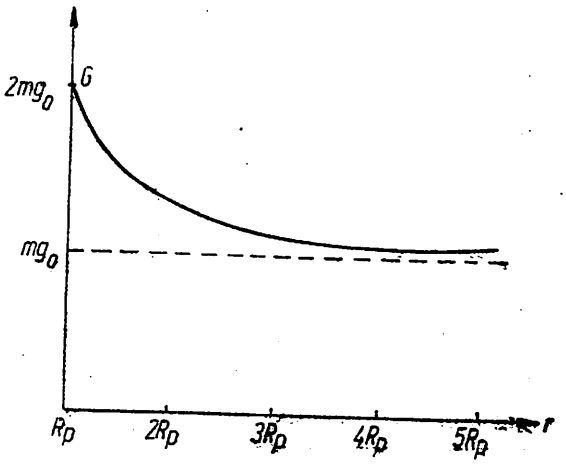


Fig. 1.55.

1.1.73. a) Fie J momentul de inerție al unui disc față de axa OO'.

$$J\omega_1 + J\omega_2 = 2J\omega, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2};$$

$$E_{ci} = \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}, \quad E_{cf} = \frac{2J\omega^2}{2} = \frac{J}{4}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2);$$

$$\Delta E_c = E_{ci} - E_{cf} = \frac{J}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 - \omega_1\omega_2\right) = \frac{J}{4}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

b) Fie v_1 și v_2 vitezele corpurilor înainte de ciocnire ($v_2 < v_1$).

$$mv_1 + mv_2 = 2mv; \quad v = \frac{v_1 + v_2}{2};$$

$$E_{ci} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}; \quad E_{cf} = \frac{2mv^2}{2} = \frac{m}{4}(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2).$$

$$\Delta E_c = E_{ci} - E_{cf} = \frac{m}{4}(v_1^2 - v_2^2).$$

1.1.74. Fie H_1 și H_2 impulsurile sferei C, înainte și după ciocnire.
H' și E' impulsul și energia sistemului celor două sfere după ciocnire. E energia de oscilație a sferelor A și B.

$$H_1 = -H_2 + H',$$

$$E_{c_1} = E_{c_2} + E' + E,$$

$$H' = H_1 + H_2; \text{ energia cinetică } E_c = \frac{H^2}{2m}.$$

Sistemul celor două sfere are masa totală $2\ m$.

$$H_1 = \sqrt{2mE_{c_1}}; \quad H_2 = \sqrt{2mE_{c_2}}; \quad H' = \sqrt{4mE'};$$

$$4mE' = 2mE_{c_1} + 2mE_{c_2} + 4m\sqrt{E_{c_1}}\sqrt{E_{c_2}};$$

$$E = E_{c_1} - E_{c_2} - E' = E_{c_1} - E_{c_2} - \frac{E_{c_1}}{2} - \frac{E_{c_2}}{2} - \sqrt{E_{c_1}}\sqrt{E_{c_2}} =$$

$$= \frac{1}{2}[E_{c_1} - 3E_{c_2} - 2\sqrt{E_{c_1}}\sqrt{E_{c_2}}].$$

1.1.75. Din legea conservării impulsului (fig. 1.58)

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_1' + \vec{H}_2',$$

unde $\vec{H}_2'$ este impulsul particulei B după ciocnire, avem:

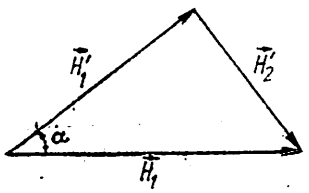


Fig. 1.58.

$$\vec{H}_2'^2 = \vec{H}_1^2 + \vec{H}_1'^2 - 2H_1H_1'\cos\alpha.$$

Scriem legea conservării energiei cinetice:

$$E_{c_1} = E_{c_1}' + E_{c_2}', \quad E_c = H^2/2m.$$

$$\frac{H_1^2}{2m_1} - \frac{H_1'^2}{2m_1} = \frac{H_2'^2}{2m_2}; \quad H_2'^2 = \frac{m_2}{m_1}(H_1^2 - H_1'^2).$$

Deci

$$\frac{m_2}{m_1}(H_1^2 - H_1'^2) = H_1^2 + H_1'^2 - 2H_1H_1' \cos\alpha$$

sau $H_1'^2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} - 2H_1H_1' \cos\alpha + H_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1} = 0;$

$$b^2 - 4ac = 4H_1^2 \cos^2\alpha \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - 4H_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= 4H_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 - m_2)^2}\left[\cos^2\alpha - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2}\right] =$$

$$= 4H_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\left(\cos^2\alpha - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}\right) =$$

$$= 4H_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\left[\cos^2\alpha - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 1\right].$$

$$H_1' = H_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1\right)}\right].$$

Dacă $m_2/m_1 > 1$, are sens fizic numai semnul + înaintea radicalului, deoarece $\vec{H}_1'$ fiind modulul vectorului, $\vec{H}_1'$ nu poate avea valoare negativă.

Dacă $m_2/m_1 < 1$, au un sens fizic ambele soluții și H_1' nu este univoc determinat.

1.1.76. Asupra fiecărei sfere acționează greutatea $m\vec{g}$, forța elastică $\vec{F}_{el}$ și reacția barei $\vec{R}$ (fig. 1.60).

Ecuațiile de mișcare pe axele Oy și Ox sînt:

$$m\omega^2 \frac{x}{2} = F_{el} - R\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$R\sin\varphi - mg = 0. \qquad (2)$$

Din (2) $R = mg/\sin\varphi$, iar $F_{el} = k(x - x_0)$,

$$m\omega^2 \frac{x}{2} = k(x - x_0) - mg\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$m\omega^2 x = 2kx - 2kx_0 - 2mg\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$x(2k - m\omega^2) = 2(kx_0 + mg\operatorname{ctg}\varphi),$$

$$x = \frac{2(kx_0 + mg\operatorname{ctg}\varphi)}{2k - m\omega^2}.$$

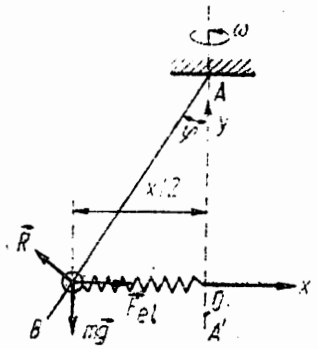


Fig. 1.60.

Din triunghiul AOB (fig. 1.60) se obține:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{h}{x/2}; \quad h = x/2\operatorname{ctg}\varphi = \frac{kx_0 + mg\operatorname{ctg}\varphi}{2k - m\omega^2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

1.1.77. a) Pentru ca paralelipipedul să se răstoarne:

$$mah/2 \geqslant mg\frac{l}{2}; \quad a \geqslant g\frac{l}{h};$$

$$a = \frac{M}{M + m + m_1} g \geqslant g\frac{l}{h}; \quad M \geqslant \frac{h(m + m_1)}{h - l}.$$

b) Dacă

$$h = l, \quad M \gg m.$$

1.1.78. Fie t_1 timpul de urcare și t_2 timpul de coborîre: $t = t_1 + t_2$;

$$t_1 = \frac{v_0}{a_u} \quad \text{unde} \quad a_u = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Distanța s parcursă de corp la urcare este:

$$s = \frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{a_c t_2^2}{2}; \quad t_2 = \frac{v_0}{\sqrt{a_u a_c}}; \quad a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

$$t = v_0\left(\frac{1}{a_u} + \frac{1}{\sqrt{a_u a_c}}\right) = \frac{v_0}{\sqrt{a_u}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_u}} + \frac{1}{\sqrt{a_c}}\right) = \frac{v_0(\sqrt{a_u} + \sqrt{a_c})}{a_u\sqrt{a_c}};$$

$$v_0 = \frac{a_u\sqrt{a_c}}{\sqrt{a_u} + \sqrt{a_c}}\, t = gt\,\frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\sqrt{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \sqrt{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} =$$

$$= gt\,\frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \mu}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \mu} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \mu}}.$$

1.1.79.

$ma_1 = F_1 - mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha = 0,$
$ma_2 = mg\sin\alpha - F_2 - \mu\, mg\cos\alpha = 0,$
$F_1 = mg\sin\alpha + \mu\, mg\cos\alpha,$
$F_2 = mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha,$
$F_1 + F_2 = 2mg\sin\alpha,$
$F_1 - F_2 = 2\mu\, mg\cos\alpha,$

$$m = \frac{F_1 + F_2}{2g\sin\alpha} = \frac{4\,900}{9{,}8} = 500 \text{ kg}; \quad \mu = \frac{F_1 - F_2}{2mg\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

1.1.80. $t_u = \frac{v_0}{a_u}$; $\frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{a_c t_c^2}{2}$; $t_c = \frac{v_0}{\sqrt{a_u a_c}}$,

$$\frac{t_c}{t_u} = \frac{a_u}{\sqrt{a_u a_c}} = \sqrt{\frac{a_u}{a_c}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = k,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{\operatorname{tg}\alpha - \mu} = k^2; \quad \mu = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\operatorname{tg}\alpha,$$

$k = 1$ se obține pentru $\mu = 0$.

1.1.81. a) $F_{tr} = Mg(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha) = 3{,}75$ kN,

$$L = F_{tr} \cdot l = 187{,}5 \text{ kJ}.$$

b) $a_c = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 10\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}5 \text{ ms}^{-2},$

$$v_A = \sqrt{2a_c l} = \sqrt{2 \cdot 2{,}5 \cdot 50} = \sqrt{250} \text{ ms}^{-1},$$

$$s = \frac{v_A^2}{2a_1} = \frac{v_A^2}{2\mu_2 g} = \frac{250}{4} = 62{,}5 \text{ m},$$

c) $\eta = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 2/3.$

1.1.82. a) $s_{max} = \frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$,

$$v = \sqrt{2a_c s_{max}} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu}} = 8{,}2\ \mathrm{ms^{-1}}.$$

b) $\Delta E_c = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 8{,}3\ \mathrm{J}$,

$$L_f = 2\,s_{max}\cdot\mu\,mg\,\cos\alpha = 2\cdot\frac{400}{2g\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1{,}2}\,0{,}2\cdot 0{,}5\,g\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 8{,}3\ \mathrm{J}.$$

1.1.83. a) $a = \frac{M_2(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\,g = 0{,}1682\ \mathrm{ms^{-2}}$.

b) $T = m_2g(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_2a = 7{,}768\ \mathrm{N}$,

sau

$$T = m_1g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + m_1a = 7{,}768\ \mathrm{N}.$$

c) $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}} = \sqrt{\frac{10}{4{,}21}} \simeq 1{,}53\ \mathrm{s}.$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{\sin\beta(\sin\beta - \mu\cos\beta)g}} = \sqrt{\frac{10}{2{,}019}} \simeq 2{,}23\ \mathrm{s}.$$

1.1.84. a) $F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{4} = 372{,}16\ \mathrm{N}.$

b) $\mu = \mu_1$;

$$\frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{4} \leqslant M_1g \leqslant \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{4},$$

$$12{,}025 \leqslant M_1 \leqslant 37{,}975\ \mathrm{kg},\quad \mu = 0;$$

$$M_2g = \frac{mg\sin\alpha}{4};\quad M_2 = \frac{m\sin\alpha}{4} = \frac{200}{8} = 25\ \mathrm{kg}.$$

c) $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 2{,}36\ \mathrm{ms^{-2}}$,

$a_2 = \mu_2g = 0{,}686\ \mathrm{ms^{-2}}$,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha\cdot a_1}} + \frac{\sqrt{4a_1h}}{a_2} = 2\sqrt{\frac{h}{a_1}} + \frac{2\sqrt{a_1h}}{a_2} = 16{,}5\ \mathrm{s}.$$

1.1.85. a) $m_1g\sin\alpha_1 = m_2g$; $\sin\alpha_1 = \frac{0{,}4}{0{,}8} = \frac{1}{2}$; $\alpha_1 = 30°$,

b) $m_1g(\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2) = m_2g$; $2\sin\alpha_2 - 0{,}4\cos\alpha_2 = 1$;

$$2\sin\alpha_2 = 1 + 0{,}4\cos\alpha_2;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = x;$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{0{,}4}{\sqrt{1+x^2}};\quad 3x^2 - 1{,}6x - 0{,}84 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{1{,}6^2 + 4\cdot 3\cdot 0{,}84}}{6} = \frac{1{,}6 \pm 3{,}56}{6}.$$

$$\alpha_2 < 90°,\ x_1 = \frac{5{,}16}{6} = 0{,}86.$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arc\,tg}\ 0{,}86 = 40°40'.$$

c) $a = \dfrac{m_2 g - m_1 g \sin \alpha_3 - \mu_1 m_1 g \cos \alpha_3}{m_1 + m_2} = 0{,}98;\ \alpha_3 = 9°.$

1.1.86.

$$m_3 g - T_{23} = m_3 a;$$
$$T_{23} - T_{12} - m_2 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = m_2 a;$$
$$T_{12} - m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = m_1 a;$$
$$a = \frac{m_3 g - (m_1 + m_2)\, g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}25 \ \text{ms}^{-2};$$
$$T_{23} = m_3(g - a) = 47{,}75 \ \text{N};$$
$$T_{12} = m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + m_1 a = 20{,}54 \ \text{N}.$$

1.1.87. a) $a_u = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha);\ a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$:

$$l = v_0 t_1 - \frac{a_u t_1^2}{2} = \frac{a_u t_1^2}{2};\quad a_u = \frac{2l}{t_1^2};$$

$$\sin \alpha + \mu \cos \alpha = \frac{2l}{g t_1^2};\quad \mu = \frac{\dfrac{2l}{g t_1^2} - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\dfrac{128}{9 \cdot 9{,}8} - 1}{1{,}73}$$

b) $t_2 = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = \sqrt{\dfrac{64}{9{,}8 \cdot 0{,}276}} \simeq 4{,}9 \ \text{s}.$

1.1.88. Pentru ca scîndura să nu se deplaseze în jos (fig. 1.67) trebuie ca:

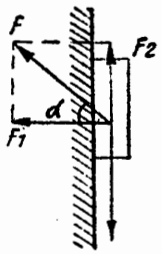


Fig. 1.67.

$$G \leqslant F(\sin \alpha + \mu \cos \alpha);\ F \geqslant \frac{G}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha},$$

iar pentru ca scîndura să nu se poată deplasa în sus

$$F \sin \alpha \leqslant G + \mu F \cos \alpha;\ F \leqslant \frac{G}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

În final $\dfrac{G}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \leqslant F \leqslant \dfrac{G}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$

1.1.89. a) $s = v_m t = 75$ m; $L = \dfrac{m v^2}{2} + \mu m g s = 300$ kJ;

$$P_m = \frac{L}{t} = 30 \ \text{kW};$$

b) $P_{max} = \mu m g v_{max} = 40$ kW;

c) $a = \dfrac{P_{max}/v - F_f}{m} = \dfrac{P_{max} - v F_f}{mv}$; dacă $v = v_{max}$, $a = 0$.

1.1.90. a) $mgh_1 - mgh_2 = \mu mg \cos \alpha_1 \dfrac{h_1}{\sin \alpha_1} + \mu mg l_2 + \mu mg \dfrac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} h_2,$

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{h_1 - h_2 - \mu h_1 - \mu l_2}{\mu h_2} = \frac{0{,}18}{0{,}06} = 3;\ \alpha_2 = \operatorname{arctg} 3.$$

b) $L = \mu mg \dfrac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} h_1 + \mu mg l_2 + \mu mg \dfrac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} h_2 = 11{,}76$ J.

c) $mgh_1 = \mu mg \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} h + \mu mgl_2 + mgh_2'(1 + \mu\sqrt{3})$,

$$h_2' = \frac{0{,}78}{1{,}173} = 0{,}659 \text{ m}.$$

1.1.91. a) $t = \sqrt{\frac{2(H+l)}{g}} = 2$ s,

$$\nu = \frac{n}{60} = 5 \text{ s}^{-1}; \ \omega = 2\pi\nu = 31{,}4 \text{ rad/s}; \ v = \omega l = 31{,}4 \text{ ms}^{-1};$$

$$d = 31{,}2 \cdot 2 = 62{,}8 \text{ m}.$$

b) $h' = H + \frac{v^2}{2g} = 68{,}6$ m.

c) $v_1 = \sqrt{v^2 + 2g(H+l)}$; $v_2 = \sqrt{v^2 + 2gH}$;

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{1 + \frac{2gl}{v^2 + 2gH}} \simeq 1.$$

1.1.92. Tensiunile în fir sînt indicate în figura 1.70.

$$T_1 - m_1 g = m_1 a; \ T_1 = m_1 g + m_1 a;$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a; \ T_2 = m_2 g - m_2 a.$$

Asupra discului acționează momentul $M = (T_2 - T_1)R$.

Din relația $M = J\varepsilon = J\frac{a}{r}$, avem:

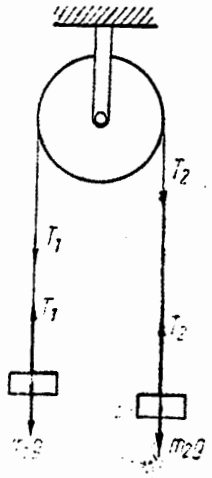


Fig. 1.70.

$$(T_2 - T_1) R = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R}; \quad T_2 - T_1 = \frac{m}{2} a;$$

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m}{2} a; \ a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g;$$

$$T_2 - T_1 = \frac{m}{2} g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

Dacă $m = 0$, $T_1 = T_2$ și obținem rezultatele cunoscute.

Dar m nu poate fi zero, ci numai neglijabil cu o anume precizie.

De exemplu, dacă $m = \frac{m_1 + m_2}{10}$, atunci

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2\left(1 + \frac{1}{20}\right)} = \frac{20}{21} a_0$$

unde a_0 este accelerația dacă $m = 0$, iar

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{21}(m_2 - m_1)g.$$

În general, dacă $m = \frac{m_1 + m_2}{n}$, atunci

$$a = \frac{2n}{2n+1} a_0; \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2n+1}(m_2 - m_1)g.$$

1.1.93. a) Pentru ca cilindrul să nu se răstoarne trebuie ca momentul forței $\vec{G}_2$ față de punctul D să fie mai mic decît momentul forței $\vec{G}_1$ față de punctul D.

$$mg \sin \alpha \frac{H}{2} \leqslant mg \cos \alpha \frac{D}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - h^2/l^2};$$

$$\frac{h}{l} H \leqslant \sqrt{1 - h^2/l^2} D; \quad \frac{h^2}{l^2} H^2 \leqslant D^2 - D^2 \frac{h^2}{l^2};$$

$$h \leqslant \frac{lD}{\sqrt{H^2 + D^2}}.$$

Se obține că dacă $h = \frac{lD}{\sqrt{H^2 + D^2}}$, adică valoarea maximă pentru care cilindrul încă nu se răstoarnă, atunci vectorul G se află pe verticala CD, unde C este centrul de greutate al cilindrului. În acest caz

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} = \frac{D/2}{\sqrt{(H/2)^2 + (D/2)^2}} = \frac{D}{\sqrt{H^2 + D^2}}; \quad h = \frac{lD}{\sqrt{D^2 + H^2}}.$$

b) Pentru ca cilindrul să se răstoarne la un unghi $\alpha \geqslant 30°$

$$\frac{h}{l} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + H^2}} \geqslant \frac{1}{2}; \quad 4D^2 \geqslant D^2 + H^2; \quad 3D^2 \geqslant H^2; \quad \frac{H}{D} \leqslant \sqrt{3}.$$

c) $\sin \alpha \geqslant \mu \cos \alpha; \quad \frac{h'}{l} \geqslant \mu \sqrt{1 - h^2/l^2}; \quad h' \geqslant l \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}}.$

1.1.94. Într-adevăr, conform legii a treia a lui Newton, interacția dintre cal și căruță nu poate conduce la deplasarea accelerată a sistemului cal + căruță. Este clar deci că deplasarea accelerată a sistemului se datorește unor interacțiuni suplimentare. Cu alte cuvinte, pentru deplasarea accelerată a sistemului cal + căruță, pe lîngă cal și căruță trebuie să existe un al treilea corp. Acest al treilea corp este Pămîntul. Avem deci de a face cu trei interacțiuni și anume: a) între cal și căruță, b) între căruță și Pămînt și c) între cal și Pămînt. În figura 1.72 se indică forțele ce acționează atît asupra calului cît și asupra căruței. Nu se indică forțele de greutate și de reacție a solului. Accelerația sistemului este dată de diferența forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. Forțele de interacțiune dintre cal și căruță $\vec{F}_0$ sînt egale și de sens contrar. Deci accelerația sistemului nu are nimic comun cu

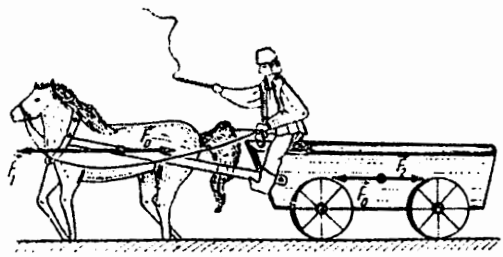


Fig. 1.72.

interacția între cal și căruță. În acest sens, suprafața Pămîntului este un participant activ la mișcare. Dacă forțele de interacțiune între Pămînt și cal, pe de o parte, și Pămînt și căruță, pe de altă parte, ar fi egale, atunci sistemul nu s-ar putea deplasa accelerat. Acesta este motivul pentru care se iau măsurile ca frecările cu Pămîntul să fie pentru cal cu mult mai mari decît pentru căruță.

Forțele de interacțiune între cal și căruță sînt forțe interne pentru sistemul căruță + cal. Forțele interne nu pot niciodată să imprime sistemului în ansamblul lui o accelerație. Pentru aceasta, este nevoie de interacțiune cu corpuri din afara sistemului. Așa, de exemplu, oricît de ușor ar fi un om și oricît de mare forță ar avea în mîini, el nu se poate ridica de la sol prin simpla împingere a capului.

Din cele de mai sus rezultă că legea a treia a lui Newton este totdeauna valabilă; trebuie însă corect aplicată în orice caz concret.

1.1.95. Pentru a răsturna cărămida din poziția *1* în poziția *2* se cheltuiește lucrul mecanic (figura 1.74).

$$L_1 = mgh_1 = mg\,\frac{1}{2}\,(\sqrt{h^2 + l^2} - l) = mgl = 2{,}94\ \text{J};$$

$$L_2 = mgh_2 = mg\,\frac{1}{2}\,(\sqrt{h^2 + l^2} - h) = \frac{mg}{2}\,(3l - 2{,}824\,l) = \frac{mg}{2}\,0{,}172\,l = 0{,}253\ \text{J}.$$

Poziția *1* este mai stabilă, deoarece $L_1 > L_2$.

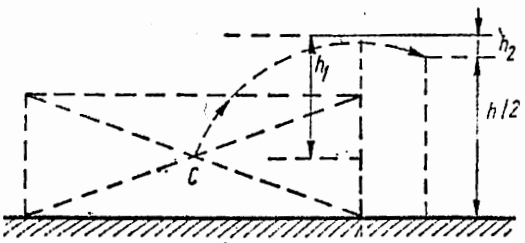


Fig. 1.74.

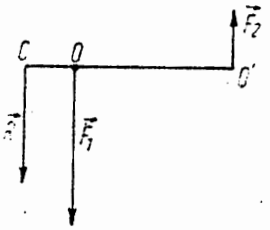


Fig. 1.76.

1.1.96. Fie μ masa unității de suprafață a discului. Putem considera că în punctul O este aplicată forța $F_1 = \mu\pi R^2$, iar în O', forța $F_2 = \mu\pi r^2$ de sens opus cu F_1 (figura 1.76).

Rezultanta F este aplicată în punctul C și este egală cu $F = F_1 - F_2 = \mu\pi(R^2 - r^2)$.

Momentele forțelor față de punctul C trebuie să fie egale și de sens opus.

$$\mu\pi R^2 x = \mu\pi r^2\left(x + \frac{R}{2}\right);$$

$$\pi(R^2 - r^2) = r^2\frac{R}{2};\quad x = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}.$$

Pentru $r = 0$, $x = 0$.

Pentru $r = \frac{R}{2}$, $x = \frac{R^2/4}{2(R^2 - R^2/4)} = \frac{R}{6}$.

1.1.97. Datorită presiunii gazului, pe fețele laterale ale prismei vor acționa forțele (figura 1.78):

$$F_1 = p \cdot BC \cdot h;\quad F_2 = p \cdot AC \cdot h;\quad F_3 = p \cdot AB \cdot h.$$

Din condiția de echilibru rezultă că suma momentelor forțelor față de punctul A trebuie să fie zero.

$$F_1\frac{BC}{2} + F_2\frac{AC}{2} = F_3\frac{AB}{2}$$

sau

$$\frac{ph}{4}\,(BC^2 + AC^2) = \frac{ph}{4}\,AB^2.$$

De unde $$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

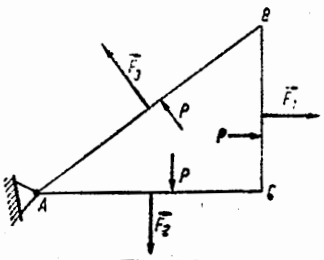


Fig. 1.78.

1.1.98. a) $a = \mu g = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$; $v_0 = at = 20\ \text{ms}^{-1}$,

b) $s_{max} = \dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{400}{2 \cdot 2{,}5} = 80\ \text{m}$.

Deci camionul se va afla pe pod în punctul C la distanța $AC = 80$ m de capătul A al podului și la distanța $BC = 40$ m de capătul B al podului (fig. 1.79).

$$F_1 + F_2 = mg; \quad F_1 AC = F_2 BC; \quad F_2 = F_1 \frac{AC}{BC} = 2F_1.$$

$$F_1 = \frac{mg}{3} = 20\ \text{kN}; \quad F_2 = 2F_1 = 40\ \text{kN}.$$

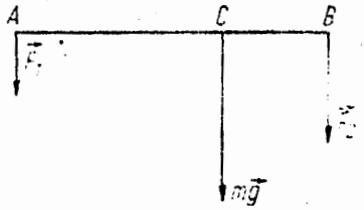


Fig. 1.79.

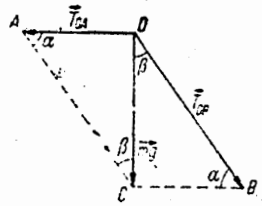


Fig. 1.81.

1.1.99. Descompunem greutatea corpului mg după direcțiile OA și OB (fig. 1.81). Din triunghiul OBC se obține:

$$\frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{T_{OB}}{\sin 90^\circ} = \frac{T_{OA}}{\sin\beta} = \frac{T_{OA}}{\cos\alpha}.$$

Notăm $\sin\alpha = x$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2}$.

$$T_{OB} = \frac{mg}{x}; \quad T_{OA} = \frac{mg}{x}\sqrt{1 - x^2}.$$

1.1.100. În momentul cînd bara începe să se deplaseze, asupra ei vor acționa forțele indicate în figura 1.83, adică greutatea $G = mg$ a barei, reacția R_1 a peretelui vertical, reacția R_2 a podelei, forța de frecare F_f și forța exterioară F.

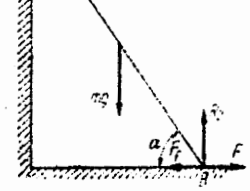


Fig. 1.83.

Momentul forțelor față de punctul B este:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - R_1 l \sin\alpha = 0; \quad R_1 = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Suma proiecțiilor forțelor pe direcția orizontală este:

$$F + R_1 - F_f = 0; \quad F_f = F + R_1;$$

$$F_f = F + \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Deoarece $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0$, rezultă $F = F_f - \dfrac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; $F \leqslant F_f$.

1.1.101. Bara fiind omogenă, greutatea ei G este aplicată în centrul barei.

$$G = F_1 + F_2.$$

Momentele față de punctele A și B sînt zero.

$$G \cdot \left(\frac{l}{2} - l_1\right) = F_2 \cdot (l - l_1 - l_2); \quad G\left(\frac{l}{2} - l_2\right) = F_1 \cdot (l - l_1 - l_2).$$

De unde:

$$F_1 = \frac{G}{2} \cdot \frac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)}; \quad F_2 = \frac{G}{2} \cdot \frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}.$$

Dacă $l_1 = l_2$, atunci

$$F_1 = F_2 = \frac{G}{2}.$$

1.1.102. Cele patru corpuri punctiforme cu masele m se află în vîrfurile patrulaterului $ABCD$ (figura 1.85). Centrul de greutate al corpurilor A și B se află în punctul E aflat la mijlocul segmentului AB, iar centrul de greutate al corpurilor C și D se află în punctul F aflat la mijlocul dreptei CD. Cum cele patru corpuri au mase egale, rezultă că putem înlocui corpurile A și B prin corpul E cu masa $2m$, iar corpurile C și D prin corpul F tot cu masa $2m$. Corpurile E și F au centrul de greutate în punctul I aflat la mijlocul segmentului EF.

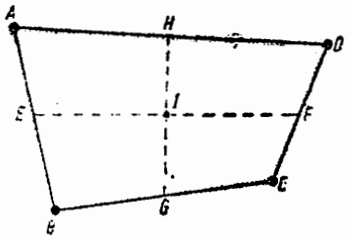


Fig. 1.85.

Luînd corpurile A, D și B, C, ajungem la concluzia că centrul de greutate al celor patru corpuri se află la mijlocul segmentului HG.

Ordinea în care luăm centrul de greutate a cîte două din cele patru corpuri nu poate duce la poziții diferite ale centrului de greutate al sistemului. Deci segmentele EF și HG se intersectează în punctul I, iar $EJ = IF$ și $GJ = IH$.

1.1.103. Pentru menținerea echilibrului trebuie ca forțele de apăsare a bilelor pe fundul părților A și B ale vasului, să fie egale,

$$F_1 = m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1}\rho_0 g = m_1 g\left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1}\right); \quad F_2 = m_2 g \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2}.$$

$$F_1 = F_2; \quad m_1/m_2 = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} = 1{,}418.$$

1.1.104. Bara fiind în repaus trebuie ca:

$$T_1 + T_2 + T_3 - G = 0. \qquad (1)$$

De asemenea, suma momentelor față de un punct oarecare, de exemplu, față de punctul O, trebuie să fie zero.

$$lT_2 + 2lT_3 - \frac{l}{2}G = 0. \qquad (2)$$

Considerînd cablurile rigide, nu putem obține decît aceste două ecuații, iar noi avem trei necunoscute. Pentru aflarea tensiunilor T_1, T_2 și T_3, mai avem nevoie de încă o ecuație.

Ținînd seama de legea lui Hooke, putem scrie (figura 1.88).

$$\frac{T_1}{S_1} = E_1 \frac{\Delta l_1}{l_0}; \quad \frac{T_2}{S_2} = E_2 \frac{\Delta l_2}{l_0};$$

$$\frac{T_3}{S_3} = E_3 \frac{\Delta l_3}{l_0},$$

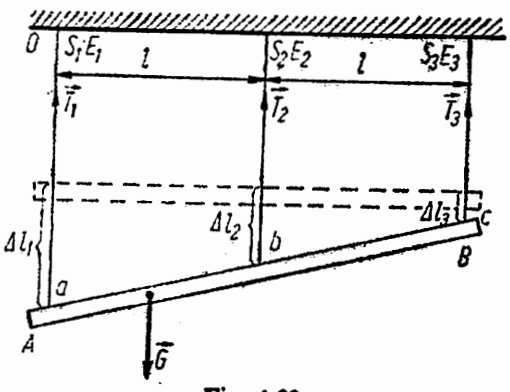


Fig. 1.88.

de unde:

$$\Delta l_1 = \frac{l_0 T_1}{E_1 S_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{l_0 T_2}{E_2 S_2}; \quad \Delta l_3 = \frac{l_0 T_3}{E_3 S_3}.$$

Bara fiind rigidă, trebuie ca cele trei capete a, b și c ale cablurilor să fie pe aceeași linie, adică

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{\Delta l_2 - \Delta l_3} = \frac{2l}{l} = 2.$$

Înlocuind avem:

$$\frac{T_1}{E_1 S_1} - \frac{T_2}{E_2 S_2} = 2\left(\frac{T_2}{E_2 S_2} - \frac{T_3}{E_3 S_3}\right). \tag{3}$$

Am obținut astfel a treia ecuație care împreună cu ecuațiile (1) și (2) permite aflarea tensiunilor T_1, T_2, T_3.

Pentru simplificare, introducem notațiile:

$$k_1 = E_1 S_1; \quad k_2 = E_2 S_2; \quad k_3 = E_3 S_3.$$

Cu aceasta, ecuația (3) devine:

$$T_1 k_2 k_3 - 2T_2 k_1 k_3 + T_3 k_1 k_2 = 0.$$

Pentru o formă mai simplă, notăm: $a_{12} = k_1 k_2$; $a_{13} = k_1 k_3$ și $a_{23} = k_2 k_3$.

În sfîrșit, se obține sistemul de trei ecuații:

$$T_1 + T_2 + T_3 = G,$$

$$2T_2 + 4T_3 = G,$$

$$a_{23} T_1 - 2a_{13} T_2 + a_{12} T_3 = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de trei ecuații cu trei necunoscute obținem, relativ ușor:

$$T_1 = \frac{G}{2} \frac{6a_{13} + a_{12}}{4a_{13} + a_{12} + a_{23}}; \quad T_2 = \frac{G}{2} \frac{3a_{23} + a_{12}}{4a_{13} + a_{12} + a_{23}}; \quad T_3 = \frac{G}{2} \frac{2a_{13} - a_{23}}{4a_{13} + a_{12} + a_{23}}.$$

Dacă cele trei cabluri sînt identice, $S_1 = S_2 = S_3 = S$, $E_1 = E_2 = E_3 = E$, atunci $a_{13} = a_{12} = a_{23}$ și obținem:

$$T_1 = \frac{7}{12} G; \quad T_2 = \frac{G}{3}; \quad T_3 = \frac{G}{12}.$$

1.1.105. Fie S aria suprafeței vasului. Greutatea corpului care echilibrează balanța este:

$$G = m_1 g + S\rho_a g h,$$

unde $F = S\rho_a g h$ este forța cu care apa apasă asupra fundului vasului și deci și asupra talerului balanței.

Dacă introducem corpul în vas, nivelul apei va fi

$$h' = h + \frac{V}{S}.$$

Pentru echilibrarea balanței este necesară greutatea

$$G' = S\rho_a g h' + m_1 g = G + \rho_a g V.$$

Deci $G' > G$ și balanța se dezechilibrează.

1.1.106. $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$; $v_1 S_1 = v_2 S_2$; $v_1 \ll v_2$.

Considerăm $v_1 = 0$.

$$p_1 - p_2 = \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}; \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

1.1.107. $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$;

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 (S_1^2 - S_2^2)/S_2^2 = p_1 - p_2 = \rho g h; \quad v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

$$Q = v_1 S_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

1.1.108. Condiția de echilibru este:

$$OA \cdot G \cos \alpha = OB \cdot F_A \cdot \cos \alpha.$$

Din figura 1.93 obținem:

$$BC = \frac{l}{2n}; \quad OA = \frac{l}{2}; \quad OB = \frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n}\right) + \frac{l}{2n} = l \frac{2n-1}{2n}.$$

$$G = Sl\rho g; \quad F_A = S \frac{l}{n} \rho_l g.$$

Deci

$$Sl\rho g \frac{l}{2} \cos \alpha = S \frac{l}{n} \rho_l g l \frac{2n-1}{2n} \cos \alpha; \quad \rho = \rho_l \frac{2n-1}{n^2}.$$

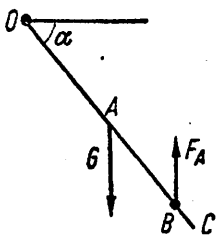


Fig. 1.93.

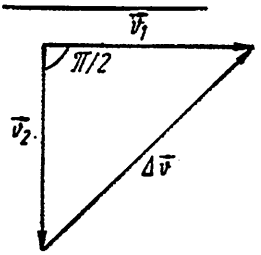


Fig. 1.96.

1.1.109. $\rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$; $v_1 \ll v_2$; $g(h_1 - h_2) = \frac{v_2^2}{2}$;

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

$$Q_v = v_2 S = V \cdot \Delta t; \quad \Delta t = \frac{V}{S\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 36}} \simeq 3{,}76 \text{ s}.$$

1.1.110. $Q_m = \rho S v$; $\vec{F} \Delta t = m \Delta \vec{v}$; $\vec{F} = \frac{m}{\Delta t} \Delta \vec{v} = Q_m \Delta \vec{v}$. (1)

$\Delta \vec{v}$ este vectorul variației vitezei (fig. 1.96).

Deoarece $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, din figura 1.96 rezultă

$$|\Delta \vec{v}| = v\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} Q_m}{\rho S}.$$

Înlocuind în formula (1), valoarea forței este:

$$F = \frac{\sqrt{2} \cdot Q_m^2}{\rho S}.$$

1.1.111. $\rho g \Delta h = \frac{\rho v^2}{2}$; $v = \sqrt{2g\Delta h} = 2 \text{ ms}^{-1}$.

1.1.112. Pentru ca placa să nu se desprindă de tubul de sticlă trebuie ca

$$\rho_{Hg} g h' \leqslant \rho_a g h; \quad h' \leqslant \frac{\rho_a}{\rho_{Hg}} h = \frac{10^3}{13{,}6 \cdot 10^3} 1{,}02 = 7{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

1.1.113. $F = P_m S$, unde presiunea medie $P_m = P_0 + \frac{\rho g h}{2}$; iar $S = l \frac{h}{\cos \alpha}$;

$$F = \frac{P_0 l h}{\cos \alpha} + \frac{\rho_2 g l h^2}{2 \cos \alpha} = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

1.1.114. Presiunea pe fundul vasului A înainte de încălzire este $P = \rho g h$, iar după încălzire $P' = \rho' g h'$, unde ρ și h reprezintă densitatea și înălțimea apei reci, iar ρ' și h' mărimile corespunzătoare ale apei încălzite.
Deci

$$\frac{P'}{P} = \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{h'}{h}.$$

Masa apei rămînind aceeași, avem: $\rho' V' = \rho V$ sau

$$\rho'/\rho = \frac{V}{V'} \text{ de unde } \frac{P'}{P} = \frac{V}{V'} \frac{h'}{h},$$

unde $V = \frac{1}{3} h (s + S + \sqrt{sS})$; $V' = \frac{1}{3} h' (s + S' + \sqrt{sS'})$.

Obținem:

$$\frac{P'}{P} = \frac{s + S + \sqrt{sS}}{s + S' + \sqrt{sS'}}.$$

Cum $S < S'$ rezultă $P' < P$, deci încălzirea apei conduce la micșorarea presiunii pe fundul vasului. După deschiderea robinetului R, apa va curge din vasul B în vasul A și nu din A în B, cum ar reieși la prima vedere.

1.1.115. Notăm cu ρ_1 densitatea mercurului și cu ρ_2 densitatea apei.
Din figura 1.101 rezultă:

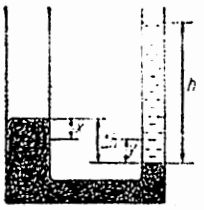


Fig. 1.101.

$$\rho_1 g (x + y) = \rho_1 g \Delta h = \rho_2 g h; \quad \Delta h = x + y = \frac{\rho_2 h}{\rho_1}.$$

$$V_1 = S_1 x = 4 S_2 x; \quad V_2 = S_2 y; \quad y = 4x.$$

De unde:

$$x = \frac{1}{5} \frac{\rho_2}{\rho_1} h; \quad y = \frac{4}{5} \frac{\rho_2}{\rho_1} h.$$

1.1.116. a) $v = \frac{dx}{dt} = 5 \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t$; $v = v_{max}$ dacă $\frac{\pi}{6} t_1 = n\pi$, unde $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $t_1 = 0, 6, 12 \ldots$ s.

$a = \frac{dv}{dt} = -5 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \sin \frac{\pi}{6} t$; $a = a_{max}$ dacă $\frac{\pi}{6} t_2 = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 3, 9, 15 \ldots$ s.

b) $F = ma = -\frac{4\pi^2 Am}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$; $F_{max} = 13 \cdot 10^{-5}$ N,

c) $E_c = \frac{mv^2}{2} = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \cos^2 \frac{\pi}{6} t$ J.

$$E_p = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \sin^2 \frac{\pi}{6} t \text{ J}; \quad E_t = E_c + E_p = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

1.1.117. a) $L = \frac{F}{2}A$; $A = \frac{2L}{F} = 4$ cm; $k = F/A = 28{,}75$ Nm^{-1},

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.052$ s; $y = A \sin \frac{2\pi}{T} t = 4 \sin 38{,}6\,\pi t$ (cm),

c) $E_c = \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - y^2) = 17{,}25 \cdot 10^{-3}$ J.

$$E_p = \frac{m}{2}\omega^2 y^2 = 5{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{J}.$$

1.1.118. a) $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$; $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$; $\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$;

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \pm 8{,}2 \text{ cm/s}.$$

b) $F = ma = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$; $F_{max} = \omega^2 Am = 1{,}49 \cdot 10^{-3}$ N.

c) $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 22{,}1 \cdot 10^{-5}$ J.

1.1.119. Din figura 1.102 avem: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 60^\circ} = \sqrt{19}$ cm.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = 2{,}312; \quad \varphi = \operatorname{arctg} 2{,}312 \simeq 67^\circ = 0{,}372\,\pi.$$

$$x = x_1 + x_2 = \sqrt{19} \cos(\pi t + 0{,}372\,\pi) \text{ cm}.$$

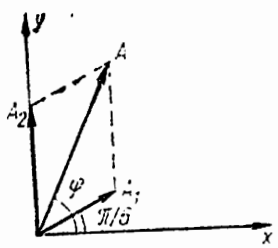


Fig. 1.102.

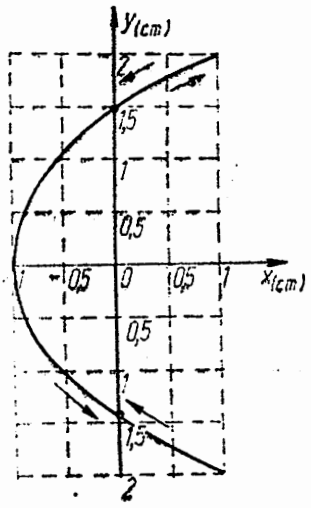


Fig. 1.103.

1.1.120. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$; $y = 2\cos\frac{\pi t}{2} = \pm 2\sqrt{\frac{1 + \cos\pi t}{2}}$;

$$y = \pm\sqrt{2x + 2},$$

Graficul acestei traiectorii este dat în figura 1.103.

1.1.121. $y_1 = A \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(x + d)\right]$; $y_2 = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$;

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\frac{\pi}{\lambda} d \sin\left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d + 2x)\right].$$

1.1.122. a) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ ecuația unei elipse (fig. 1.105).

b) $\sin \pi t = \frac{x}{2}$; $y = -4 \sin \pi t = -2x$ ecuația unei drepte reprezentate în figura 1.106.

1.1.123. a) $\lambda = vT = 18$ m,

b) $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = 1{,}67\ \pi$,

$y = 2 \sin 1{,}67\ \pi = -2 \sin 60° = -1{,}73$ cm.

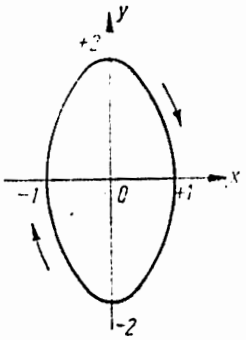


Fig. 1.105.

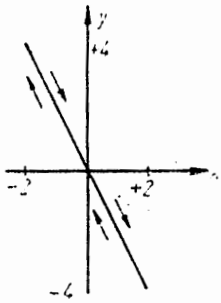


Fig. 1.106.

$u = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 10{,}4 \cos 60° = 5{,}2$ cm/s.

$a = \frac{du}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 54{,}8 \sin 60° = 47{,}5$ cm/s.

c) $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{18} \cdot 4{,}5 = \frac{\pi}{2}$.

1.1.124. a) $v = \sqrt{E/\rho} = 4 \cdot 10^3$ ms^{-1}, b) $\lambda = \frac{v}{\nu} = 8$ m, c) $\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = 4$ m.

1.1.125. a) $y_i = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l - x}{\lambda}\right)$; $y_r = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l + x}{\lambda}\right)$;

$$y = y_i + y_r = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Vom avea ventre pentru:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi; \quad n = 0, 1, 2 \ldots x_n = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}$$

iar noduri pentru:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}; \quad x_n = \pm(2n + 1)\frac{\lambda}{4},$$

b) $y_i = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l - x}{\lambda}\right)$; $y_r = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l + x + \lambda/2}{\lambda}\right)$,

$$y = y_i + y_r = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Rezultă că în cazul b), ventrele sînt la distanțele corespunzătoare nodurilor din cazul a) și invers.

1.2.1. a) $\Delta h = 34{,}3$ m; b) $h_{max} = 138{,}4$ m; c) $v_0 = 52{,}08$ ms^{-1}; d) $t = 1{,}31$ s.

1.2.2. a) $a = 1$ ms^{-2}, $v_0 = 10$ ms^{-1}; b) $l_{max} = 50$ m; c) $\Delta l = 0{,}5$ m.

1.2.3. a) $s_A = 2\ t$; $s_B = 30 - 5\ t$; $s_C = 10\ t - 32$;

b) $t_1 = 4{,}28$ s, $s_1 = 8{,}56$ m; $t_2 = 4$ s, $s_2 = 8$ m;
$t_3 = 4{,}13$ s, $s = 8{,}26$ m;

c) $\Delta s = 32 - 5\ t$ pentru $0 \leqslant t < 3$ s;
$\Delta s = 62 - 15\ t$ pentru $3 < t < 4{,}13$ s.
Dependența $\Delta s = f(t)$ este dată în figura 1.110.

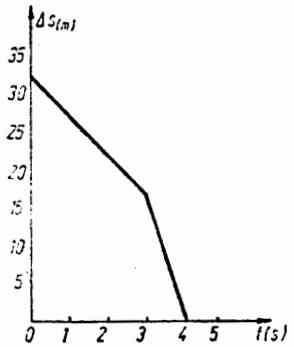


Fig. 1.110.

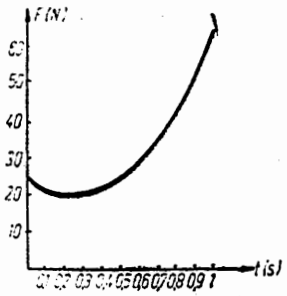


Fig. 1.111.

1.2.4. a) Pentru $t = 1/4$ s, forța F are un minimum;

b) $F_{min} = 19{,}499$ N.
În figura 1.111 se indică dependența $F = f(t)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ s.

1.2.5. $x = 509{,}1$ m.

1.2.6. a) $a_1 = 1$ ms^{-2}; $a_2 = -1$ ms^{-2}; b) $v_1 = 18$ ms^{-1}, $v_2 = 6$ ms^{-1}; c) $d_2 = 112$ m.

1.2.7. a) $t_1 = 4{,}082$ s, $t_2 = 8{,}164$ s, $t_3 = 28$ s;

b) $t_1' = 0{,}67$ s, $t_2' = 1{,}67$ s; c) $t_{12} = 5{,}27$ s,
$t_{13} = 7{,}28$ s, $t_{23} = 10$ s; d) $d_1' = 6$ m, $d_2' = 2{,}4$ m, $d_3' = 4$ m; $A'B' = 20{,}21$ m,
$B'C' = 33{,}74$ m, $C'A' = 47{,}13$ m (v. figura 1.113).

1.2.8. a) $a = -1/9$ ms^{-2}; b) $t = 45$ s, $d_{max} = 112{,}5$ m.

1.2.9. a) $a = -6{,}25$ ms^{-2}; b) $t = 0{,}8$ s; c) $v_m = 12{,}5$ ms^{-1}.

1.2.10. a) $h_{max} = 80$ m, $t = 4$ s, $E_p = 80$ J;

b) $h_{1max} = 40$ m; c) $t_{n\ max} = \dfrac{h_{max}}{2n}$;

d) $t_{tot} = 8\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 27{,}312$ s.

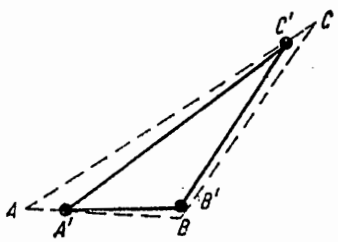


Fig. 1.113.

1.2.11. a) Din figura 1.415: $\sin \alpha = \frac{v}{V}$; $\alpha = 30°$;

b) $\Delta t = t_2 - t_1 = 35{,}73$ s.

1.2.12. a) $\alpha = \arcsin 5/6$; b) $v_{2\,min} = 2{,}5$ ms^{-1}; c) $AC = 206{,}2$ m; d) $t = 20{,}66$ s.

1.2.13. a) $t = \frac{v_1 t' - gt'^2/2}{gt' + v_2 - v_1}$; b) $\frac{2}{g}(v_1 - v_2) < t' < \frac{2v_1}{g}$.

1.2.14. $v = 25$ ms^{-1} — în cazurile a) și b).

1.2.15. a) $t = 2$s; b) $h_1 = 60$ m; c) $u = 10{,}77$ ms^{-1} (vertical în sus), d) $h = 65{,}8$ m, $t = 4{,}7$ s; e) $v = 36{,}28$ ms^{-1}.

1.2.16. a) În figura 1.117, $AX = h'$, $AB = h_{max}$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh'}\ ;\ v' = \sqrt{2g(h_{max} - h')} = \sqrt{v_0^2 - 2gh'}\ ;$$

b) $t_u = \frac{v}{g}$; $t_c = \frac{v'}{g}$; $t_u = t_c$.

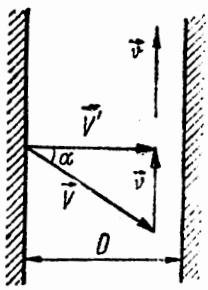


Fig. 1.115.

Fig. 1.117.

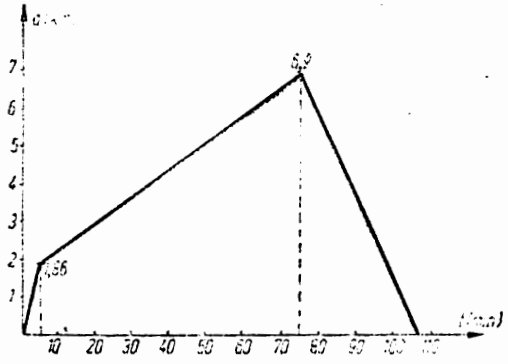


Fig. 1.119.

1.2.17. a) $t_c = 9$ s; b) $d = 900$ m; c) $\Delta t = 1$ s; d) $\Delta t_1 = 1{,}428$ s, $\Delta t_2 = 0{,}769$ s.

1.2.18. a) $t = 80$ s; b) $v = v_{0x} = 692$ ms^{-1}; c) $d_{max} = 55{,}36$ km; d) $h_{max} = 8$ km; e) $R = v_{0x}^2/g = 47{,}866$ km.

1.2.19. a) $v_m = 36$ km/h; $t_1 = 6/5$ h; $t_2 = 4/5$ h; b) $t_1' = 5/6$ h, $t_2' = \frac{5}{4}$ h; c) nu se pot depăși pe drum.

1.2.20. a) $v_1 = 1{,}2$ ms^{-1}; b) dependența $d = f(t)$ este indicată în figura 1.119.

1.2.21. a) $t = 200$ s; b) $s = 990$ m; c) $a = 5{,}05\ 10^{-2}$ ms^{-2}; d) $a' = 4$ ms^{-2}, $t' = 2{,}5$ s; d) e) $\mu = 0{,}4082$.

1.2.22. a) $AC = 24$ km; b) $d' = 9$ km; c) $\Delta t = 2{,}78$ h;
d) $n_1 = 95{,}5$ rotații, $n_2 = 48$ rotații; e) $a = 6{,}7\ 10^{-2}$ m s^{-2}; $s = 119{,}4$ m.

1.2.23. a) $D = d = 100$ m; b) $t = 17{,}72$ s; c) $s = 4{,}8$ km.

1.2.24. a) $\alpha_1 = 45°$; b) $\alpha_2 = 45°$.

1.2.25. $$s_1 = v_1 \frac{(v_2 + v_1 \cos \alpha)d}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}.$$

1.2.26. a) $t_1 = 0{,}8$ h; b) Din figura 1.123, $OA' = 60$ km, $OB' = 30$ km. $A'B' = 10 \cdot \sqrt{45}$ km.

1.2.27. Nu are loc ciocnirea.

1.2.28. a) $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$; b) $T = 2\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$, $F = 2T$; c) $m_1/m_2 = \dfrac{n+1}{n-1}$,

d) $a = 0{,}164$ ms^{-2}, $t = 3{,}83$ s, $v = 0{,}63$ ms^{-1}.

1.2.29. a) $h = 93$ m; b) $v = 2{,}43$ ms^{-1}.

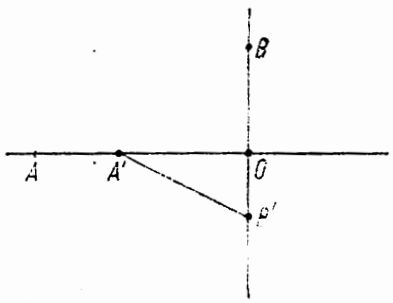


Fig. 1.123.

Fig. 1.125.

1.2.30. a) $v_0 = 14$ ms^{-1}; b) din figura 1.125, $v = v_0 + \left(g - \dfrac{F}{m}\right)t$;

c) $a = 7$ ms^{-2}, $F = m(a + g) = 16{,}8$ N; d) $E_c = 98$ J, $E_p = 94$ J.

1.2.31. a) $a_A = 1$ ms^{-2}; $a_B = 2$ ms^{-2}, $s_{1A} = 50$ m, $s_{2A} = 450$ m, $s_{1B} = 100$ m, $s_{2B} = 500$ m; b) $t = 35$ s, $S = 600$ m;

c) $s_{A\,max} = 450$ m, $s_{B\,max} = 200$ m, $t_A = 30$ s, $t_B = 20$ s;

d) $\Delta S_1 = \dfrac{1}{2} t^2 (0 < t < 10$ s); $\Delta S_2 = 20\ t - \dfrac{1}{2}\ t^2 - 100\ (10 < t < 30$ s),

$\Delta S_3 = 350 - 10\ t\ (30 < t < 35$ s); $\Delta S_4 = 10\ t\ (35 < t < 55$ s), $\Delta S_5 = 30\ t - 1/2\ t^2 - 200\ (55 < t < 65$ s) $S = 250$ m $(t \geqslant 65$ s).

1.2.32. a) $a \simeq 3{,}26$ ms^{-2}; b) $t = 0{,}39$ s; c) $h = 0{,}66$ m.

1.2.33. a) $F_{tr} = 400$ N, $F_2 = 100\sqrt{7}$ N; b) $s = 800$ m, $t = 40$ s.

1.2.34. a) $v_1 = 98{,}4$ cm s^{-1}, $t_1 = 1{,}7$ s; b) $t = 2{,}9$ s, $h = 159{,}3$ cm; c) $t' = 4{,}9$ s; d) $T = 1{,}0267$ N.

1.2.35. a) $a_1 = 0{,}125$ ms^{-2}; b) $F_{tr} = 135$ kN; c) $s_1 = 900$ m, $P_1 = 2{,}025$ MW; d) $s = 4{,}5$ km, $t = 300$ s.

1.2.36. a) $t = 4$ s, $\Delta h = 176{,}4$ m; b) $v_1 = 58{,}8$ ms^{-1}, $v_2 = 63{,}7$ ms^{-1}, $v_1' = 65{,}3$ ms^{-1}, $v_2' = 60{,}4$ ms^{-1}.

1.2.37. a) $a = 3{,}267$ ms^{-2}; b) $h_1 = 29{,}4$ m, $E_c = 14{,}406$ J; c) $h_2 = 4{,}9$ m; d) 19,6 ms^{-1}.

1.2.38. a) $v_1 = 7{,}75$ ms^{-1}; b) $s_2 = 140{,}15$ m; c) $E = 4{,}803 \cdot 10^5$ J; d) $P = 38{,}75$ kW.

1.2.39. a) $\Delta t = 0{,}82$ s (corpul cu masa m_2 înainte); b) $t \simeq 0{,}88$ s.

1.2.40. a) $E_c = \frac{F^2}{2m} t^2$; b) $E_c = F \cdot (x - x_0)$, $E_c = F \cdot x$ pentru $x_0 = 0$; c) din figurile 1.126 și 1.127 avem $\text{tg}\ \alpha/\text{tg}\ \beta = \frac{F}{2m} = a/2$.

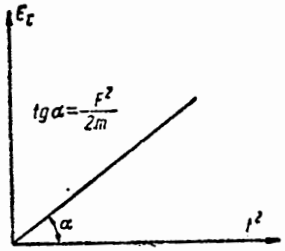


Fig. 1.126.

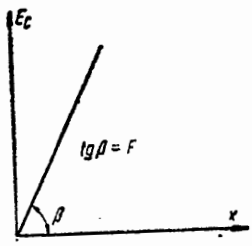


Fig. 1.127.

1.2.41. a) , c), d).

1.2.42. a) $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$; $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$; b) $a = \frac{(m_2 - \mu m_1) g}{m_1 + m_2}$;

$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \mu)$.

1.2.43. a) $T_1 = 1\,080$ N; b) $T_2 = 1\,416$ N.

1.2.44. a) $m = 800$ kg, $G = 8$ kN; b) $s = 125$ cm; c) $F_m = 1{,}201$ kN.

1.2.45. a) $v_s = 25{,}9$ ms^{-1}; b) $\Delta t = 71$ minute.

1.2.46. a) $a = 0{,}516$ ms^{-2}; b) $t_1 = 3{,}85$ s, $t_2 = 3{,}54$ s; c) $G_1 = 10{,}316$ N, $G_2 = 10$ N, $G_3 = 9{,}28$ N.

1.2.47. a) $v = 21$ ms^{-1}; b) $v = \text{const.}\ \sqrt{t}$ nu este uniform accelerată; c) $v_l = 25$ ms^{-1}; d) $F_{tr} = 23{,}823$ kN, $t = 4$ s.

1.2.48. a) $\mu = 0{,}008$; b) $v_1 = 21{,}908$ ms^{-1}; c) $\Delta l = 2\,500$ m.

1.2.49. a) $E_2' = \frac{4\ m_1 m_2}{m_1 + m_2} E_1$; b) $m_1/m_2 = 5$.

1.2.50. a) $v_0 = 20$ ms^{-1}; b) $Ftr = 245$ kN; c) $d = 208$ m.

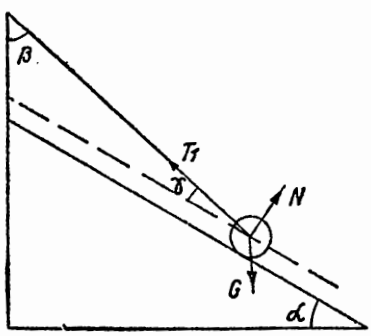


Fig. 1.145.

1.2.51. a) $a_1 = -3{,}384$ ms^{-2}; b) $t_1 = 4{,}8$ s; c) $s = 33$ m; d) $a_2 = 0{,}616$ ms^{-2}; e) $v_2 = 12{,}32$ ms^{-1}; $E_c = 75{,}8$ J.

1.2.52. a) $\mu = 0{,}35$; b) $F = 5{,}6$ N; c) $L = 12$ J, $\eta = 0{,}62$.

1.2.53. a) $\alpha = 30°$, $a_1 = 3{,}21$ ms^{-2}, $t_1 = 3{,}5$ s; b) $a_2 = 4{,}9$ ms^{-2}, $s = 12$ m; c) Din figura 1.145.

$T_1 = G \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = 0{,}52$ N; $N =$

$= G \cos \alpha - T \cos (\alpha + \beta) = 0{,}72$ N.

1.2.54. a) $F \leqslant \mu G \cos \alpha - G \sin \alpha$ dacă F este orientată în jos, $F \leqslant G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ dacă F este orientată în sus; b) $\operatorname{tg} \beta = \mu$; c) forța acționează ca în figura 1.146.

Minimum pentru $\operatorname{tg} \gamma = \mu$, $F_{min} = \mu G / \sqrt{\mu^2 + 1}$.

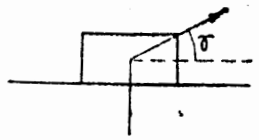


Fig. 1.146.

1.2.55. a) $t = 2$ s, $t_1 = 0{,}45$ s, $t_2 = 0{,}05$ s; b) $x = h - v_{01} t$, $t = 0{,}98$ s; c) $E_A = 54$ J, $E_B = 92$ J.

1.2.56. a) $a_1 = 0{,}66$ ms^{-2}; $a_2 = 1{,}51$ ms^{-2}; b) $t = 25{,}25$ s, $s = 210{,}39$ m; c) $E_{c1} = 21{,}497$ kJ, $E_{c_2} = 19{,}191$ kJ.

1.2.57. a) $E = 6{,}25$ J; b) $l_1 = 4$ m; c) $F_m = 1{,}054$ kN.

1.2.58. a) $h = 23{,}16$ m; b) $Q = 760$ cal.

1.2.59. a) $p = 0{,}5$ m; b) $s_{max} = 6{,}25$ m.

1.2.60. a) $T = mg(3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0)$; b) $\cos \alpha_0 = 0{,}5$; $\alpha_0 = 60°$; c) $\beta = 90°$.

1.2.61. a) $\cos \beta = 0{,}8$, $\beta = 37°$; b) $T_{max} = 70$ N; c) $\Delta E = 4{,}7$ J.

1.2.62. a) $\sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha \simeq \alpha = 0{,}05$, $\cos \alpha = 1$, $a = 0{,}2$ ms^{-2}, $v_m = 6$ ms^{-1}; b) $t_1 = 50$ s, $t_2 = 200$ s.

1.2.63. a) $v \simeq 5$ ms^{-1}; b) $u = 9$ ms^{-1}, $\Delta E = 90$ J; c) $h \simeq 2{,}4$ m.

1.2.64. a) $a_1 = 1{,}509$ ms^{-2}, $a_2 = -0{,}2$ ms^{-2} ($a_3 = 0$);
b) $s = 5$ m, $t_1 \simeq 2{,}57$ s, $v_1 = 3{,}88$ ms^{-1}, $v_2 = 0$;
c) $v_{03} = 2{,}26$ ms^{-1}; d) $a_3 = 0{,}8$ ms^{-2}; e) $t_3 = 4{,}79$ s.

1.2.65. a) $t_0 = 8$ s; b) $H = 133{,}7$ m; c) $s = gt^2/2$, $v = gt$,

$$s = v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}, \quad v = v_0 + a_1 t, \quad a_1 = 3{,}21 \text{ ms}^{-2},$$

$$s = v_1 t - \frac{a_2 t^2}{2}, \quad v = v_1 - a_2 t, \quad a_2 = 1{,}96 \text{ ms}^{-2},$$

$$s = v_2 t - \frac{a_3 t^2}{2}, \quad v = v_2 - a_3 t, \quad a_3 = 6{,}94 \text{ ms}^{-2}.$$

1.2.66. a) $l = 26{,}54$ m, $h = 13{,}27$ m, $s = 68{,}4$ m;
b) $F_1 = 1{,}73$ N, $F_2 = 2$ N, $E_1 = 45{,}9$ J, $E_2 = 136{,}8$ J.

1.2.67. a) $a_1 = 4{,}64$ ms^{-2}, $v = 3{,}407$ ms^{-1}; b) $a_2 = 8{,}75$ ms^{-2}, $\Delta S = 0{,}66$ m; c) $E = 9{,}55$ J.

1.2.68. a) $l = 4{,}17$ m, $v_0 \simeq 5$ ms^{-1}; b) $E_p \simeq 200$ J; c) $L \simeq 200$ J.

1.2.69. a) $F_1 = 0{,}88$ N; b) $F_2 = 0{,}338$ N; c) $F_3 = 1{,}01$ N; d) $F_4 = 0{,}143$, nu-i posibil.

1.2.70. a) $t = 20$ s; b) $v_1 = 387$ ms^{-1}, $v_2 = 258$ ms^{-1}; c) $\Delta t = 53{,}5$ s.

1.2.71. a) $l_n = l\left(\dfrac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}\right)^{2n} = lr^{2n}$;

b) $l_{tot} = l(1 + r + r^2 + \ldots) = l \dfrac{2\mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$;

c) $t_1 = \left[\dfrac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}\right]^{1/2}$, $t_n = r^n t_1$.

1.2.72. a) $s = 16{,}65$ m, $v = 16{,}65$ ms^{-1}; b) $T = 15{,}06$ N; c) $0{,}327 \leqslant m_2 \leqslant 0{,}637$ kg; d) 20,6 m.

1.2.73. a) $\alpha_1 = 30°$; b) $\alpha_2 = 60°$ $F_{t\,max} = \frac{200}{\sqrt{3}}$ N; c) $\eta_1 = 50\%$, $\eta_2 = 75\%$.

1.2.74. a) Din egalitatea spațiului parcurs $V_{BN} = V_{CN}$, $V_{CM} = V_{BN}$;

b) $L_A = Fs$; $L_B = \left(\frac{G}{g}a + F\right)s$; $L_C = \left(F - \frac{G}{g} - a\right)s$;

$C_A = kL_A$, $C_B = kL_B$, $C_C = kL_C$: $C_A \neq C_B \neq C_C$.

1.2.75 a) $v_1 = \left[\frac{ES(\Delta l)^2}{m_1 l} + 2\mu g s_1\right]^{1/2}$, $v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$;

b) $E = \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$; c) $s_2 = \frac{v_2^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

1.2.76. a) $h = 44{,}1$ m, $t_0 = 3$ s; b) $v = 30$ ms^{-1}, $H = 50$ m;

c) $v_1 = 24$ ms^{-1}, $v_2 = 12$ ms^{-1};

d) $\Delta s = \begin{cases} (36\,t - 3{,}92\,t^2)\text{ m};\ 0 \leqslant t \leqslant 3{,}06\text{ s}, \\ (18{,}36 + 24\,t - 1{,}96\,t^2)\text{ m};\ 3{,}06 \leqslant t \leqslant 6{,}12\text{ s}, \\ 91{,}8\text{ m};\ t \geqslant 6{,}12\text{ s}. \end{cases}$

1.2.77. a) $a = 1{,}02$ ms^{-2}, $T = 5{,}9$ N; b) $a = 0{,}244$ ms^{-2}, $T = 6$ N.

1.2.78. $P_m = \frac{G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + v^2/2sg)v}{2}$.

1.2.79. a) $t = 0{,}78$ s; b) $T = 13{,}06$ N; c) $E = 2{,}61 \cdot 10^9$ N m^{-2}.

1.2.80. $t = 4{,}3$ s.

1.2.81. a) $F_{min} = 2{,}5$ kN; b) $s_{max} = 50$ m; c) $P_m = 7{,}5$ kW.

1.2.82. a) $F_1 = 15{,}8$ N; b) $F_2 = 11{,}59$ N; c) $F_3 = 8{,}05$ N.

1.2.83. a) $L = 2\,120{,}8$ J; b) $F_1 = 37{,}57$ N; c) $t = 75$ s.

1.2.84. a) $E = 2 \cdot 10^{12}$ N m^{-2}; b) $t_1 = 15$ s; c) $h = 7{,}2$ m.

1.2.85. a) $v_B = 15{,}9$ ms^{-1}; b) $t = 3{,}5$ s; c) $F = 56{,}36$ N; d) sensul vitezei v_0 nu afectează aceste rezultate.

1.2.86. a) $t_1 = 64$ s, $a_1 = 0{,}39$ ms^{-2}; b) $a_3 = 0{,}5$ ms^{-2}; c) $l = 16\,425$ m; d) $F = 450$ N.

1.2.87. a) $t_1 = 14{,}74$ s; b) $v = 27{,}86$ ms^{-1}.

1.2.88. a) $v = 20$ ms^{-1}; b) $\Delta t = 168{,}6$ s.

1.2.89. a) $s = 43{,}61$ m; b) $E_{c\,max} = 19{,}3 \cdot 10^{-3}$ J; c) $T = 1{,}413$ s.

1.2.90. a) $v_1 \simeq 16$ ms^{-1}, $v_2 = 10$ ms^{-1}; b) $\Delta l = 0{,}176$ m.

1.2.91. $G_b = 1\,176$ N.

1.2.92. a) $a_1 = 0{,}5$ ms^{-2}, $a_2 = 1$ ms^{-2}; b) $s_1 = 6{,}25$ m, $s_2 = 12{,}5$ m.

1.2.93. $h = d(1 + g^2R^2/v^4)^{-1/2}$.

1.2.94. a) $F_t = 4\,350$ N; b) $F_{cf} = 2\,093{,}3$ N; c) $t = 58{,}87$ s; d) $v_t = 27{,}65$ ms^{-1}; $v_r = 59{,}86$ ms^{-1}.

1.2.95. $\cos\varphi = 2/3$.

1.2.96. a) $v = 5$ ms^{-1}; b) $a_t = -1$ ms^{-2}, $a_n = 0{,}5$ ms^{-2}, $a = 1{,}12$ ms^{-2}.

1.2.97. a) $T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$; b) $E_c = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$.

1.2.98. Din figura 1.172 rezultă $\omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{d}}$.

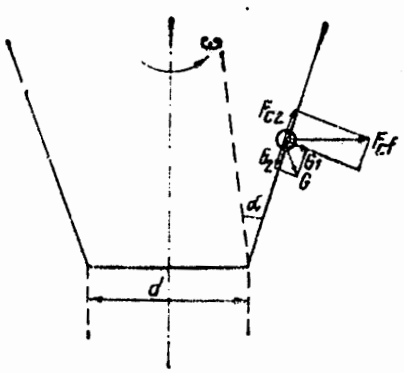


Fig. 1.172.

1.2.99. a) $v = 14$ ms^{-1}; b) $s = 26{,}2$ m.

1.2.100. $\frac{G}{G_1}(\omega^2 R - \mu g) - g \leqslant a \leqslant \frac{G}{G_1}(\omega^2 R + \mu g) - g$.

1.2.101. a) $v_1 = \frac{2m_2 v_{02} + (m_1 - m_2)v_{01}}{m_1 + m_2}$,

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{01} + (m_2 - m_1)v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$v_1 = v_2$ dacă $v_{01} = v_{02}$; b) $m_1 = m_2$, $v_1 = v_{02}$, $v_2 = v_{01}$.

1.2.102. a) $\alpha = 60°$; b) $L \simeq 9{,}8$ J; c) $E = 2 \cdot 10^{11}$ N $\cdot$ m^{-2}, $\Delta l' = 7{,}84 \cdot 10^{-5}$ m.

1.2.103. a) $L = 1{,}27 \cdot 10^8$ J, $M = 6{,}88$ kg; b) $s = 29{,}5$ m, $t = 7$ s.

1.2.104. a) $T = 3{,}14$ s, $\nu = 0{,}318$ s^{-1}, $E_c = 4$ J; $x = 2 \cos 2t$, $y = 2 \sin 2t$; b) $\omega_r = 3$ rad/s; c) $s = 9$ m, $t = 3$ s.

1.2.105. a) $F_1 = 3{,}75$ kN, $F_2 = 4{,}5$ kN; b) $F'_2 = 0{,}5$ kN; c) $\varepsilon_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 9 \cdot 10^{-4}$; d) $L_1 = 150$ kJ, $L_2 = 180$ kJ; e) $t = 30$ s.

1.2.106. a) $h = 2$ m, $n = 10$; b) $v = 0{,}628$ ms^{-1}; c) $F' = 100$ N, $P_m = 10{,}6$ kW; d) $t = 144$ s, $n' = 90$ rotații.

1.2.107. a) $m_1/m_2 = \frac{v' + V}{v + V} = 1{,}012$; $m_n = m_1 \left(\frac{v + V}{v' + V}\right)^{n-1}$;

b) $\mu = 0{,}0665$, $s = 599{,}84$ m.

1.2.108. a) $E_A = 0{,}392$ J; $E_B = 0{,}098$ J; b) $F_A = 6{,}21$ N, $F_B = 2{,}28$ N;

c) $h_{min} = \frac{5}{2} R = 0{,}375$ m; d) $t = 1$ s; e) $s = 2{,}25$ m.

1.2.109. a) $d = \left[\frac{4h(m_1 h_1 - m_2 h_2)}{m_1}\right]^{1/2}$; b) $F = m_1 g + \frac{2g(m_1 h_1 - m_2 h_2)}{l}$.

1.2.110. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{g}\left(r + l \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}\right)$; b) $\omega = 2$ rad/s; c) $l = 24$ m.

1.2.111. a) $h = 309$ m; b) $h_n = k^{2n} h$, $H = h \frac{1 - k^{2(n+1)}}{1 - k}$; $n = 3$, $H = 36$ m;

c) $\omega = \pi / \sqrt{6}$ rad $\cdot$ s^{-1}.

1.2.112. a) $\varrho_S = 1{,}403 \cdot 10^3$ kg/m^3; b) $M_S = 2 \cdot 10^{31}$ kg; c) $R_S = 7 \cdot 10^5$ km.

1.2.113. $v = 760$ ms^{-1}.

1.2.114. a) $F_c = 4{,}9$ N; b) $E_c = 0{,}857$ J.

1.2.115. a) $h = 0{,}5$ m; b) $s_1 = 0{,}37$ m; c) $t_2 = 0{,}43$ s; d) ajunge în N.

1.2.116. Ținînd seama de figura 1.173 avem:

a) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a\cos\alpha}{g + a\sin\alpha}$; b) $T = m\sqrt{g^2 + 2ga\sin\alpha + a^2}$.

1.2.117. a) 466 ms^{-1}; b) 233 ms^{-1}; c) 0.

1.2.118. a) $\varepsilon = 8{,}33$ rad s^{-2}; b) $\omega = 25$ rad s^{-1}; c) $a_n = 5{,}5\ 10^2$ ms^{-2}; d) 10^{-3} J.

1.2.119. a) $\omega_0 = 100$ rad s^{-1}; b) $\varepsilon = -10$ rad s^{-2}, $n = 80$ rotații.

1.2.120. a) $v_{0x} = 500$ ms^{-1}, $v_{0y} = 20$ ms^{-1}, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0392$; b) $H_{max} = 30{,}6$ m; c) $d_2 = 5$ km.

1.2.121. a) $h = 20{,}1$ m; b) $T = 2{,}92$ kN; c) $v = 22{,}6$ ms^{-1}; d) $Q_1 = 470{,}4$ kJ, $Q_2 = 411{,}6$ kJ.

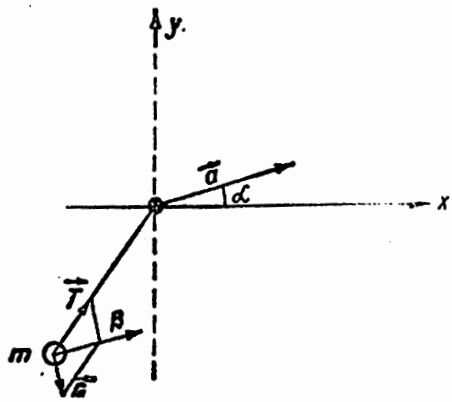


Fig. 1.173.

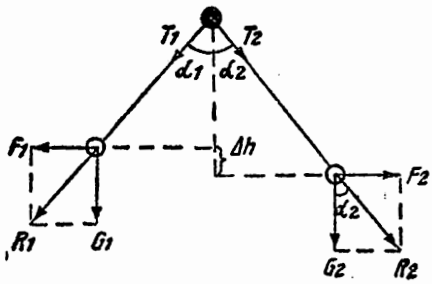


Fig. 1.174.

1.2.122. a) $v_0 = 2{,}015$ ms^{-1}; b) $F' = 4{,}9$ N, $F'' = 19{,}6$ N; c) $\alpha = 1{,}1\ 10^{-5}$ $grad^{-1}$; d) $m' = 24{,}13$ kg.

1.2.123. a) $F_{cf} = mv^2/r$; b) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{(R + l/2)f}{m}} = 5$ ms^{-1}.

1.2.124. a) $h_0 = v_0^2/2g$; b) $h_1 = \dfrac{h_0}{1 - h_0/R}$; c) $a = \dfrac{f}{m} - g$, $v_0 = at$, $l = \dfrac{1}{2}at^2$.

1.2.125. Utilizăm figura 1.174, a) $\omega^2 = g\sqrt{\dfrac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 l_1^2 - m_2^2 l_2^2}}$;

$\nu = 0{,}95$ Hz; b) $v_1 = 0{,}39$ ms^{-1}, $v_2 = 0{,}756$ ms^{-1}, $\Delta h = 0$; c) $E = m_1 g l_1 (1 - \cos\alpha_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\alpha_2) + \dfrac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) - \dfrac{g^2}{2\omega^2}(m_1 + m_2)$.

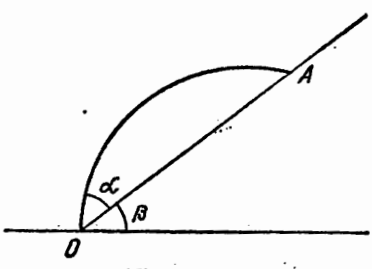


Fig. 1.175.

1.2.126. a) $t = 8$ s; b) $Q = 1{,}5$ J; c) $v = 2{,}4$ ms^{-1}, $\alpha = \operatorname{arctg} 1{,}82$.

1.2.127. a) $r = 200$ m; b) $v_1 = 22{,}36$ ms^{-1}, $v_2 = 43$ ms^{-1}.

1.2.128. Din figura 1.175, distanța $x = \dfrac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha \operatorname{tg}\beta)$; $\dfrac{dx}{d\alpha} = 0$; $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$.

1.2.129. Vezi figura 1.176: a) $F = mg$;

b) $F = mg - \frac{mv^2}{R}\cos\varphi$ (fig. 1.176, *a*); c) $F = mg + \frac{mv^2}{R}\cos\varphi$ (fig. 1.176, *b*).

1.2.130. a) $\omega = 3{,}36$ rad/s; b) $E_c = 1{,}41$ J, $E_t = 2{,}76$ J.

1.2.131. a) $\cos\alpha = 1{,}5/2$; b) $\cos\beta = 2{,}5/3$.

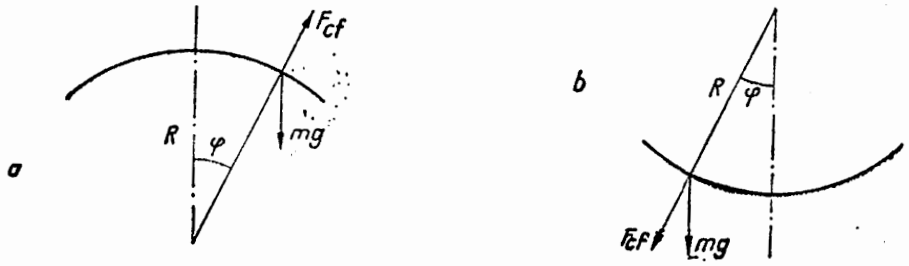


Fig. 1.176.

1.2.132. a) $F_1 = 4{,}24$ N; b) $F_2 = 2{,}45$ N; c) $F_3 = 6{,}22$ N; d) $v = 2{,}67$ ms^{-1}.

1.2.133. a) $s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu g t_1^2$, $v_1 = v_0 - \mu g t_1$; b) $v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$, $s_{max} = \frac{v^2}{2\mu g}$.

1.2.134. a) $n = 39{,}34$ rot/minut; b) $\Delta l = 0{,}2$ mm; c) $T_{max} = 8$ N.

1.2.135. a) $\nu = 2{,}5$ Hz, $\omega = 15{,}7$ rad/s; b) $v_{max} = 0{,}785$ ms^{-1}, $a_{max} = 12{,}32$ ms^{-2}; c) $E_c/E_p = 3$.

1.2.136. a) $T = 16$ s, $\nu = 6{,}25 \cdot 10^{-2}$ Hz; b) $v_{max} = 3{,}925 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1}, $a_{max} = 1{,}54\ 10^{-3}$ ms^{-2};

c) $F_{max} = 2{,}46 \cdot 10^{-4}$ N; d) $E_c = 1{,}232 \cdot 10^{-5} \cos^2\left(\frac{\pi}{8} t + \pi/8\right)$ J,

$E_p = 1{,}232 \cdot 10^{-5} \sin^2\left(\frac{\pi}{8} t + \frac{\pi}{8}\right)$ J, $E_t = 1{,}232 \cdot 10^{-5}$ J; e) $\Delta t = 1{,}33$ s.

1.2.137. a) $T = 0{,}804$ s, $\nu = 1{,}24$ Hz, $\omega = 7{,}79$ rad/s; b) $A = 0{,}16$ m; c) $E = 6{,}272$ J; d) $v_0 = 1{,}25$ ms^{-1}, $v_{x=A} = 0$.

1.2.138. a) $E = 2{,}89$ J, $\alpha_m = 60°$; b) $F = 9{,}8$ N; c) $\Delta t = 62{,}5°$.

1.2.139. a) $y = 0{,}12 \sin 80\ t$(m); b) $y_1 = 0{,}1038$ m; $y_2 = 0{,}1164$ m; c) $\nu = 12{,}74$ Hz, $T = 0{,}0785$ s; d) $F_{max} = 19{,}2$ N.

1.2.140. a) $T = 1{,}4$ s; b) $\varphi_{max} = 60°$; c) $E_c = 14{,}4207$ J.

1.2.141. a) $n^2 = \frac{900\ Mgx}{m\pi^2 \Delta l (r + x)}$; $n_1 = 463$ rot/min, $n_2 = 1\,220$ rot/min; b) $\frac{dn}{dx} =$

$= \frac{15}{\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m\Delta l}}\sqrt{\frac{r^3}{x(r+x)^3}}$; $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\frac{r}{(r+x)}\frac{\Delta x}{x}$;

c) $\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta l\, \mu m}{2xM}$.

1.2.142. a) $x \simeq 0{,}44$ m; b) $\nu = 1$ Hz; c) $S = 3$ m.

1.2.143. a) $A = 0{,}4$ m, $T = 0{,}2$ s, $\varphi_0 = \pi/3$; b) $v = -2\pi\sqrt{3}$ ms^{-1}; c) $h = 16$ m.

1.2.144. a) $E_c = 5 \cdot 10^5$ J; b) $P = 10^4$ W; c) $m = 1{,}804$ kg/h; d) 14,687 ori.

1.2.145. A. a) $F = 44{,}688$ kN; b) $L = 892{,}76$ kJ, $P = 372{,}4$ kW.
B. a) $F = 56{,}439$ kN; b) $L = 1128{,}788$ kJ; $P = 470{,}328$ kW.

1.2.146. a) $$t = \sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{\sqrt{gh\sin^2\alpha + 2gh(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2}\right)}}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} -$$

$$- \frac{\sqrt{gh}\sin\alpha}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)};$$

b) $$v = \sqrt{gh\sin^2\alpha + 2gh(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2}\right) - 2\mu gd};$$

$$t = \frac{1}{\mu g}\left[\sqrt{gh\sin^2\alpha + 2gh(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2}\right)} - v\right].$$

1.2.147. a) $F_1 = 6 \cdot 10^3$ N, $F_2 = 869$ N; b) $8 \cdot 10^3$ N, $2{,}88 \cdot 10^3$ N; c) 14,286 s, 49,06 s.

1.2.148. a) $\nu \geqslant 0{,}407$ s^{-1}; b) $T_{\max} = 738{,}6$ N; c) $\nu = 0{,}407$ s^{-1}.

1.2.149. a) $3 \cdot 10^5$ N, $2 \cdot 10^5$ N; b) $a = 0{,}5$ ms^{-2}, $s = 300$ m, $L = 45$ MJ; c) 37,03 s, 50 ms^{-1}.

1.2.150. $$v_{01}^2 = \frac{2Mqm_1}{m_2(m_1 + m_2)}; \quad v_{02}^2 = \frac{2Mqm_2}{m_1(m_1 + m_2)};$$

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} - L\mu m_1 g - 2l_1 m_1 g\mu\cos\alpha_1 = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2},$$

$$\frac{m_2 v_{02}^2}{2} - L\mu m_2 g - 2l_2 m_2 g\mu\cos\alpha_2 = \frac{m_2 v_{2f}^2}{2},$$

$$l_1 = \frac{v_{01}^2 - \mu gL}{2g(\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1)}; \quad l_2 = \frac{v_{02}^2 - \mu gL}{2g(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)}.$$

1.2.151. a) $$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\alpha);$$

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\frac{l_1}{l_2}(1 - \cos\alpha);$$

b) $$E_{c_1} = m_1\frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} gl_1(1 - \cos\alpha_1);$$

$$E_{c_2} = m_2\frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} gl_1(1 - \cos\alpha).$$

1.2.152. a) $F_1 = 120$ N; $F_i = iF_1$; $F_1' = 70$ N, $F_i' = iF_1'$;

b) $F = 7\mu' F_1$, $F' = 7\mu' F_1'$; c) $\mu' \leqslant \frac{11}{7}\mu$.

1.2.153. a) $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + m/M\cos\alpha}}$; b) $\frac{1}{1 + \frac{m}{M}\cos\alpha}$; c) $l = \frac{}{M}$ os α.

1.2.154. a) $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $E_c = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$; b) $m_1 > 20\ m_2$.

1.2.155. a) $F = 630$ N; b) $v = 21$ ms^{-1}; c) $h = 11{,}36$ m, $E_p = 33{,}398$ kJ.

1.2.156. $h \geqslant 12{,}5$ m, $s = 41{,}6$ m, $F_m = 788{,}5$ N.

1.2.157. a) $l = 1{,}98$ m, $T = 2{,}82$ s; b) $E_p = 2{,}87$ J

1.2.158. a) $T = 0{,}7755$ s; b) $E = 3{,}675$ J.

1.2.159. a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{c^2} = 1$; b) $v = \omega\sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + c^2 \cos^2 \omega t}$;

$a = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2 \omega t + c^2 \sin^2 \omega t}$.

1.2.160. a) $A = 0{,}44$ m, $T = 0{,}186$ s; b) $x = 0{,}44 \sin (33{,}76\, t)$ m, $x = 0{,}44 \cos (33{,}76\, t)$m.

1.2.161. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$; $T = m\sqrt{a^2 + g^2}$; b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \cos \beta}{g + a_1 \sin \beta}$,

$T = m\sqrt{g^2 + a_1^2 + 2a_1 g \sin \beta}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \cos \beta}{g - a_1 \sin \beta}$,

$T = m\sqrt{g^2 + a_1^2 - 2a_1 g \sin \beta}$.

1.2.162. a) $y = 4{,}02 \sin 3{,}116\, t$ (cm); b) $T = 3{,}924 \cdot 10^{-2}$ N; c) $x = 6{,}48$ m, $v = 18{,}87$ m/s

1.2.163. a) $a = -\omega^2 x$; b) $a = \omega\sqrt{v_0^2 - v^2}$; c) $t_1 = 0{,}06$ s, $t_2 = 0{,}005$ s.

1.2.164. $\varphi_2 - \varphi_1 = 71{,}46°$.

1.2.165. a) $t = 1/24$ s; b) $4\pi^2 m A^2/2$; c) $F = -mA(4\pi)^2 \sin (2\pi t + \pi/6)$.

1.2.166. $A_1 = A_2 = A_r$.

1.2.167. $E = 1{,}89 \cdot 10^{11}$ N m^{-2}.

1.2.168. a) Manşonul se deplasează treptat pînă la distanţa ma/k;

b) $x = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; c) amplitudinea manşonului este 5 cm, iar a căruciorului 1 cm, $\omega = 10{,}8$ rad/s.

1.2.169. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L_2}{g}}$; $A = L_2\sqrt{2}$; b) $h = L_2(\sqrt{2} - 1)$.

1.2.170. a) $g' = 9{,}1$ ms^{-2}; b) $v = 7{,}75$ km/s; c) $3{,}855 \cdot 10^{10}$ J; d) $T' = T\sqrt{\frac{9{,}8}{9{,}1}}$.

1.2.171. a) $G - \mu P - Q(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{G + P + Q}{g} a_1$ sau $Q \sin \alpha - Q\mu \cos \alpha -$

$- \mu P - G = \frac{G + P + Q}{g} a_2$;

b) $T_1 = G - \frac{G}{g} a_1$; $T_2 = T_1 - \mu P - \frac{P}{g} a_1$ sau

$T_1' = G + \frac{G}{g} a_2$; $T_2' = T_1' + \mu P + \frac{P}{g} a_2$.

1.2.172. a) $\simeq 9{,}78$ N; b) ~ 17 ori.

1.2.173. a) $D \simeq 3{,}4 \cdot 10^5$ km; b) $T_L \simeq 2{,}15\ T_p$.

1.2.174. $G = mg_0 R^2/(R + h)^2$; $h = R(\sqrt{3} - 1)$; $g = \frac{g_0}{36}$

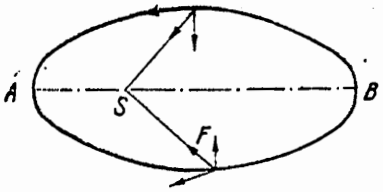


Fig. 1.177.

1.2.175. v_{max} în punctul A și v_{min} în B (fig. 1.177).

1.2.176. $h = 220$ km.

1.2.177. a) $R = 4{,}23 \cdot 10^7$ m, $v = 3{,}08 \cdot 10^3$ ms^{-1}; b) $L = 11{,}53 \cdot 10^{10}$ J.

1.2.178. $H = 82\,400$ km.

1.2.179. a) 7,79 km/s; b) 5 280 s; c) 583,5 N; d) 2,03 s.

1.2.180. Din primul satelit în sensul de mișcare al acestuia.

1.2.181. a) 30,6 m; b) 122,5 m; c) 500 kg m^{-3}.

1.2.182. a) 2,8 m^{3}s^{-1}, 2 800 kg s^{-1}; b) 6 174 kW; c) 700 m s^{-1}; d) 2,34°C; e) 7,65 m^3 s^{-1}.

1.2.183. a) $\simeq 1$ N; b) 2,5 ms^{-2}; c) 1,41 ms^{-1}; d) 0,8.

1.2.184. a) 270 N, b) 1 s, c) 10,5 cm.

1.2.185. a) 5,88 ms^{-2}.

b) $t_1 = 1{,}896$ s, $v_2 = 16{,}15$ ms^{-1}.

c) 13,27 m, 22,1 m.

1.2.186. $\Delta h = 3{,}66 \cdot 10^{-2}$ m.

1.2.187. 0,355 m, 0,442 m.

1.2.188. a) $\Delta l = 1{,}5$ cm. b) $R_A = 150$ N, $\beta = 0\alpha$.

c) $\Delta l' = \dfrac{G_s}{2k \sin \alpha} + \left(\dfrac{x}{l}\right) \dfrac{G_c}{k \sin \alpha}$.

1.2.189. a) Din figura 1.178, tg $\alpha = 1{,}25$.

b) $F_f = R_B = 242$ N.

c) Din figura 1.179, $h = 4{,}1$ m.

1.2.190. $F_A = 3$ N, $F_B = 0$.

1.2.191. $T_{AB} = 51{,}8$ kgf, $T_{AG} = 73{,}2$ kgf.

1.2.192. $R = 10\ F$, $x_0 = 3\ a/10$, $y_0 = a/2$.

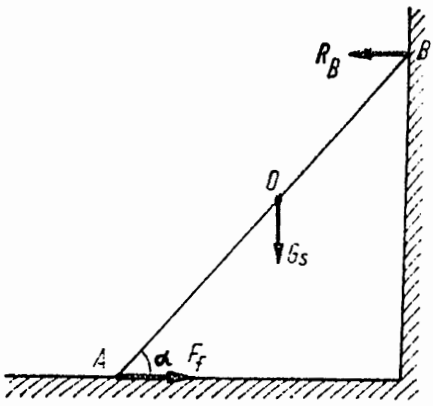


Fig. 1.178.

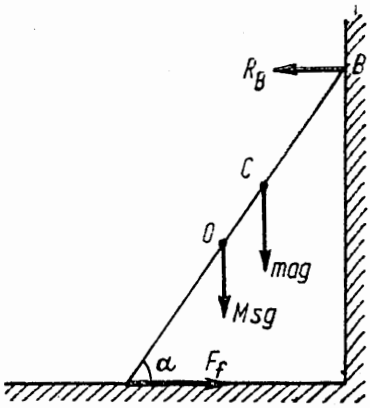
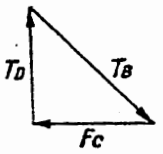


Fig. 1.179.

1.2.193. Din echilibru, în articulațiile C și B (fig. 1.180), $F_B = 231$ N.



1.2.194. $x_C = 2R \sin^3 \alpha/2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$.

1.2.195. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{gt^2(\sin \alpha + \sin \beta)(\mu \cos \beta + \sin \beta) + 2h}{gt^2(\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - 2h}$.

1.2.196. $L = \dfrac{l}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$ — echilibru instabil.

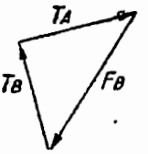


Fig. 1.180.

1.2.197. 10 N, 11,6 N, 5,8 N, 10 N.

1.2.198. $G_1/G_2 = 2/3$.

1.2.199. $l_1 : l_2 : l_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$

1.2.200. a) 3 kgf. b) $m_1 = 3$ kg.

1.2.201. $a_1 = \dfrac{4m_1m_3 - 3m_2m_3 + m_1m_2}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}g$; $a_2 = \dfrac{m_1m_2 - 4m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}g$;

$a_3 = \dfrac{4m_1m_3 - 3m_1m_2 + m_1m_3}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}g$.

1.2.202. $T = 0$, $a_1 = a_2 = g$.

1.2.203. $h = l/\sqrt{3}$.

1.2.204. a) $v_{tr} = \omega r = v$.

b) $v_A = 2v$, $v_B = v_D = \sqrt{2}\,v$; $v_C = 0$.

c) Punctele aflate pe un cerc de rază r, cu centrul în C.

1.2.205. Nu va fi în echilibru.

1.2.206. $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + J/r^2}g$; $T_1 = \dfrac{2m_1m_2g + m_1gJ/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}$;

$T_2 = \dfrac{2m_1m_2g + m_2gJ/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}$; $F = T_1 + T_2 + Mg$.

1.2.207. a) $\varepsilon = \dfrac{m_2R - m_1r}{m_2R^2 + m_1r^2 + J}g$. b) $T_1 = m_1(g + r\varepsilon)$. $T_2 = m_2(g - r\varepsilon)$.

1.2.208. a) $a = \dfrac{mg}{m + 2M(R/R - r)^2}$. b) $T = \dfrac{2mMg\left(\dfrac{R}{R - r}\right)^2}{m + 2m\left(\dfrac{R}{R - r}\right)^2}$.

c) $F = \dfrac{Mmg\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)}{m(1 - r/R)^2 + 2M}$.

d) $\mu \leqslant \dfrac{1 + r/R}{2\dfrac{M}{m} + \left(1 - \dfrac{r}{R}\right)^2}$.

1.2.209. a) $v = \sqrt{\dfrac{4}{3}gh}$; $\omega = \dfrac{v}{R}$. b) $F_f = \dfrac{1}{3}mg \sin \alpha$. c) $\mu \geqslant \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} \alpha$.

1.2.210. a) 7,11 kJ; b) 28,4 kJ.

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ŞI TERMODINAMICĂ

2.0. BREVIAR

2.0.1. NOŢIUNI GENERALE

Capitolul Fizică moleculară şi termodinamică implică introducerea unor mărimi noi, cu caracter nemecanic; astfel:

Temperatura (T) este un parametru de stare a cărui unitate de măsură este kelvinul (K). Există şi scări empirice de temperatură, cea mai cunoscută fiind scara Celsius. Legătura dintre temperatura T, măsurată în K şi temperatura empirică t, măsurată în scara Celsius (unitate: gradul Celsius, °C) este*:

$$T(\mathrm{K}) = t(^{\circ}\mathrm{C}) + 273{,}15. \tag{2.0.1}$$

Energia internă (U) este o funcţie de stare a sistemului. Aceasta înseamnă că într-un proces oarecare, variaţia energiei interne ΔU depinde numai de starea iniţială şi de starea finală a sistemului, indiferent de drumul parcurs de sistem, de felul cum a evoluat sistemul între starea iniţială şi starea finală. Deci se poate scrie:

$$\Delta U = U_2 - U_1 \tag{2.0.2}$$

unde U_2 şi U_1 reprezintă energia internă a sistemului în starea iniţială, respectiv finală.

Căldura (Q) este o mărime de proces. Această mărime fizică există numai cît timp se produce procesul şi are o valoare care depinde atît de starea iniţială şi finală a sistemului, cît şi de modul de evoluţie a sistemului între cele două stări.

Observaţie. Lucrul mecanic (L) este de asemenea o mărime de proces.

2.0.2. PRINCIPIILE TERMODINAMICII

Termodinamica admite că un sistem izolat adiabatic ajunge totdeauna într-o stare de echilibru termodinamic şi că în starea de echilibru, parametrii de stare ai sistemului sînt legaţi între ei printr-o anumită relaţie.

Principiul I al termodinamicii: *variaţia energiei interne a unui sistem la trecerea de la o stare de echilibru la alta este egală cu suma dintre căldura şi lucrul mecanic schimbate cu exteriorul:*

$$\Delta U = Q - L. \tag{2.0.3}$$

* În probleme se poate aplica relaţia simplificată: $T = t + 273$.

Cantitatea de căldură Q și lucrul mecanic L sînt pozitive dacă sînt primite de sistem și sînt negative dacă sînt cedate de sistem către exterior.

Principiul II al termodinamicii: *variația entropiei unui sistem izolat adiabatic este nulă într-un proces reversibil și pozitivă într-un proces ireversibil.*

2.0.3. DILATAȚIA SOLIDELOR

Lungimea unei bare (sau o dimensiune liniară a unui corp oarecare) variază cu temperatura conform relației:

$$l = l_0(1 + \alpha t), \tag{2.0.4}$$

unde l_0 reprezintă lungimea la temperatura 0°C, iar l lungimea aceleiași bare la temperatura t (°C); α este o constantă de material, numită *coeficient de dilatație liniară*, care se măsoară în K^{-1} (egal cu grd^{-1}).

Dilatația volumică este redată prin relația

$$V = V_0(1 + \gamma t), \tag{2.0.5}$$

V și V_0 reprezintă volumul corpului la temperatura t (°C), respectiv 0°C; *coeficientul de dilatație volumică* γ este legat de cel liniar prin egalitatea

$$\gamma = 3\alpha. \tag{2.0.6}$$

Deoarece densitatea unui corp este invers proporțională cu volumul, urmează că densitatea variază cu temperatura conform expresiei:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}, \tag{2.0.7}$$

unde ρ și ρ_0 reprezintă densitatea corpului la temperatura t respectiv 0°C.

Observație. Relațiile anterioare (2.0.4—2.0.7) sînt valabile în cazul corpurilor omogene care nu suferă transformări structurale la încălzire.

2.0.4. LEGEA GAZELOR PERFECTE

La temperaturi nu prea coborîte și la presiuni nu prea mari, orice gaz se comportă ca un gaz perfect. Relația dintre parametrii de stare ai gazului perfect, cunoscută sub numele de *legea gazului perfect* (sau *ecuația de stare*) este:

$$pV_m = RT, \tag{2.0.8}$$

unde p este presiunea, V_m volumul molar, T temperatura, iar R este o constantă universală, numită *constanta gazelor perfecte*. Unitățile de măsură, în SI, fiind $\frac{N}{m^2}$ pentru presiune, $\frac{m^3}{kmol}$ pentru volumul molar și K pentru temperatură, rezultă că unitatea pentru constanta gazelor perfecte este $\frac{J}{kmol\ K}$.

În practică, se utilizează adesea o unitate tolerată pentru presiune, atmosfera, (simbol: atm). În acest caz, măsurînd și volumul molar în $\frac{dm^3}{mol}$, se obține pentru R unitatea tolerată $\frac{atm \cdot dm^3}{mol \cdot K}$.

Valoarea numerică a constantei gazelor perfecte se determină măsurînd, într-o anumită stare, parametrii de stare ai gazului. Astfel în starea normală (definită prin presiunea normală $p_0 = 1$ atm și temperatura normală $t_0 = 0°C$, adică $T_0 = 273{,}15$ K), volumul molar normal are valoarea $V_{m0} = 22{,}41 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$. Deoarece

$$1 \text{ atm} = 1{,}01325 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

urmează

$$R = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = \frac{1{,}01325 \cdot 10^5 \cdot 22{,}41 \cdot 10^{-3}}{273{,}15 \text{ K}} = 8{,}31 \frac{J}{mol \text{ K}}.$$

Dacă se măsoară presiunea în atmosfere rezultă

$$R = \frac{1 \text{ atm} \times 22{,}41 \frac{dm^3}{mol}}{273{,}15 \text{ K}} = 0{,}082 \frac{atm \cdot dm^3}{mol \cdot K}.$$

Observație. Dacă se utilizează ca unitate nu molul, ci kilomolul, atunci volumul ocupat de 1 kmol în condiții normale este $22{,}41 \frac{m^3}{kmol}$ și

$$R = 8\,310 \frac{J}{kmol \text{ K}}.$$

Legea gazelor perfecte poate fi pusă și sub alte forme. În cazul unei cantități oarecare de gaz (n moli), care ocupă volumul V, deoarece la presiune și temperatură dată

$$V = nV_m, \tag{2.0.9}$$

rezultă

$$pV = nRT \tag{2.0.10}$$

sau

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{2.0.11}$$

unde m reprezintă masa gazului și M masa unui mol. Întrucît relația anterioară poate fi scrisă:

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{M}$$

și ținînd seama de definiția densității $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$ urmează

$$p = \frac{\rho RT}{M}. \tag{2.0.12}$$

Proprietățile gazului perfect sînt explicate de teoria cinetică a gazelor printr-un model microscopic simplu care admite că moleculele gazului:

1° au volum propriu neglijabil față de volumul total ocupat de gaz;

2° nu interacționează între ele decît în momentul ciocnirii (care este elastică).

În consecință, fiecare moleculă se mișcă rectiliniu uniform pînă la ciocnirea cu, altă moleculă cînd își schimbă viteza (ca valoare și orientare). Urmează că, la un moment dat, moleculele au viteze diferite însă, datorită conservării energiei, vitezele prezintă o anumită distribuție încît

$$\sum_i n_i \frac{mv_i^2}{2} = \text{const},$$

unde n_i reprezintă numărul de molecule cu viteza cuprinsă într-un mic interval Δv în jurul valorii v_i.

Relația anterioară permite introducerea unei medii $\overline{v^2}$ a pătratelor vitezelor moleculelor a cărei definiție rezultă din egalitatea:

$$n \frac{m\overline{v^2}}{2} = \sum_i n_i \frac{mv_i^2}{2} \tag{2.0.13}$$

unde n reprezintă numărul total de molecule.

Teoria cinetică demonstrează că energia cinetică medie a moleculelor (mărime microscopică) este proporțională cu temperatura (mărime macroscopică)

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k\,T, \tag{2.0.14}$$

unde k reprezintă o constantă universală fiind raportul dintre R și numărul lui Avogadro N_A $\left(k = \frac{R}{N_A}\right)$. Teoria cinetică explică presiunea gazelor ca o consecință a ciocnirii moleculelor gazului cu pereții vasului și demonstrează relația:

$$p = n_0 k T, \tag{2.0.15}$$

unde n_0 reprezintă numărul de molecule din unitatea de volum. Multiplicînd în ambele părți cu V_m se obține:

$$pV_m = n_0 V_m k T = N_A k T = RT,$$

ceea ce este identic cu (2.0.8).

Energia internă a gazului perfect depinde numai de temperatură, variația energiei interne într-un proces fiind

$$\Delta U = mc_v\,\Delta T^*.$$

Legea gazelor perfecte (2.0.8., 2.0.10) conține, drept cazuri particulare, legile transformărilor gazelor. Astfel, scriind în două stări diferite, 1 și 2, pentru aceeași temperatură

$$p_1 V_1 = nRT \text{ și } p_2 V_2 = nRT$$

și eliminînd temperatura se obține *legea transformării izoterme (Boyle-Mariotte)* (fig. 2.1):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \tag{2.0.16}$$

Considerînd două stări cu aceeași presiune

$$pV_1 = nRT_1 \text{ și } pV_2 = nRT_2,$$

* Vezi paragraful 2.06.

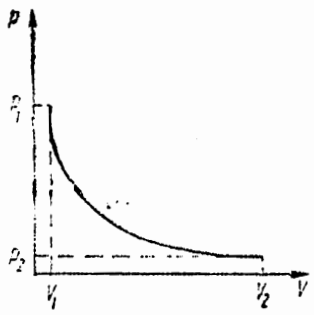


Fig. 2.1

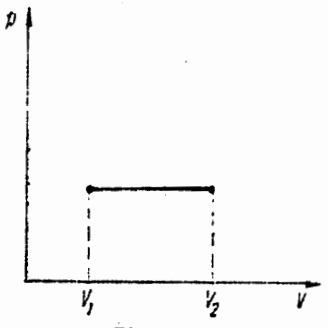


Fig. 2.2

și eliminînd constantele se obține *legea transformării izobare (Gay-Lussac)* (fig. 2.2)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{2.0.17}$$

Analog, din relațiile

$$p_1 V = nRT_1 \text{ și } p_2 V = nRT_2,$$

se obține *legea transformării izocore (Charles)* (fig. 2.3)

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \tag{2.0.18}$$

Observație. Relația (2.0.17) este echivalentă cu

$$V = V_0(1 + \alpha t), \tag{2.0.19}$$

unde V_0 este volumul gazului la 0°C, iar V la t°C (într-o transformare izobară); α, coeficientul de dilatare al gazului ideal, avînd valoarea $\frac{1}{273{,}15}$ K^{-1}; deoarece relația (2.0.19) se mai poate scrie sub forma:

$$V = V_0\left(1 + \frac{t}{273{,}15}\right) = V_0 \frac{273{,}15 + t}{273{,}15} = V_0 \frac{T}{T_0}.$$

Analog, notînd cu p și p_0 presiunile gazului la t°C, respectiv 0°C (într-o transformare izocoră), relația

$$p = p_0(1 + \alpha t) \tag{2.0.20}$$

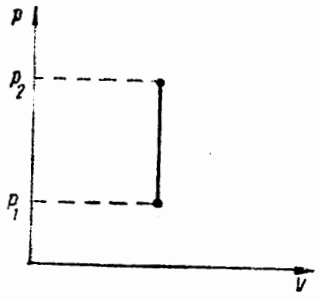


Fig. 2.3

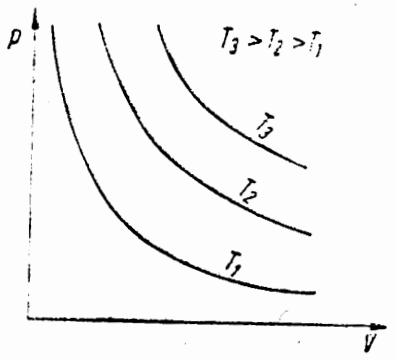


Fig. 2.4

se poate pune sub forma

$$p = p_0\left(1 + \frac{t}{273{,}15}\right) = p_0 \frac{273{,}15 + t}{273{,}15} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

Observație. Legea gazelor perfecte (2.0.8, 2.0.10, 2.0.11), deși conține trei variabile, poate fi reprezentată într-o diagramă plană, $p - V$ (fig. 2.4). Fiecare stare este redată printr-un punct figurativ, cu temperatura corespunzătoare izotermei pe care este plasat, cu presiunea și volumul citite pe cele două axe.

2.0.5. CALORIMETRIE ȘI SCHIMBĂRI DE STARE

Un sistem cu masa m, pentru a-și ridica temperatura cu ΔT, rămînînd în aceeași stare, necesită o cantitate de căldură Q dată de relația:

$$Q = mc\,\Delta T, \tag{2.0.21}$$

unde c este o constantă de material, numită *căldură specifică*. Aceasta reprezintă cantitatea de căldură necesară unității de masă pentru a-și varia temperatura cu unitatea; în SI se măsoară în $\frac{J}{kg \cdot K}$.

La gaze se distinge o *căldură specifică la volum constant*, c_v și o *căldură specifică la presiune constantă*, c_p, după cum încălzirea este realizată izocor sau izobar. Conform principiului I, considerînd aceleași limite de temperatură, căldura primită de sistem este mai mică în procesul izocor decît în cel izobar, deoarece la încălzirea izobară, gazul efectuează și un lucru mecanic; în consecință

$$c_v < c_p. \tag{2.0.22}$$

La lichide și solide, coeficientul de dilatație avînd valori mult reduse, c_v și c_p sînt practic egale (de altfel, experimental nu se poate realiza, la lichide și solide, decît încălzirea izobară).

Observație. Capacitatea calorică (C) a unui sistem este, prin definiție, produsul dintre masă și căldura specifică

$$C = mc. \tag{2.0.23}$$

Trecerea unui sistem dintr-o stare (fază) în alta este un proces izobar-izoterm însoțit de un efect termic. Sistemul absoarbe căldură dacă trece într-o stare mai puțin condensată (topire, vaporizare) și cedează căldură în procesele inverse (solidificare, condensare). Căldura Q necesară transformării este dată de relația:

$$Q = m\lambda, \tag{2.0.24}$$

unde m reprezintă masa sistemului, iar λ o constantă de material numită *căldură de transformare* (de topire, de vaporizare, în funcție de proces). Căldura de transformare reprezintă cantitatea de căldură necesară unității de masă pentru a trece izoterm-izobar dintr-o fază în alta; în SI se măsoară în $\frac{J}{kg}$.

Echilibrul lichid-gaz. Un sistem în fază gazoasă, comprimat izoterm, se poate comporta în două moduri distincte:

1. rămîne în faza gazoasă, indiferent de presiune (curba *1*, fig. 2.5).
2. se transformă în lichid, la presiuni mari (curba *2*, fig. 2.5).

Curba *2* (fig. 2.5) arată că odată cu micşorarea volumului, presiunea creşte pînă în punctul *A*. La reducerea în continuare a volumului, presiunea rămîne constantă pînă în punctul *B*, ceea ce se explică prin transformarea treptată a gazului în lichid, palierul *AB* reprezentînd un sistem neomogen format din gaz şi lichid în echilibru. În *B*, sistemul este format numai din lichid şi micşorarea ulterioară a volumului necesită o creştere rapidă a presiunii, datorită

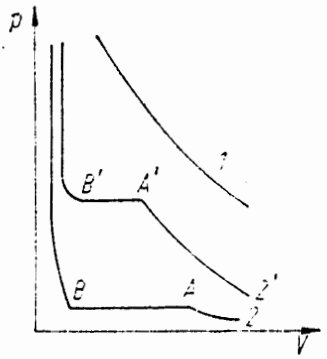


Fig. 2.5

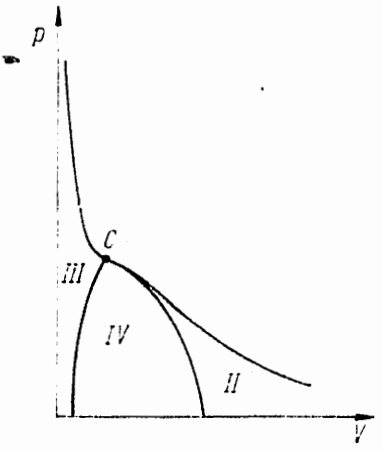


Fig. 2.6

compresibilităţii mult reduse a lichidului. Presiunea corespunzătoare palierului *AB* este numită *presiune de saturaţie*. La ridicarea temperaturii (curba *2'*), palierul *A'B'* se micşorează, iar presiunea de saturaţie corespunzătoare creşte.

Suprafaţa diagramei $p - V$ poate fi împărţită în patru domenii distincte (fig. 2.6):

I gaz necondensabil prin comprimare izotermă;
II gaz condensabil prin comprimare izotermă;
III lichid;
IV amestec lichid-gaz în echilibru.

Domeniile *II* şi *IV* sînt separate de curba de saturaţie care constituie locul geometric al punctelor de început al condensării; sistemul, în aceste stări, este format din vapori saturanţi. Curba care separă domeniile *III* şi *IV* constituie curba de fierbere. Punctul de întîlnire al curbelor de saturaţie şi de fierbere (*C*, din fig. 2.6) reprezintă *starea critică*, stare în care proprietăţile lichidului şi ale gazului sînt identice. Temperatura corespunzătoare stării critice, numită *temperatură critică*, separă domeniul *I* de domeniile *II* şi *III*.

2.0.6. LUCRUL MECANIC

Presiunea exercitată de un gaz asupra unui perete fiind raportul dintre o forţă exercitată normal pe perete şi aria acestuia, variaţia volumului gazului presupune deci deplasarea punctului de aplicaţie al unei forţe şi implicit un lucru mecanic; acesta, conform convenţiei din 2.0.2 este pozitiv la compri-

marea gazului și negativ la dilatare. Considerînd un corp de pompă în care un piston sub acțiunea unei forțe F se deplasează pe o distanță ds, din poziția M în N (fig. 2.7), lucrul mecanic elementar primit de gaz este

$$dL = Fds = pAds,$$

unde A este secțiunea pistonului sau

$$dL = -pdV. \tag{2.0.25}$$

Mărimea dV reprezintă variația volumului, iar semnul — este necesar pentru a se obține o valoare pozitivă a lucrului mecanic primit de gaz (la comprimare, cînd volumul scade, variația de volum este negativă).

Lucrul mecanic într-un proces finit se obține integrînd (2.0.25)

$$L = -\int_1^2 pdV. \tag{2.0.26}$$

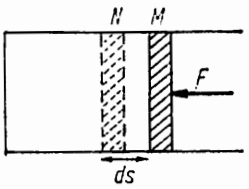


Fig. 2.7

Rezultatul integralei (2.0.26) depinde de modul cum evoluează sistemul, lucrul mecanic fiind o mărime de proces. Astfel, într-un proces izoterm, utilizînd legea gazului perfect (2.0.10), integrala (2.0.26) devine:

$$L = -\int_1^2 \frac{nRT}{V} dV,$$

sau, temperatura fiind constantă

$$L = -nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}.$$

Rezultă pentru un proces izoterm, în care volumul inițial este V_1, iar cel final V_2

$$L = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{2.0.27}$$

Într-un proces izobar, presiunea fiind constantă, (2.0.26) devine:

$$L = -p\int_{V_1}^{V_2} dV = -p(V_2 - V_1). \tag{2.0.28}$$

Ținînd seama de (2.0.10), dacă temperatura este T_1 în starea inițială și T_2 în cea finală, (2.0.28) se poate scrie și în forma:

$$L = -nR(T_2 - T_1). \tag{2.0.29}$$

Într-un proces izocor, volumul fiind constant, lucrul mecanic este nul.

2.0.7. CICLUL CARNOT

Un ciclu este constituit dintr-un ansamblu de transformări, starea inițială a sistemului fiind identică cu cea finală. Conform principiului I, într-un ciclu

$$\Delta U = 0, \tag{2.0.30}$$

și

$$-L = Q. \tag{2.0.31}$$

Proprietăți deosebite prezintă ciclul Carnot, format din două transformări izoterme și două transformări adiabatice, toate reversibile (fig. 2.8). La temperatura superioară T_1, gazul primește cantitatea de căldură Q_1 și se destinde producînd lucru mecanic. La temperatura inferioară T_2, gazul este comprimat, deci consumă lucru mecanic (inferior celui produs la destindere) și cedează căldura Q_2. În ansamblu, lucrul mecanic efectuat, $-L$, este egal cu suma căldurilor schimbate cu exteriorul:

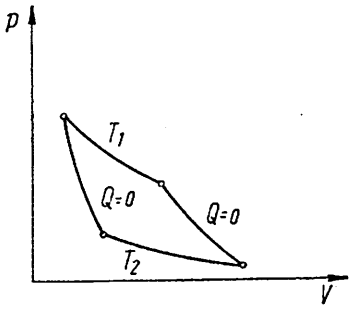


Fig. 2.8

$$-L = Q_1 + Q_2, \tag{2.0.32}$$

Observație. Conform convenției din 2.0.2, Q_2 este negativ, reprezentînd căldură cedată. De aceea, uneori, relația (2.0.32) este scrisă

$$-L = Q_1 - |Q_2|.$$

Se demonstrează că *randamentul* ciclului, definit prin raportul dintre lucrul mecanic efectuat și căldura primită

$$\eta = \frac{-L}{Q_1}, \tag{2.0.33}$$

depinde, în cazul ciclului Carnot, numai de temperaturile la care se produc cele două transformări izoterme

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{2.0.34}$$

2.1. PROBLEME CU REZOLVĂRI*

2.1.1. Să se determine lungimile la 0°C, l_{01} și l_{02}, a două bare paralele care, încălzite, păstrează totdeauna o diferență de lungime constantă $\Delta l = 2$ cm. Se cunosc coeficienții de dilatare $\alpha_1 = 11 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} și $\alpha_2 = 18 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.

2.1.2. Două vase de sticlă identice, de formă cilindrică, gradate, se umplu, unul cu mercur, celălalt cu un lichid al cărui coeficient de dilatare este necunoscut, pînă la diviziunea 50, ambele lichide avînd temperatura $t_1 = 10$°C.

Se încălzesc apoi cele două vase pînă la $t_2 = 90$°C și se constată că în urma dilatării, mercurul a urcat cu 0,3 diviziuni mai mult decît celălalt lichid.

Să se calculeze coeficientul de dilatare al lichidului γ_l.

2.1.3. O vergea de cupru cu secțiunea $S = 1$ cm^2 și cu lungimea $l_0 = 1$ m la temperatura $t_0 = 0$°C primește o cantitate de căldură $Q = 3\,471$ J. Să se calculeze:

* Textul problemelor nu conține constantele (de material și universale); acestea vor fi luate din tabelele de la sfîrșitul cărții.

1. alungirea barei Δl;

2. forța F care trebuie aplicată pentru a-i menține alungirea Δl, cînd temperatura revine la t_0;

3. lucrul mecanic L efectuat de forțele elastice care acționînd asupra barei la t_0 produc alungirea Δl.

2.1.4. Într-un calorimetru în care se află $m_1 = 0{,}5$ kg apă și $m_2 = 0{,}3$ kg gheață, în echilibru termic, la temperatura $t_0 = 0°C$ se introduce o sferă de metal cu masa $M = 1$ kg și temperatura $t = 240°C$. Noul echilibru termic se stabilește la temperatura 0°C, după ce toată cantitatea de gheață s-a topit. Să se calculeze:

1. căldura specifică c a metalului;

2. temperatura de echilibru θ a sistemului dacă masa sferei metalice este $M_1 = 2$ kg (se consideră neglijabilă capacitatea calorică a calorimetrului);

3. masele sferelor metalice, M' și M'_1, pentru realizarea echilibrului termic, la temperatura t_0, respectiv θ, dacă este nenulă capacitatea calorică a calorimetrului $\left(K = 0{,}2 \frac{\text{kcal}}{\text{K}}\right)$.

2.1.5. Într-un calorimetru care conține apă și gheață la echilibru termic se găsește următorul dispozitiv (fig. 2.9): un tub A, deschis la partea superioară, este introdus într-un vas B în care se află apă și mercur. Vasul B comunică la partea inferioară cu un tub C terminat cu un capilar orizontal divizat în volume egale și aflat în afara calorimetrului. Introducîndu-se în vasul A o cantitate de eter, mercurul este împins în capilar pînă la diviziunea $N_1 = 40$ (prin evaporarea eterului, o parte din apă se solidifică, ceea ce determină mărirea volumului). Dacă în vasul B se pune o cantitate de apă $m_1 = 10$ g, cu temperatura $t_1 = 10°C$, după stabilirea echilibrului termic mercurul din capilar se retrage pînă la diviziunea $N_2 = 35$. Adăugîndu-se apoi o bucată de cupru cu masa $m = 20$ g și temperatura $t = 80°C$, în final mercurul se retrage pînă la diviziunea $N_3 = 27{,}8$.

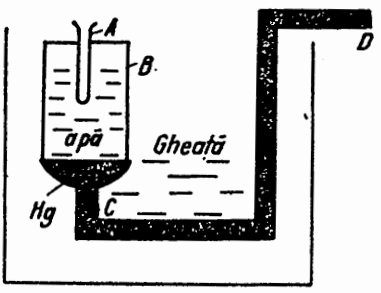


Fig. 2.9

Cunoscîndu-se căldura specifică a apei $\left(c_1 = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gK}}\right)$, să se calculeze căldura specifică a cuprului (c).

2.1.6. O bară de fier cu lungimea $l = 1$ m, secțiunea $s = 2$ cm^2 și temperatura $t = 25°C$ este încălzită cu o lampă de petrol, consumînd o cantitate $x = 0{,}1$ kg petrol.

Să se calculeze:

1. variația de temperatură Δt a barei;

2. alungirea barei Δl la încălzire;

3. temperatura finală θ a unui vas care conține $M = 10$ kg apă, cu temperatura inițială $t_0 = 20°C$, în care s-a introdus bara încălzită.

Se cunosc:

puterea calorică a petrolului $q = 4{,}8 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$;

randamentul de utilizare a căldurii $\eta = 10\%$.

2.1.7. O bară de oțel cu secțiunea $s = 24$ cm^2 absoarbe prin încălzire o cantitate de căldură $Q = 22$ MJ. Să se calculeze:

1. alungirea barei Δl;

2. cantitatea de petrol x necesară pentru încălzirea barei, presupunînd un randament de utilizare a căldurii $\eta = 30\%$;

3. forța F care trebuie aplicată pentru a produce aceeași alungire.

Se cunosc:

puterea calorică a petrolului $q = 3{,}13 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$;

lungimea inițială a barei $l_0 = 100\,\Delta l$.

2.1.8. Un proiectil cu masa $m = 5$ kg și viteza inițială $v_0 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ traversează rectiliniu orizontal un strat de zăpadă cu lungimea $s = 10$ km. În timpul traversării stratului de zăpadă se dezvoltă, datorită frecării, o cantitate de clădură $Q = 200$ kJ. Să se calculeze:

1. viteza v_1 a proiectilului la ieșirea din zăpadă;

2. accelerația a și timpul t în care proiectilul străbate zăpada;

3. forța constantă de rezistență F care acționează asupra proiectilului;

4. variația de temperatură $\Delta\theta$ a proiectilului, presupunînd că absoarbe jumătate din căldura dezvoltată.

Se cunoaște:

căldura specifică a proiectilului $c = 125 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

2.1.9. Pentru frînarea unui vagon de tren se presează pe fiecare roată cîte un sabot care exercită o forță $F = 8\,000$ N. Din momentul aplicării sabotului pînă la oprire, roata mai face un număr $n = 200$ rotații.

Să se calculeze:

1. creșterea temperaturii sabotului Δt știind că acesta reține 50% din căldura dezvoltată prin frecare;

2. masa x de gheață cu temperatura inițială $t = -10$°C, care ar fi topită (apa rezultată rămînînd la 0°C) de întreaga cantitate de căldură dezvoltată prin frecare.

Se cunosc:

masa sabotului $m = 10$ kg, diametrul roții $d = 1$ m;

coeficientul de frecare sabot-roată $\mu = 0{,}2$;

căldura specifică a materialului sabotului $c = 460 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

2.1.10. Un mol de gaz perfect, care în starea inițială se găsește în condiții normale, trece izoterm într-o stare II în care presiunea este $p_2 = \frac{1}{2}$ atm și apoi se destinde izobar trecînd în starea III. Se știe că diferența dintre volumele stării III și II este $V_3 - V_2 = 5{,}2$ l.

Presupunînd o cantitate de azot care are parametrii de stare ai stării II și o cantitate de argon care are parametrii de stare ai stării III, închise în două vase izolate termic față de exterior, să se calculeze temperatura T și presiunea p după deschiderea robinetului de legătură dintre cele două vase și stabilirea echilibrului termic.

Se cunosc:

căldura molară la volum constant a azotului $C_{N_2} = \frac{5}{2} R \frac{cal}{mol \cdot K}$,

căldura molară la volum constant a argonului $C_{Ar} = \frac{3}{2} R \frac{cal.}{mol \cdot K}$.

2.1.11. Pentru încălzirea unei cantități de apă $m = 4$ kg se consumă o cantitate de căldură $Q = 828$ kcal. Temperatura inițială a apei este $t_0 = 10°C$. Încălzirea se produce la presiunea atmosferică.

Să se calculeze:

1. cantitatea de apă x transformată în vapori;
2. volumul V ocupat de vapori (considerați gaz perfect) la presiunea $p = 1$ atm;
3. energia cinetică medie ε a moleculelor vaporilor de apă;
4. lucrul mecanic L produs la destinderea izobară a vaporilor obținuți, dacă volumul acestora se dublează.

Se cunoaște:

randamentul de utilizare a căldurii $\eta = 0{,}5$.

2.1.12. O cantitate de apă $m = 1$ g, care se găsește la temperatura $t_0 = 90°C$ și presiunea $p_0 = 7 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$ (egală cu presiunea de saturație a vaporilor de apă la 90°C) suferă următoarele transformări succesive:

1. vaporizare la temperatura t_0 și presiunea p_0;
2. încălzirea vaporilor obținuți, la volum constant, pînă cînd presiunea devine $p_1 = 1$ atm;
3. răcirea vaporilor de la punctul 2, la presiune constantă, pînă cînd temperatura devine $t_2 = 100°C$. Vaporii sînt considerați gaz perfect.

Să se calculeze cantitatea de căldură primită și lucrul mecanic efectuat în fiecare transformare.

Se cunosc:

căldura specifică a vaporilor de apă la presiune constantă $c_p = 0{,}48 \frac{cal}{g \cdot K}$;

căldura specifică a vaporilor de apă la volum constant $c_v = 0{,}36 \frac{cal}{g \cdot K}$;

căldura latentă de vaporizare este dată de relația

$$\lambda = (606{,}5 - 0{,}695\ t) \frac{cal}{g},$$

unde t este temperatura în °C.

2.1.13. Un vas cu volumul $V_1 = 8$ dm³ conține aer la presiunea $p_1 = 0{,}5$ atm, iar în alt vas, cu volumul $V_2 = 5$ dm³, se găsește hidrogen sub presiunea $p_2 = 1{,}5$ atm. Se reunesc cele două vase, care au aceeași temperatură, printr-un tub cu volum neglijabil, astfel încît gazele se amestecă. Să se calculeze:

1. presiunea p a amestecului;
2. masa aerului m_1 și masa hidrogenului m_2.

Se cunosc, la temperatura comună a gazelor și la presiunea $p_0 = 1$ atm, densitățile aerului și hidrogenului ($\rho_{01} = 0{,}0013$ g/cm³ și $\rho_{02} = 0{,}00009$ g/cm³).

2.1.14. Să se calculeze densitatea oxigenului, care se găsește la temperatura $t = 50°C$ și presiunea $p = 150$ atm, cunoscînd volumul molar normal $\left(V_{om} = 22{,}4 \frac{dm^3}{mol}\right)$ și masa molară $\left(M = 32 \frac{g}{mol}\right)$ a oxigenului.

2.1.15. În corpul de pompă al unei mașini termice se găsește aer care la temperatura $T_1 = 400$ K ocupă volumul $V_1 = 2$ dm³ și exercită o forță de 10^4 N asupra pistonului. Gazul suferă o destindere izotermă (fig. 2.10) ajungînd în starea *2*, în care volumul este $V_2 = 2{,}6$ dm³, apoi o comprimare izobară

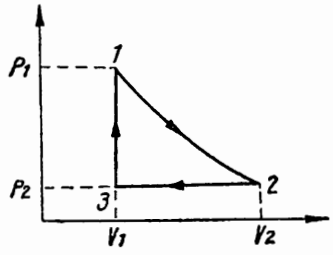


Fig. 2.10

pînă în starea *3* de unde revine în starea inițială (*1*) printr-o încălzire izocoră. Să se determine:

1. parametrii de stare în stările *1*, *2*, *3*;
2. lucrul mecanic efectuat în ciclu;
3. randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme atinse în ciclul *1231*.

Se cunoaște:
suprafața pistonului $S = 200$ cm².

2.1.16. Un gaz care se găsește într-o stare inițială caracterizată prin parametrii $p_1 = 9 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ și $V_1 = 3$ dm³ poate ajunge în starea *2*, situată pe aceeași izotermă, caracterizată prin presiunea $p_2 = 6 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, pe următoarele căi:

a) printr-o transformare izocoră, urmată de una izobară;
b) printr-o transformare izobară, urmată de una izocoră;
c) printr-o transformare izotermă.

Să se reprezinte grafic transformările enunțate și să se calculeze:

1. lucrul mecanic efectuat pe fiecare cale;
2. randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme atinse în transformările enunțate.

2.1.17. Într-un vas cu volumul V se introduc n_1 moli din gazul 1 cu temperatura T_1, n_2 moli din gazul 2 cu temperatura T_2 și n_3 moli din gazul 3 cu temperatura T_3. Cunoscînd căldurile specifice, c_1, c_2 și c_2, masele molare M_1, M_2 și M_3 ale celor trei gaze, precum și constanta gazelor perfecte R, să se calculeze presiunea sistemului ajuns în echilibru termic.

2.1.18. Un tub barometric cu secțiunea 1 cm² se umple cu mercur și se scufundă cu capătul deschis într-o cuvă cu mercur, realizîndu-se situația din figura 2.11 (înălțimea coloanei de mercur $h_1 = 40$ cm, lungimea coloanei de aer $l_1 = 20$ cm). Știind că mediul ambiant are temperatura $t = 27°C$ și presiunea $p = 1$ atm, să se calculeze:

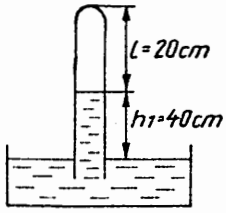


Fig. 2.11

1. înălțimea L_2 pe care trebuie să o aibă tubul barometric (măsurată de la nivelul mercurului din cuvă) pentru ca volumul aerului din camera barometrică să devină $V_2 = 25$ cm³;
2. masa de hidrogen m care trebuie introdusă în camera barometrică dacă înălțimea coloanei de mercur devine $h = 20$ cm.

2.1.19. Un tub cu volumul $V = 40$ l conține oxigen sub presiunea $p = 151 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ la temperatura $t = 17°C$. Să se calculeze:

1. masa oxigenului m din tub;
2. numărul x de litri de oxigen care pot fi utilizați la o sudură, dacă aceasta se realizează la $t_1 = 0°C$, presiunea de lucru a oxigenului fiind $p_1 = 2{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$;
3. densitatea gazului ρ' rămas în tub cînd presiunea a scăzut pînă la $p' = 59 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ la temperatura $t' = 27°C$.

Se cunosc:

densitatea oxigenului în condiții normale $\rho_0 = 1{,}43 \frac{kg}{m^3}$;

presiunea normală $p_0 = 10^5 \frac{N}{m^2}$.

2.1.20. O pilă electrică cu tensiunea electromotoare $E = 2$ V și rezistența internă $r = 0{,}5$ Ω alimentează o rezistență exterioară $R = 1{,}5$ Ω, plasată într-o incintă cu volumul invariabil $V = 2{,}24$ l, care conține oxigen în condiții normale. Curentul trece prin rezistența R un timp $\tau = 100$ s și se presupune că întreaga cantitate de căldură dezvoltată este transmisă gazului. Să se calculeze:

1. temperatura finală T a oxigenului;
2. presiunea finală p a oxigenului;
3. energia cinetică medie ε a moleculelor de oxigen în stare finală.

Se cunoaște:

căldura molară a oxigenului la volum constant $C_v = 20{,}8 \frac{J}{mol \cdot grad}$.

2.1.21. La mijlocul unui tub de sticlă orizontal, închis la ambele capete, se află o coloană de mercur cu lungimea de 20 cm. Cînd se așază tubul în poziție verticală, coloana de mercur se deplasează în jos cu 10 cm. Să se determine presiunea din tub cînd acesta se găsește în poziție orizontală, știind că lungimea tubului este 1 m, iar densitatea mercurului $13{,}6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$.

2.1.22. O mașină termică ideală funcționează între temperaturile 15°C și 150°C. Să se calculeze cantitatea de căldură Q_1 luată de la sursa caldă și cea cedată sursei reci, Q_2, dacă lucrul mecanic produs este de 1 kWh.

2.1.23. O mașină termică a cărei sursă caldă are temperatura $t_1 = 266°C$ funcționează cu un randament $\eta_r = 60\%$ din randamentul ciclului Carnot (între aceleași limite de temperatură). Mașina consumă $100 \frac{kg}{h}$ combustibil. Presupunînd că 7 g azot (utilizat ca agent termic) evacuat la temperatura sursei reci ocupă un volum $V = 3{,}5$ dm^3 sub presiunea $p = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, să se calculeze:

1. temperatura sursei reci T_2;
2. puterea ΔP care se pierde folosind această mașină;
3. energia medie a moleculelor de azot la temperatura T_2;

4. lucrul mecanic L care trebuie efectuat pentru a reduce volumul celor 7 grame de azot la jumătate printr-o transformare izobară.

Se cunoaște:

puterea calorică a combustibilului $q = 31{,}4\ \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$.

2.1.24. Ciclul aproximativ al unui motor Diesel este reprezentat în figura 2.12. Gazul care efectuează ciclul este considerat gaz perfect și atinge în A temperatura $t_A = 127°\text{C}$. Motorul efectuează $n = 720\ \frac{\text{cicluri}}{\text{min}}$ și consumă $v = 0{,}280\ \frac{\text{l}}{\text{h}}$ motorină. Răcirea motorului se face cu apă ale cărei temperaturi sînt $t_1 = 35°\text{C}$ la intrare și $t_2 = 80°\text{C}$ la ieșire. Să se calculeze:

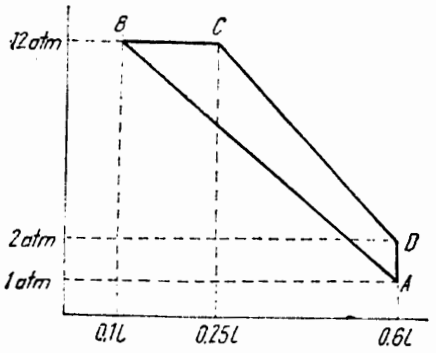


Fig. 2.12

1. temperaturile T_B, T_C, T_D;
2. puterea P dezvoltată de motor;
3. randamentul motorului η;
4. debitul volumic Q_v al apei de răcire.

Se cunosc:

puterea calorică a motorinei $q = 4{,}6 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$;

densitatea motorinei $\rho = 820\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

2.1.25. Un corp de pompă, cu volumul $V = 5$ l, la temperatura $t = 23°\text{C}$, conține 10^{15} molecule oxigen, $4 \cdot 10^{15}$ molecule azot și $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ g argon. În condiții izobare, se ridică temperatura gazului cu $\Delta t = 100°\text{C}$. Să se calculeze:

1. presiunea p a amestecului;
2. volumul V' după destindere;
3. lucrul mecanic L efectuat în destindere;
4. viteza pătratică medie a moleculelor de oxigen, de azot și a atomilor de argon (gaz monoatomic) în starea finală.

2.1.26. O mașină termică funcționează după ciclul Carnot avînd randamentul $\eta = 60\%$. Mașina consumă 40 kg cărbune pe oră preluînd numai jumătate din căldura obținută prin arderea combustibilului. Condensatorul are temperatura mediului ambiant, $t_2 = 23°\text{C}$. Să se calculeze:

1. puterea utilă a mașinii;
2. temperatura sursei calde;
3. masa agentului termic (aer) evacuat din cilindru, avînd volumul $V = 5\ \text{dm}^3$ la presiunea $p = 1{,}5$ atm.

Se cunoaște puterea calorică a combustibilului, $q = 3 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

2.1.27. O mașină termică monocilindrică, care funcționează după diagrama din figura 2.13, are un piston cu diametrul $d = 0{,}3$ m și cursa $l = 0{,}6$ m. Arborele motorului face $n = 180\ \frac{\text{ture}}{\text{min}}$.

Cazanul mașinii este alimentat cu apă cu temperatura $t = 46°C$ și furnizează vapori de apă saturați cu presiunea $p_1 = 10^6 \frac{N}{m^2}$. După destinderea în corpul de pompă, vaporii de apă saturați sînt evacuați cu presiunea $p_2 = 10^4 \frac{N}{m^2}$. Să se calculeze:

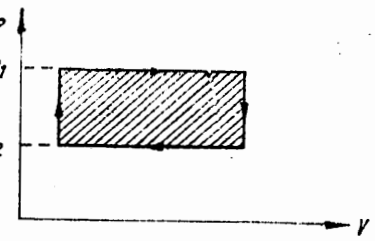


Fig. 2.13

1. puterea mașinii P;
2. masa de apă m consumată în timpul $\tau = 1$ h;
3. cantitatea de căldură Q_1 luată de la cazan în timpul τ;
4. cantitatea de căldură Q_2 cedată condensatorului în timpul τ;
5. cantitatea de apă de răcire M consumată în timpul τ de condensator, dacă apa de răcire are la intrare temperatura $\theta_1 = 15°C$ și la ieșire $\theta_2 = 40°C$.

Se cunosc:

temperatura vaporilor de apă saturați la p_1, $t_1 = 179°C$;

căldura de vaporizare a apei la t_1, $\lambda_1 = 483 \frac{kcal}{kg}$;

căldura de vaporizare a apei la temperatura corespunzătoare presiunii de saturație p_2, $\lambda_2 = 565 \frac{kcal}{kg}$;

densitatea vaporilor de apă în condițiile admisiei $\rho = 5{,}1 \frac{kg}{m^3}$.

2.1.28. Un agregat frigorific cu puterea $P = 17{,}7$ kW, funcționînd după ciclul Carnot, transformă apa cu temperatura $t_1 = 20°C$ în gheață cu temperatura $t_2 = -10°C$. Agregatul este considerat perfect izolat termic. Să se calculeze:

1. cantitatea de gheață m care poate fi produsă în timpul $\tau = 8$ ore;
2. randamentul η;
3. rezistența electrică R a agregatului, dacă este alimentat de la o sursă de tensiune continuă $U = 220$ V;
4. creșterea intensității curentului ΔI pentru ca productivitatea să crească cu 10%.

2.1.29. O mașină termică cu randamentul teoretic $\eta = 0{,}21$ are temperatura sursei calde $t_1 = 160°C$. Mașina, care are un randament real $\eta_r = \frac{4}{7}\eta$, furnizează o putere $P = 60$ kW. Să se calculeze:

1. temperatura sursei reci T_2;
2. cantitatea m de cărbune consumată într-o oră, dacă puterea calorică a cărbunelui este $q = 30 \frac{MJ}{kg}$;
3. viteza v de regim a unui tren de masă totală $m = 100$ t, acționat de această mașină, dacă urcă o pantă cu unghiul de înclinare $\alpha = 0{,}0102$ rad, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}0102$.

2.1.30. Un corp de pompă, de formă cilindrică, cu diametrul interior $d = 10$ cm, este prevăzut cu un piston cu greutatea proprie $G = 300$ N, care alunecă fără frecare. Cursa pistonului, care se efectuează pe verticală, este $h = 15$ cm. Presiunea exterioară este $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, iar tempe-

ratura $t_1 = 23°C$. Punînd corpul de pompă în contact cu o sursă de căldură, care consumă combustibil cu puterea calorică $q = 4{,}2 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$, aerul din interior se dilată și ridică pistonul cu $h' = 3$ cm. Să se calculeze:

1. temperatura finală T_2 a aerului din corpul de pompă;
2. lucrul mecanic L produs la dilatarea aerului;
3. cantitatea de căldură Q necesară;
4. cantitatea de combustibil x consumată.

Se cunoaște:
randamentul de utilizare a căldurii $\eta = 60\%$.

2.1.31. O mașină termică funcționează după un ciclu Carnot între temperaturile $t_1 = 400°C$ și $t_2 = 23°C$ și preia de la sursa caldă o cantitate de căldură $Q_1 = 6 \cdot 10^5 \frac{J}{min}$. Lucrul mecanic produs este consumat de un vehicul, cu masa $m = 400$ kg, care se deplasează pe un plan orizontal, cu frecare, cu viteza constantă $v = 36 \frac{km}{h}$. Randamentul de transmisie este $\eta' = 71{,}5\%$.
Să se calculeze:

1. randamentul mașinii termice;
2. puterea P dezvoltată de mașina termică;
3. cantitatea de căldură Q_2 cedată sursei reci în timpul $t = 1$ min;
4. puterea P' a vehiculului;
5. coeficientul de frecare μ dintre vehicul și planul orizontal;
6. forța F cu care apasă vehiculul, în mișcare cu viteza $v = 36 \frac{km}{h}$, asupra unui pod, cu raza de curbură $R = 50$ m, cu convexitatea în sus, în punctul cel mai înalt al podului.

2.1.32. Să se calculeze lucrul mecanic și variația de energie internă la trecerea unui mol de apă din starea lichidă în starea de vapori (la presiunea 1 atm și temperatura 100°C).

2.1.33. Într-un vas calorimetric care conține apă la temperatura $t = 40°C$ se introduc m_1 grame gheață la temperatura $t_1 = -10°C$ și m_2 grame de vapori de apă saturați la presiunea $p = 1$ atm. Se cere:

1. să se determine raportul dintre cantitățile m_1 și m_2 pentru ca la echilibru termic, temperatura t să rămînă neschimbată;
2. după realizarea echilibrului termic, apa aflată în vas se încălzește cu ajutorul unui arzător cu gaz care consumă $D = 0{,}02 \frac{g}{s}$ gaz, randamentul de utilizare a căldurii fiind $\eta = 50\%$. Să se determine masa m a apei din vas dacă prin încălzire, temperatura sa crește cu $\Delta t = 35{,}8°C$ în timpul $\tau = 10$ min;
3. să se determine debitul volumetric D' al gazului combustibil la presiunea $p = 1{,}1 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ și temperatura $0 = 27°C$;
4. să se determine cantitatea de căldură Q' necesară pentru a transforma o cantitate de apă $m' = 1$ kg (cu temperatura inițială $t = 40°C$) în vapori cu $t' = 120°C$, încălzirea făcîndu-se izobar, la $p = 1$ atm.

Se cunosc:
puterea calorică a combustibilului $q = 5 \cdot 10^7$ J/kg;
masa unui kmol de gaz combustibil $M = 16$ kg/kmol.

2.1.34. Un motor termic, care funcționează după un ciclu Carnot, este utilizat pentru ridicarea unui corp de masă $M_1 = 2\,000$ kg pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Deplasarea corpului pe planul înclinat se face cu viteza constantă $v = 5{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, coeficientul de frecare între corp și plan fiind $\mu = 0{,}2$.

Gazul ce servește drept substanță de lucru (agent termic) în motor primește căldură de la sursa caldă la temperatura $t_1 = 800°C$ și cedează căldură sursei reci la temperatura $t_2 = 30°C$.

Se cere:

1. puterea motorului, necesară ridicării corpului pe planul înclinat;
2. cantitatea de căldură primită de agentul termic de la sursa caldă și cantitatea de căldură cedată sursei reci în timp de 3 s;
3. distanța s cu care este ridicat corpul pe planul înclinat în intervalul de timp în care motorul termic consumă pentru încălzirea agentului termic o cantitate $m = 20{,}64$ g combustibil cu puterea calorică $q = 25 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$;
4. densitatea gazului la ieșire din motorul termic, dacă evacuarea se face la presiunea $p = 1{,}5$ atm și temperatura $t = 30°C$;
5. accelerația cu care ar trebui ridicat corpul pe planul înclinat astfel încît alungirea relativă a cablului de legătură între corp și motor să fie de 1,2 ori mai mare decît în cazul ridicării corpului cu viteza constantă.

Se cunosc:

masa unui mol de gaz (agent termic) $M = 28$ g/mol;
accelerația gravitațională $g = 10$ m/s^2.

2.1.35. Într-un recipient în care se află $m_a = 10$ kg apă este introdus un vas cilindric vertical (fig. 2.14). În vas se află un piston cu masa $m = 5$ kg și suprafața $S = 4{,}9$ cm^2, egală cu suprafața vasului.

Prin greutatea sa, pistonul comprimă în vas $n = 0{,}01$ moli aer. Inițial, starea de echilibru termic se realizează la temperatura $\theta_0 = 27°C$. Apa din recipient este încălzită cu o serpentină parcursă de un agent termic lichid cu căldura specifică $c = 1\,000$ J/kgK, avînd la intrare temperatura $\theta_1 = 200°C$, iar la ieșire $\theta_2 = 150°C$. Într-o secundă, serpentina este parcursă de o masă $D = 100$ g de agent termic. Se neglijează pierderile de căldură spre exteriorul recipientului și se consideră variația temperaturii suficient de lentă pentru ca apa din recipient și aerul din vas să aibă temperaturi egale. Se neglijează frecarea dintre piston și vasul cilindric.

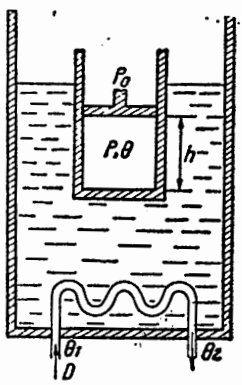


Fig. 2.14

Se cere:

1. înălțimea h_0 a pistonului de la fundul vasului în starea inițială;
2. să se calculeze dependența de timp a distanței h dintre piston și fundul vasului, din momentul începerii încălzirii ($t_0 = 0$) pînă în momentul $t_1 = 20$ min;
3. să se calculeze masa de vapori de apă D_v ce părăsesc într-o secundă recipientul, după ce a fost atinsă temperatura de fierbere $\theta_f = 100°C$ a apei din recipient;
4. care este valoarea energiei medii de translație a moleculelor de gaz în starea inițială?

În tot timpul procesului descris, presiunea atmosferică este constantă și are valoarea $p_0 = 10^5 \frac{N}{m^2}$.

2.1.36. Într-un vas de alamă de masă $m = 2$ kg, în care se află $M_1 = 5$ kg apă la temperatura $\theta_1 = 20°C$, se introduce o cantitate M_2 de gheață la temperatura $\theta_2 = -10°C$.

Să se calculeze:

1. masa M_2 de gheață necesară pentru ca în vas că existe apă la temperatura $\theta = 0°C$;
2. cantitatea Q de căldură necesară pentru ca în vas să rămînă M_1 kg apă la temperatura $\theta_3 = 100°C$;
3. volumul V ocupat de M_2 kg vapori de apă saturați cu presiunea $p = 1$ atm. Vaporii se consideră gaz perfect;
4. lucrul mecanic L produs la dublarea volumului V într-un proces izobar.

2.1.37. O mașină termică ideală efectuează un lucru mecanic $L = 1{,}676$ kJ pentru fiecare kilocalorie luată de la sursa caldă aflată la temperatura $t_1 = 200°C$.

Să se calculeze:

1. randamentul mașinii η și temperatura t_2 a sursei reci;
2. puterea utilă P_u a mașinii dacă consumă într-o oră 5 kg de benzină cu puterea calorică $q = 48 \cdot 10^6$ J/kg;
3. volumul ocupat de 56 g azot, ce servește drept agent termic în mașină, aflat la presiunea $p = 2$ atm și temperatura t_1.

2.1.38. Un mol de oxigen se găsește într-o stare A, caracterizată prin temperatura $t_A = 47°C$ și densitatea $\rho = 1{,}22 \frac{g}{dm^3}$. Gazul trece într-o altă stare B, printr-o încălzire izobară, producînd un lucru mecanic $L = 1\,662$ J.

Să se calculeze:

1. presiunea p în starea inițială;
2. temperatura T_B în starea finală;
3. volumul V de gaz metan ars, la $p' = 1{,}2$ atm și $t = 17°C$, pentru realizarea procesului AB presupunînd un randament de utilizare a căldurii $\eta = 75\%$;
4. variația de energie internă $U_B - U_A$ în procesul AB;
5. să se reprezinte grafic ciclul $ABCA$, în care BC este o transformare izotermă și CA o transformare izocoră.

Se cunoaște:

puterea calorică a metanului $q = 13\,200 \frac{kcal}{kg}$.

2.1.39. Dintr-un tub cu raza $r = 1{,}2$ mm se lasă să se scurgă $n = 15$ picături de apă. Să se calculeze masa de apă care s-a scurs.

Se cunoaște:

tensiunea superficială a apei $\sigma = 0{,}0728 \frac{N}{m}$.

2.1.40. Două plăci mari de sticlă sînt parțial scufundate în apă. Plăcile sînt verticale, paralele, situate la o distanță $d = 1{,}4$ mm una de alta. Să se calculeze înălțimea h la care se ridică apa între cele două plăci.

Se cunoaște:
tensiunea superficială a apei $\sigma = 0{,}0728 \frac{N}{m}$.

2.1.41. Să se determine densitatea gazului metan la temperatura $t = 27°C$ și presiunea $p = 10^5 \frac{N}{m^2}$ și să se arate cum variază densitatea gazului la:

a) presiune constantă $\left(p = 10^5 \frac{N}{m^2}\right)$ și

b) temperatura constantă ($t = 27°C$).

2.1.42. O cantitate m = [illegible] g oxigen se găsește într-o stare inițială, caracterizată prin presiunea [illegible] $1{,}2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ și temperatura $T_1 = 310$ K. Gazul ajunge într-o stare 2a sau 2b printr-o transformare a) izobară, respectiv b) izotermă. În stările 2a și 2b, sistemul are același volum, de două ori mai mare decît în starea inițială. Să se reprezinte grafic cele două transformări și să se calculeze variația de energie internă ΔU, căldura primită Q și lucrul mecanic primit L în fiecare transformare.

Se cunoaște căldura specifică a oxigenului la volum constant $\left(c_v = 650{,}3 \frac{J}{kg \cdot K}\right)$.

2.1.43. Un sistem format din oxigen are parametrii de stare inițiali: $p_1 = 2{,}4 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, $V_1 = 3{,}116 \cdot 10^{-2}$ m³ și $T = 600$ K. Sistemul evoluează ajungînd într-o stare 2a sau 2b printr-o transformare a) izocoră, respectiv b) izotermă. În stările 2a și 2b, sistemul are aceeași presiune, jumătate din cea inițială. Să se reprezinte grafic cele două transformări și să se calculeze variația de energie internă ΔU, căldura primită Q și lucrul mecanic primit L în fiecare transformare. Se cunoaște căldura specifică a oxigenului la volum constant $\left(c_v = 650{,}3 \frac{J}{kg \cdot K}\right)$.

2.1.44. Într-un vas care conține M kg gheață la 0°C se introduc x kg vapori de apă saturanți (cu $p = 1$ atm) astfel încît sistemul final, în starea de echilibru termic, conține numai apă. Să se determine domeniul de variație al raportului x/M.

2.1.45. Un balon, cu volumul $V = 2$ dm³, umplut cu gaz la presiunea $p_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ are masa $m' = 1{,}002$ kg. Dacă o parte din gaz este evacuat, astfel încît presiunea devine $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, masa balonului este $m'' = 1{,}001$ kg. Temperatura fiind constantă ($T = 300$ K), să se calculeze masa unui mol de gaz, M.

2.1.46. Într-o cameră cu volumul $V = 50$ m³ se află aer la presiunea $p = 10^5 \frac{N}{m^2}$ și temperatura $t_1 = 10°C$. Aerul fiind încălzit pînă la temperatura $t_2 = 25°C$ și presiunea fiind menținută constantă, să se calculeze masa de aer Δm ieșită din cameră în acest proces.

2.1.47. Să se calculeze numărul de molecule n' dintr-un vas cu volumul $V = 8{,}31$ cm^3, în care presiunea este $p = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ la temperatura $T = 320$ K.

2.1.48. Un mol de gaz perfect efectuează un ciclu Carnot. Să se calculeze variația de entropie în:

1. transformarea izotermă efectuată la temperatura superioară, știind că volumul se dublează;
2. transformarea adiabatică următoare celei de la punctul 1;
3. ciclul Carnot.

2.1.49. Un rezervor cu secțiunea foarte mare, deschis în partea superioară, conține apă pînă la înălțimea $h = 1{,}275$ m. Rezervorul are pe fund un orificiu cu secțiunea $s = 1$ cm^2 prin care, în timpul $\tau = 12$ s, curge o cantitate m de apă. Apa, cu temperatura inițială $t_1 = 20°$C, este strînsă într-un vas și încălzită (sub presiunea de 1 atm) pînă cînd o sutime din cantitatea de apă se vaporizează. Să se calculeze:

1. masa apei m;
2. căldura Q necesară pentru realizarea procesului descris;
3. volumul V ocupat de vaporii de apă obținuți, dacă își mențin neschimbată temperatura și își reduc presiunea la 0,25 atm.

2.1.50. Într-un vas, cu capacitate calorică neglijabilă, care conține inițial o cantitate de gheață cu masa $m = 0{,}2$ kg, cu temperatura $t_0 = -10°$C, este introdus un încălzitor electric cu rezistența $R = 20\ \Omega$, străbătut, timp de 1 oră, de un curent electric continuu cu intensitatea $I = 5$A. Să se discute procesele care se petrec (la presiune constantă, 1 atm) și să se reprezinte grafic curba t (τ), care redă variația temperaturii t (°C) în funcție de timpul τ (min.).

2.2. PROBLEME CU INDICAȚII ȘI REZULTATE

2.2.1. Un tub de sticlă capilar, perfect cilindric, are două repere A și B și conține o coloană de mercur CD. Se măsoară distanțele AB și CD la temperaturile 0°C și 100°C. Rezultatele măsurătorilor sînt:

a) la 0°C, distanța AB este $d = 51{,}432$ cm, iar distanța CD este $l = 50{,}584$ cm;

b) la 100°C, cele două distanțe devin: $d' = 51{,}476$ cm și $l' = 51{,}409$ cm. Instrumentul de măsură este menținut tot timpul la 0°C.

Să se calculeze:

1. coeficientul de dilatare liniară α și cubică γ al sticlei;
2. raportul R între secțiunea tubului la 100°C și secțiunea la 0°C;
3. coeficientul de dilatare absolută γ_{Hg} al mercurului.

2.2.2. Un vas de sticlă conține, la 0°C, pînă la un anumit reper, o cantitate de mercur de 1 kg. Vasul este încălzit pînă la 100°C. Să se calculeze masa mercurului conținut de vas pînă la același reper dacă:

1. dilatarea vasului este neglijabilă;
2. sticla din care este confecționat vasul are coeficientul de dilatare volumică egal cu $3 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.

2.2.3. O sferă metalică are volumul 1 800 cm^3 la temperatura 12°C. Sfera este încălzită pînă cînd volumul său devine 1 815,973 cm^3 și apoi este introdusă într-un vas care conține 4 kg apă la temperatura de 12°C. Echilibrul termic se restabilește la temperatura de 24°C.

Să se calculeze:

1. temperatura t la care a fost încălzită sfera;

2. coeficientul de dilatare cubică γ al metalului din care este confecționată sfera.

Se știe că masa sferei este $m = 20{,}475$ kg.

Se cunoaște:

căldura specifică a metalului $c_2 = 0{,}03$ cal/g · grd.

2.2.4. O bară de oțel cu lungimea $l = 1$ m, cu secțiunea constantă, se răcește pierzînd 41 850 J. Să se calculeze forța de întindere F care trebuie aplicată pentru ca bara să-și păstreze, și după răcire, lungimea inițială.

2.2.5. Un corp cade de la înălțimea h (fără viteză inițială). În momentul contactului cu solul, 60% din energia corpului este utilizată pentru încălzirea acestuia, astfel încît creșterea relativă de volum a corpului este de $3{,}6 \cdot 10^{-3}$. Să se calculeze înălțimea h cunoscîndu-se:

căldura specifică a corpului $c = 460$ J/kg;

coeficientul de dilatare lineară a corpului $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

2.2.6. Într-un calorimetru de masă $m = 500$ g, care conține o cantitate de apă $m_1 = 600$ g la temperatura $t_1 = 20°C$, se introduce o bilă de fier cu masa $m_2 = 450$ g și temperatura $t_2 = 100°C$.

Să se calculeze:

1. temperatura de echilibru θ din calorimetru;

2. cantitatea de gheață x cu temperatura $t_0 = -10°C$ care trebuie adăugată pentru ca temperatura să scadă de la θ la t_1.

Se cunoaște căldura specifică a calorimetrului (375 J/kgK).

2.2.7. Într-un vas care conține $m_1 = 1{,}5$ kg apă cu temperatura $t_1 = 15°C$ se introduce o bucată de gheață cu masa $m_2 = 0{,}1$ kg și temperatura $t_2 = -10°C$. După ce se stabilește echilibrul termic la temperatura t', se introduce în vas o cantitate x de vapori de apă la presiunea $p = 1$ atm și temperatura $t = 100°C$, astfel încît în final apa din vas are din nou temperatura t_1.

După aceasta, vasul este încălzit cu un arzător cu gaz pînă cînd întreaga cantitate de apă se transformă în vapori la $t = 100°C$ și $p = 1$ atm, randamentul de utilizare a căldurii fiind 70%.

Să se calculeze:

1. temperatura t';

2. cantitatea x de vapori de apă;

3. cantitatea M de gaz combustibil consumat.

Se cunoaște: puterea calorică a gazului $q = 5 \cdot 10^6$ J/kg.

2.2.8. O butelie de oțel cu volumul $V = 50$ dm^3 eliberează hidrogen printr-un robinet. La temperatura $t_1 = 22°C$, manometrul indică o presiune $p = 5$ atm. După un timp oarecare, la temperatura $t_2 = 27°C$ manometrul indică aceeași presiune. Hidrogenul ieșit din butelie este ars pentru a încălzi o bară de fier cu secțiunea $S = 24$ cm^2.

Să se calculeze:

1. masa Δm de hidrogen ieșită din butelie;

2. cantitatea de căldură Q absorbită de bară;

3. alungirea barei Δl.

Se cunoaște puterea calorică a hidrogenului $q = 5\,000$ cal/g.

2.2.9. Să se calculeze variația temperaturii Δt a cantității de apă m dintr-un vas în raport cu timpul τ dacă:

a) în vas se introduce continuu un lichid (miscibil cu apa) cu debitul masic D și cu temperatura θ_1;

b) lichidul cu debitul D circulă printr-o serpentină, scufundată în apă, avînd la intrare θ_1 și la ieșire θ_2.

Se presupune că nu există pierderi de căldură.

Se cunosc: temperatura inițială a apei θ_0, căldura specifică a apei c și căldura specifică a lichidului c_1.

2.2.10. Cantitatea de căldură primită de Pămînt de la Soare este de 0,5 cal/min · cm², dacă cerul este senin. Presupunînd că, în medie, cerul este senin 12 ore pe zi și 300 zile pe an, să se calculeze:

1. cantitatea x de cărbuni care ar putea fi economisiți în timp de un an, utilizînd căldura primită de suprafața de 1 ha;

2. cantitatea de apă m care ar putea fi distilată utilizînd căldura primită în timp de 12 ore de 1 m², presupunînd că distilarea se face la presiunea de 1 atm și apa are temperatura inițială 30°C;

3. puterea unei mașini termice P care ar folosi căldura primită de o suprafață de 1 ha, dacă randamentul mașinii reprezintă 60% din randamentul unei mașini care ar funcționa după un ciclu Carnot (temperatura cazanului 160°C, a condensatorului 40°C).

Se cunoaște:

puterea calorică a cărbunelui $q = 8\,000$ kcal/kg.

2.2.11. Într-un calorimetru care conține 400 g apă la temperatura mediului ambiant $t_0 = 20$°C se introduc două corpuri: unul de cupru avînd masa $m_1 = 50$ g și temperatura $t_1 = 40$°C, iar altul de fier cu masa $m_2 = 80$ g și temperatura $t_2 = 100$°C. Să se calculeze temperatura finală θ în următoarele cazuri:

a) calorimetrul este izolat termic față de exterior;

b) calorimetrul cedează mediului exterior, pînă la realizarea echilibrului termic, o cantitate de căldură $q = 150$ J;

c) căldura cedată de calorimetru depinde de temperatura finală din calorimetru și de temperatura mediului ambiant t_0, conform relației $q = 100(\theta - t_0)$ cal.

Se cunoaște capacitatea calorică a calorimetrului $K = 40$ J/K.

2.2.12. Într-un vas de alamă cu masa $m' = 0{,}2$ kg și temperatura $t = 15$°C se introduce o cantitate de apă $M = 1$ kg cu temperatura $t = 15$°C și o cantitate de gheață $m_1 = 0{,}2$ kg cu temperatura $t_0 = -5$°C. Ansamblul se încălzește pînă la 100°C cu un reșou cu puterea de 660 W, alimentat cu curent continuu cu tensiunea 220 V. Randamentul de utilizare a căldurii este $\eta = 0{,}8$.

Să se calculeze:

1. cantitatea de căldură Q necesară;

2. durata operației τ;

3. rezistența R_s care trebuie montată în paralel cu un ampermetru introdus în circuit, dacă acesta are rezistența proprie 0,2 Ω și suportă un curent de 1 A.

2.2.13. Să se calculeze temperatura gazului dintr-un vas cu volumul 15 dm³, prevăzut cu o supapă cu aria 10 cm² asupra căreia, pentru a fi menținută închisă, acționează o forță de 1 900 N. Se știe că aceeași masă de gaz ocupă un volum de 150 l sub presiunea de 1 atm la temperatura 32°C.

2.2.14. Un mol de gaz perfect care inițial se găsește în condiții normale ($p_0 = 1$ atm, $V_0 = 22{,}4$ dm³ și $t_0 = 0$°C) efectuează următoarele transformări succesive: încălzirea izobară pînă la temperatura $t_1 = 127$°C, destindere izotermă pînă la presiunea $p_2 = p_0/10$, răcire izocoră pînă la $t_3 = 55$°C și comprimare izobară pînă la temperatura $t_4 = t_0$, după care, printr-o comprimare izotermă, revine în stare inițială.

Să se calculeze parametrii de stare p_i, V_i și T_i în toate stările prin care trece gazul ($i = 1, 2, 3, 4$).

2.2.15. Două vase izolate termic față de exterior, avînd volumele invariabile $V_1 = 1$ l și $V_2 = 3$ l, comunică între ele printr-un tub (cu volum neglijabil) prevăzut cu un robinet. Cît timp robinetul este închis, vasul 1 conține azot la presiunea $p_1 = 0{,}5$ atm și temperatura $t_1 = 0$°C, iar vasul 2 conține argon la presiunea $p_2 = 1{,}5$ atm și temperatura $t_2 = 100$°C. Să se calculeze presiunea p și temperatura t după deschiderea robinetului și stabilirea echilibrului termic:

Se cunosc:

căldura molară la volum constant a azotului $C_{v1} = 5/2\ R$;

căldura molară la volum constant a argonului $C_{v2} = 3/2\ R$.

2.2.16. Două tuburi cu același volum $V = 10$ l conțin un gaz perfect la aceeași presiune $p = 1{,}5 \cdot 10^7$ N/m², dar la temperaturi diferite ($t_1 = 0$°C și $t_2 = 50$°C).

Să se calculeze surplusul de gaz (ΔV) dintr-un tub, exprimat în litri în condiții normale ($p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și $t_0 = 0$°C).

2.2.17. Într-un vas se află 100 g de apă și 8 g gheață la temperatura 0°C.

Să se calculeze:

1. cantitatea de căldură Q_t necesară pentru topirea gheții;
2. cantitatea totală de căldură Q necesară pentru a transforma amestecul de apă și gheață în vapori la 100°C;
3. cantitatea de combustibil x necesară procesului anterior, dacă randamentul de utilizare a căldurii este 80%;
4. volumul vaporilor V la temperatura 100°C și presiunea $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m²;
5. volumul V' al vaporilor dacă temperatura devine 150°C, presiunea rămînînd neschimbată.

Vaporii de apă sînt considerați gaz perfect.

Se cunoaște: puterea calorică a combustibilului $q = 29{,}26$ MJ/kg.

2.2.18. Brațele A și A' ale unui tub în formă de U au fiecare lungimea de 1 m și posedă în partea superioară cîte un robinet (R și R'). La 0°C, robinetele fiind deschise, se toarnă mercur pînă la înălțimea de 20 cm. Se

închide apoi robinetul R și se toarnă în continuare mercur în tubul A' până ce înălțimea mercurului în acesta devine 40 cm. Să se calculeze denivelarea Δh a mercurului din cele două brațe și presiunea P a aerului închis în brațul A, știind că presiunea atmosferică este 10^5 N/m^2.

2.2.19. Un tub, închis la un capăt, este scufundat cu capătul deschis într-o cuvă cu mercur, fiind menținut vertical. Aerul din tub ocupă un volum de 50 cm^3, iar nivelul mercurului din tub este cu 10 cm deasupra nivelului mercurului din cuvă. Într-o altă poziție a tubului, aceeași cantitate de aer ocupă un volum de 100 dm^3, iar denivelarea între mercurul din tub și cel din cuvă este de 42,5 cm. Să se calculeze presiunea atmosferică H, știind că temperatura este 0°C.

2.2.20. Un tub de sticlă, cu secțiunea mică, închis la un capăt, conține aer separat de atmosferă printr-o coloană de mercur cu lungimea $h = 7{,}6$ cm. Cînd tubul este menținut vertical, cu capătul închis în sus, înălțimea coloanei de aer este $l_1 = 50$ cm; dacă tubul este răsturnat astfel încît capătul deschis este în partea superioară, coloana de aer are o lungime $l_2 = 40{,}3$ cm.

Să se determine presiunea atmosferică p știind că temperatura la care se efectuează experiența este 0°C.

2.2.21. Două vase A și B, cu volumele $V_A = 1$ dm^3 și $V_B = 2$ dm^3, conțin același gaz în aceleași condiții de temperatură și presiune ($t = 20$°C și $p = 1$ atm). După ce sînt încălzite la volum constant, vasul A pînă la temperatura $t_A = 100$° și vasul B la $t_B = 250$°C, se stabilește legătura între cele două vase printr-un tub de secțiune neglijabilă. Sistemul ajunge la echilibru termic fără pierderi de căldură în exterior. Să se calculeze:

1. presiunea sistemului p' la echilibru;
2. numerele de moli de gaz n_A și n_B din vasele A și B în starea finală;
3. cantitatea x de gaz care a trecut dintr-un vas în altul.

2.2.22. Un gaz perfect are în condiții normale ($p_0 = 1$ atm și $t_0 = 0$°C) densitatea relativă față de aer $\rho_r = 1{,}05$, iar în condițiile de lucru ($t = 20$°C), densitatea sa este $\rho = 1{,}2$ g/dm^3.

Să se calculeze presiunea gazului p în condițiile de lucru și să se stabilească relația dintre presiune și densitate la temperatura constantă.

2.2.23. Un rezervor cu volumul 41 l conține sub presiunea $p = 30$ atm, la 27°C, un amestec de bioxid de carbon, azot și heliu (10% moli CO_2, 20% moli N_2 și 70% moli He). Gazele au fost captate din trei butelii, cu același volum de 50 l și aceeași temperatură de 27°C, în care presiunile inițiale erau $p_1 = 50$ atm (în butelia cu CO_2), $p_2 = 120$ atm (în butelia cu N_2) și $p_3 = 100$ atm (în butelia cu He). Să se calculeze presiunile finale p_1, p_2, p_3 din cele trei butelii (după umplerea rezervorului).

2.2.24. Într-o cameră cu dimensiunile $6{,}33 \times 4 \times 3$, la un moment dat temperatura este 17°C și punctul de aburire 9°C. După un interval de timp, temperatura devine 18°C, iar punctul de aburire 11°C.

Să se calculeze:

1. umiditatea relativă U a aerului la momentul inițial;
2. umiditatea relativă U' a aerului la momentul final;
3. creșterea Δm a masei vaporilor din cameră.

Se cunoaşte dependenţa presiunii de saturaţie p_s (în mm col Hg) a vaporilor de apă de temperatura t (°C), conform datelor din tabelul de mai jos:

t	9	11	17	18
p_s	8,609	9,844	14,530	15,477

2.2.25. O cantitate de azot $m = 14$ g, care iniţial se găseşte în condiţii normale, trece, printr-o transformare izotermă, în starea A în care presiunea este 2 atm şi apoi printr-o transformare izobară, în stare B în care volumul V_B este cu 22,41 mai mare decît volumul V_A din starea A. Să se calculeze:

1. volumul iniţial V_0;
2. volumul V_A;
3. temperatura T_B;
4. lucrul mecanic L în transformarea izobară.

2.2.26. Într-un corp de pompă vertical, de formă cilindrică cu secţiunea 100 cm², prevăzut în partea superioară cu un piston mobil cu masa 51 kg, se găsesc 14 g azot la temperatura 27°C. Gazul este încălzit izobar pînă la temperatura 400 K. În această stare, pistonul este blocat şi corpul de pompă este pus în legătură cu un vas cu volumul 3 dm³ în care se găseşte azot la presiunea $4 \cdot 10^5$ N/m² şi temperatura 400 K. Să se calculeze:

1. Înălţimea h la care se găseşte pistonul faţă de baza corpului de pompă în starea iniţială;
2. lucrul mecanic L efectuat de gaz;
3. presiunea finală P (după stabilirea legăturii între corpul de pompă şi vas);
4. numerele de moli n_A şi n_B din corpul de pompă şi din vas, în starea iniţială.

Se cunoaşte:
presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m².

2.2.27. 28 g azot se găsesc la temperatura $t = 27$°C şi [presiunea $p = 4 \cdot 10^5$ N/m². Se cere:

1. volumul V_1 ocupat de azot;
2. gazul se încălzeşte la presiunea constantă pînă cînd volumul său se triplează. Ce valori au:
   a) temperatura T_2 atinsă de azot;
   b) lucrul mecanic L efectuat?
3. Gazul se destinde izoterm (la temperatura T_2) pînă la presiunea $p_3 = 2 \cdot 10^5$ N/m². Care este volumul ocupat în aceste condiţii (V_3)?
4. Masa azotului m care trebuie eliminată pentru ca gazul să ocupe volumul V_1 la presiunea p_3 şi temperatura T_2.

2.2.28. Într-un cilindru, prevăzut cu piston mobil, se află o masă de aer $m = 10$ g, încălzită la presiunea constantă $p = 10^5$ N/m² cu un încălzitor electric cu rezistenţa $R = 3\ \Omega$, străbătut timp de 6 minute de un curent de intensitate $I = 0{,}4$ A. Se neglijează pierderile de căldură. Să se calculeze:

1. numărul de molecule n din cilindru;
2. variaţia de temperatură Δt în urma încălzirii;
3. deplasarea s a pistonului în urma încălzirii, dacă suprafaţa pistonului este $A = 20$ cm²;
4. în continuare, se fixează în această poziţie pistonul şi se încălzeşte aerul, ajuns la temperatura T, pînă la T'; care este cantitatea de gaz x care trebuie evacuată pentru ca presiunea să rămînă neschimbată?

2.2.29. Într-un calorimetru se amestecă $m_1 = 840$ g apă la temperatura $t_1 = 28°C$ și $m_2 = 24$ g gheață la 0°C. După topirea gheții, se introduce un cub de metal cu masa $M = 216$ g, a cărui temperatură este t_2. Știind că temperatura finală a sistemului redevine $t_1 = 28°C$, să se calculeze:

1. temperatura t a amestecului după topirea gheții, dar înainte de introducerea cubului de metal;

2. temperatura inițială t_2 a cubului;

3. cantitatea de căldură Q cedată de cub apei;

4. latura cubului l_0 la 0°C;

5. coeficientul de dilatare liniară a metalului α, știind că între temperaturile t_2 și t_1, cubul s-a contractat cu 0,11664 cm³.

Se cunosc:
densitatea metalului la 0°C, $\rho_0 = 8$ g/cm³;
căldura specifică a metalului $c' = 0{,}1$ cal/g.

2.2.30. O butelie de hidrogen, cu volumul de 10 l, construită ca să reziste la o presiune maximă de 30 atm, are scăpări de gaz astfel încît manometrul indică aceeași presiune de 20 atm la temperatura de 20°C, ca și la temperatura inițială de 10°C.

Să se calculeze:

1. masa hidrogenului Δm care a ieșit din butelie;

2. temperatura maximă T la care poate fi încălzită butelia, dacă nu are scăpări de gaz, condițiile inițiale fiind aceleași (10°C și 20 atm).

Se cunoaște:
densitatea hidrogenului în condiții normale $\rho_0 = 0{,}00009$ g/cm³.

2.2.31. Un rezervor metalic cu volumul V constant este umplut cu hidrogen la temperatura $t_1 = 15°$ și presiunea 1 atm. Se încălzește gazul pînă la $t_2 = 37°C$. Pentru a menține în rezervor presiunea constantă de 1 atm, o parte din hidrogen este eliminat printr-o supapă, ceea ce determină micșorarea masei gazului din rezervor cu $\Delta m = 6{,}052$ kg.

Să se calculeze:

1. densitatea hidrogenului ρ în condițiile inițiale;

2. volumul rezervorului V;

3. numărul n de molecule rămas în rezervor.

Se cunoaște:
densitatea hidrogenului la 0°C și 1 atm, $\rho_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-5}$ g/cm³.

2.2.32. Un tub cilindric de sticlă, deschis la amîndouă capetele, avînd lungimea $l = 100$ cm, se afundă cu jumătate din lungimea sa, vertical, în apa dintr-un vas deschis. Astfel afundat, se astupă deschiderea capătului superior al tubului și apoi se scoate vertical afară în aer. Să se calculeze:

1. lungimea l' pînă la care rămîne apa în tub. Se consideră densitatea apei $\rho = 1$ g/cm³, presiunea atmosferică $p_1 = 10^5$ N/m², accelerația gravitațională $g = 10$ m/s² (se neglijează efectele de capilaritate);

2. la ce temperatură T_3 ar trebui încălzit tubul cu aer și apă, ținut tot vertical, astfel încît lungimea coloanei de apă să devină $l_3 = 35$ cm, temperatura inițială fiind $T_1 = 290$ K (se neglijează dilatarea apei)?

3. modificarea lungimii Δl a coloanei de apă dacă, în condițiile de la punctul 1, se ține seama de capilaritate, tensiunea superficială a apei fiind $\sigma = 72{,}8 \cdot 10^{-3}$ N/m.

2.2.33. Într-un calorimetru cu apă se introduce o bilă metalică de masă $m = 500$ g, avînd temperatura t; după realizarea echilibrului termic, temperatura în calorimetru este $t_0 = 40°C$. În continuare, se introduce în calorimetru încă o bilă, identică cu prima, tot cu temperatura t și apoi $m' = 600$ g gheață aflată la 0°C; după realizarea echilibrului termic, se constată că în calorimetru temperatura a rămas aceeași, $t_0 = 40°C$. Se cere:

1. temperatura t a bilelor;

2. cu cît crește volumul uneia dintre bilele de mai sus prin încălzire de la 0°C pînă la temperatura t, dacă densitatea metalului la 0°C este $\rho_0 = 6\,250$ kg/m³, iar coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}?

3. Știind că bilele sînt încălzite de la 0°C la temperatura t într-un cuptor care folosește drept combustibil păcura, să se determine masa M de păcură consumată pentru încălzirea unei tone de bile metalice (se neglijează pierderile de căldură).

4. Dacă în cuptor se introduce un recipient cu un gaz perfect care atinge temperatura finală $t_f = 327$ °C, să se determine presiunea p_f din recipient la această temperatură, știind că inițial presiunea gazului era $p_i = 10$ N/m² la temperatura $t_i = 27°C$, volumul fiind menținut constant.

Se cunosc:

căldura specifică a materialului bilelor $c = 900$ J/kg · K;

puterea calorică a păcurii $q = 4 \cdot 10^7$ J/kg.

2.2.34. Într-un amestec ce conține $m_1 = 3{,}5$ kg apă la temperatura $t_1 = 40°C$ și $m_2 = 0{,}5$ kg gheață la temperatura 0°C se introduce un balon cu oxigen la temperatura $t_2 = -20°C$ și presiunea $p_1 = 0{,}8$ atm.

Să se calculeze:

1. masa m_3 a oxigenului din balon, știind că volumul acestuia este $V_1 = 2{,}5$ dm³;

2. temperatura finală t_3 a oxigenului, căldura specifică a oxigenului fiind 0,156 cal/g · K;

3. presiunea p_2 a oxigenului din balon la temperatura t_3 (dilatarea vasului este neglijabilă);

4. cantitatea de căldură Q necesară vaporizării la 100°C și presiune normală, a întregii cantități de apă, încălzirea făcîndu-se de la temperatura t_2.

2.2.35. Într-un radiator de calorifer, temperatura apei la intrare este $t_1 = 87°C$, iar la ieșire este $t_2 = 30°C$. Se înlocuiește încălzirea cu apă, prin încălzire cu vapori de apă saturați. Vaporii intră în condensator cu presiunea de 1 atm, se condensează și din radiator iese apă cu temperatura $t_3 = 70°C$. Să se calculeze:

1. masa m de vapori care dă aceeași cantitate de căldură ca 1 kg de apă din primul caz (încălzire cu apă caldă);

2. volumul V ocupat de masa m de vapori în condițiile de presiune și temperatură în care intră în radiator, considerînd vaporii de apă gaz perfect;

3. debitul de masă D al vaporilor de apă care trebuie să intre în radiator pentru a menține constantă temperatura camerei în care este montat radiatorul, dacă pierderile de căldură prin pereții camerei în unitatea de timp sînt $P = 2{,}385$ kW;

4. numărul de molecule n aflat în masa m de vapori;

5. energia medie a unei molecule din vaporii de apă în condițiile de la intrarea în radiator.

2.2.36. Într-un vas care conține 2 kg apă la temperatura de 20°C se introduce o bucată de gheață cu masa 100 g și temperatura —10°C. Să se calculeze:

1. temperatura amestecului t la echilibru;
2. cantitatea de căldură Q necesară pentru vaporizare (la temperatura 100°C);
3. cantitatea de apă x transformată în vapori, dacă se consumă 40 g dintr-un combustibil cu puterea calorică 8 000 cal/g și dacă randamentul de incălzire este de 60%;
4. volumul V ocupat de vaporii de apă formați la temperatura de 100°C, dacă presiunea scade pînă la 200 mm col Hg.

2.2.37. Un corp de pompă, care conține la 0°C un amestecc de 100 g apă și 8 g gheață, este încălzit pînă cînd tot conținutul se transformă în vapori de apă la 100°C și 1 atm. Să se calculeze:

1. cantitatea de căldură Q necesară pentru topirea gheții;
2. cantitatea de căldură Q' necesară pentru realizarea întregului proces;
3. cantitatea de combustibil x necesar, dacă se utilizează un combustibil cu puterea calorică 7 000 kcal/kg și dacă randamentul de utilizare a căldurii este 80%;
4. volumul V ocupat de vaporii de apă (considerați gaz perfect) obținuți la 100°C și 1 atm.

2.2.38. Într-un vas care conține $m_1 = 520$ g apă la temperatura $t_1 = 50$°C se adaugă $m_2 = 20$ g gheață cu temperatura $t_2 = -10$°C.

Să se calculeze:

1. temperatura amestecului θ;
2. cantitatea de căldură Q necesară pentru a transforma toată masa de apă $(m_1 + m_2)$ în vapori, la temperatura $t = 100$°C și presiunea atmosferică;
3. cantitatea de combustibil x consumată pentru producerea vaporilor, dacă puterea calorică a combustibilului este $q = 7\,000$ kcal/kg și randamentul de utilizare este $\eta = 60\%$.
4. volumul V ocupat de vapori după ce au suferit o destindere izotermă astfel încît presiunea lor a scăzut pînă la 100 mm col Hg.

2.2.39. Un gaz perfect care se găsește într-o stare inițială 1, caracterizată prin volumul $V_1 = 20$ dm^3 și presiunea $p_1 = 10^5$ N/m^2, trece într-o stare 2, caracterizată prin $V_2 = 2V_1$ și $p_2 = 3p_1$. Trecerea se face prin una din următoarele trei căi:

1. o transformare izocoră urmată de alta izobară;
2. o transformare izobară urmată de alta izocoră;
3. o transformare care în diagrama $p - V$ se reprezintă printr-o linie dreaptă.

Variația de energie internă fiind $\Delta U = 3 \cdot 10^4$ J, să se calculeze lucrul mecanic L produs și cantitatea de căldură Q consumată pe fiecare cale.

2.2.40. Într-un vas se află 10^{-7} moli oxigen și 10^{-6} g azot. Temperatura amestecului fiind de 100°C și presiunea 10^{-3} torr, să se calculeze:

1. volumul vasului V;
2. numărul de molecule din unitatea de volum n_0;
3. presiunile oxigenului p_1 și azotului p_2, dacă fiecare gaz ar ocupa singur întregul volum la temperatura dată.

2.2.41. Într-un corp de pompă se află o masă m de aer la presiunea $p_1 = 10^5$ N/m^2, temperatura $t_1 = 27$°C, ocupînd un volum $V_1 = 30$ dm^3. Gazul efectuează următoarea succesiune de transformări:

— o încălzire izocoră pînă la presiunea $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ N/m^2;

— o destindere izobară pînă la un volum $V_3 = 60$ dm^3;

— o răcire izocoră pînă la presiunea $p_3 = p_1$;

— o comprimare izobară pînă în starea inițială.

Să se calculeze:

1. masa aerului m;
2. temperaturile T_2, T_3 și T_4 la sfîrșitul fiecărei transformări;
3. lucrul mecanic efectuat și cantitatea de căldură primită în fiecare din cele patru transformări;
4. lucrul mecanic total L efectuat pe întregul ciclu de transformări și cantitatea totală de căldură Q primită de sistem din exterior, în timpul unui ciclu;
5. randamentul unei mașini termice care ar funcționa după ciclul descris (η') și randamentul unei mașini termice care ar descrie un ciclu Carnot (η) cu aceleași temperaturi maximă și minimă.

Se cunosc:

densitatea aerului în condiții normale $\rho_0 = 1{,}293$ g/dm^3;

căldura specifică a aerului la volum constant $c_v = 0{,}723$ J/g · K;

căldura specifică a aerului la presiune constantă $c_p = 1{,}010$ J/g · K.

2.2.42. Un corp de pompă, așezat vertical, conține 1 mol aer, volumul acestuia fiind delimitat de un piston, cu greutate neglijabilă, care se poate deplasa fără frecare. Să se calculeze:

1. lucrul mecanic L efectuat prin încălzirea aerului de la $T_1 = 300$ K la $T_2 = 400$ K;
2. cantitatea de aer x care trebuie scoasă din corpul de pompă pentru ca pistonul să revină în poziția inițială, menținîndu-se temperatura T_2.

2.2.43. O mașină frigorifică ideală, funcționînd conform ciclului Carnot, consumă într-un ciclu un lucru mecanic $L = 3{,}7 \cdot 10^4$ J. Mașina preia o cantitate de căldură Q_2 de la sursa rece, cu temperatura $t_2 = -10$°C și cedează sursei calde, cu temperatura $t_1 = +17$°C, cantitatea de căldură Q_1.

Să se calculeze:

1. randamentul ciclului Carnot η;
2. cantitățile de căldură Q_1 și Q_2.

2.2.44. O cantitate de 128 g oxigen este încălzită izobar de la 20°C la 100°C. Să se calculeze:

1. cantitatea de căldură Q primită de gaz;
2. lucrul mecanic L efectuat;
3. variația de energie internă ΔU.

2.2.45. Într-un corp de pompă se găsește un kmol de gaz perfect la presiunea de 10 atm și temperatura 27°C. Gazul este încălzit izobar prin arderea a 0,2 kg cărbuni cu puterea calorică $3 \cdot 10^7$ J/kg. Știind că 15% din căldura obținută la arderea cărbunelui este utilizată pentru destindere, să se calculeze parametrii de stare ai gazului în starea finală.

2.2.46. Să se calculeze cantitatea de căldură Q primită de un gaz perfect într-o transformare izobară ($p = 5 \cdot 10^5$ N/m^2), dacă volumul gazului crește de la 50 dm^3 la 60 dm^3 și dacă variația de energie internă este 7 500 J.

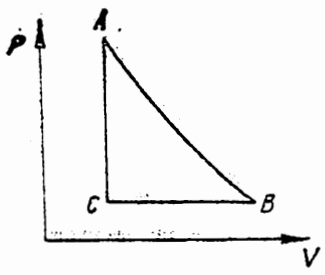


Fig. 2.15

2.2.47. O cantitate de 8 g de oxigen efectuează ciclul $ABCA$, conform figurii 2.15. În A, temperatura este $t = 127°C$, iar volumul $V_A = 1$ l. În transformarea AB, temperatura rămîne neschimbată, iar volumul se dublează.

Să se calculeze:

1. presiunea, volumul și temperatura gazului în stările A, B, C;
2. lucrul mecanic efectuat și cantitatea de căldură primită de gaz în fiecare transformare;
3. lucrul mecanic L efectuat pe întreg ciclul;
4. randamentul η' al ciclului $ABCA$;
5. randamentul η al ciclului Carnot efectuat între aceleași temperaturi extreme.

Se cunoaște raportul $C_p/C_v = 1{,}4$.

2.2.48. Într-un corp de pompă se găsește aer care ocupă volumul $V_A = 0{,}02$ m³ sub presiunea $p_A = 10^5$ N/m² la temperatura $t_A = 27°C$. Gazul efectuează ciclul $ABCDA$ format din două izocore (AB și CD) și două izobare (BC și DA). În punctul B, presiunea are valoare dublă față de cea din A, iar în punctul C, volumul este de 1,5 ori mai mare decît cel din A. Să se reprezinte grafic ciclul. Să se calculeze lucrul mecanic L produs în acest ciclu, precum și randamentul η' al acestui ciclu. Se cunosc:

căldura specifică la presiune constantă $c_p = 1\,000$ J/kgK;

căldura specifică la volum constant $c_v = 715$ J/kgK.

2.2.49. Un gaz perfect, cu presiunea $p = 8 \cdot 10^5$ N/m², este încălzit izobar astfel încît densitatea sa se micșorează de patru ori. Cantitatea de căldură primită este 84 J. Să se calculeze volumul V în starea finală, știind că raportul dintre căldura specifică la presiune constantă și căldura specifică la volum constant a gazului este 1,4.

2.2.50. Un corp de pompă conține gaz perfect, cu densitatea ρ, la presiunea p. Să se calculeze:

1. presiunea p' din corpul de pompă, dacă menținînd constante temperatura și volumul, a fost eliminată o cantitate de gaz astfel încît densitatea a scăzut cu $\Delta\rho$;
2. lucru mecanic L efectuat, dacă după transformarea de la punctul 1 gazul se destinde izobar, variația de energie internă în acest proces fiind ΔU.

Se cunosc de asemenea constanta gazelor perfecte R și căldura molară la volum constant C_v.

2.2.51. Într-un cilindru prevăzut cu piston mobil, izolat termic față de exterior, este introdus un încălzitor electric cu rezistența 20 Ω, străbătut timp de 30 min de un curent electric cu intensitatea 0,5 A. Să se calculeze lucrul mecanic L efectuat la destinderea izobară a gazului.

2.2.52. O mașină termică utilizează drept combustibil cărbune cu puterea calorică 29 MJ/kg. Mașina funcționează după un ciclu Carnot, între temperaturile 200°C și 25°C și produce o putere de 100 kW. Mașina acționează un generator de curent continuu, randamentul de transmisie fiind 90%. Să se calculeze:

1. cantitatea de cărbune x consumată în timp de o oră;

2. curentul I debitat de dinam, dacă circuitul exterior conține un rezistor $R_1 = 200\ \Omega$ legat în serie cu un ansamblu de două rezistoare cuplate în paralel ($R_2 = 300\ \Omega$ și $R_3 = 150\ \Omega$);

3. cantitatea m de apă cu temperatura inițială 20°C, în care este scufundat rezistorul R_1 și care poate fi adusă la fierbere în timp de o oră, pierderile de căldură fiind de 5%.

2.2.53. O mașină termică ideală, care funcționează după ciclul Carnot, la care diferența dintre temperaturile celor două izvoare este $\Delta T = 420$ K, are randamentul $\eta = 0{,}6$. Consumul de combustibil pentru încălzirea agentului termic din mașină este 1,5 kg/oră, iar puterea calorică a combustibilului este 10 000 kcal/kg. Azotul, folosit drept agent termic în mașină, este evacuat la temperatura T_2 a izvorului rece și la presiunea $p_2 = 2$ atm.

Să se calculeze:

1. puterea utilă P_u dezvoltată de mașină;

2. volumul V_2 al azotului la ieșirea din mașină, masa lui fiind $m = 14$ g, iar masa unui mol de azot 28 g;

3. cantitatea de căldură degajată Q de masa m de azot la răcirea ei, sub volum constant, astfel încît presiunea azotului să se reducă de la p_2 la $p_3 = 0{,}5$ atm, temperatura la începutul procesului de răcire fiind T_2.

Se cunoaște:

căldura molară a azotului la volum constant $C_v = 5$ cal/mol · K.

2.2.54. Într-un vas calorimetric cu 450 g apă la temperatura $t_1 = 20$°C se introduc 50 g gheață la temperatura $t_2 = -20$°C, atingîndu-se temperatura finală t_0. Se introduce apoi în apă un sistem de palete (analog dispozitivului experimental Joule), acționat de o masă $M = 15$ kg care cade vertical de la înălțimea h.

Să se calculeze:

1. temperatura de echilibru t_0;

2. lucrul mecanic care trebuie transferat apei din calorimetru pentru ca temperatura să devină $(t_0 + 1)$°C $= t_3$;

3. înălțimea de cădere h, știind că sînt necesare 10 căderi succesive ale masei M pentru ca apa să capete temperatura t_3 și că numai o treime din energia potențială a masei M se transformă în energie cinetică;

4. viteza masei M la capătul inferior al cursei.

2.2.55. Pentru topirea unui lingou de aluminiu cu masa de 500 kg se utilizează un cuptor încălzit cu păcură. Temperatura inițială a lingoului este de 60°C, iar temperatura de topire $t = 660$°C.

Să se calculeze:

1. cantitatea de căldură Q necesară pentru topirea lingoului;

2. debitul masic orar D de păcură arsă în cuptor, dacă procesul durează 30 minute și randamentul de utilizare a căldurii este 55%;

3. lucrul mecanic L dezvoltat de o mașină termică a cărei funcționare reproduce un ciclu Carnot și care preia de la sursa caldă cantitatea de căldură Q. Temperatura sursei calde este $t_1 = 727$°C, iar a sursei reci $t_2 = 127$°C;

4. presiunea unui gaz perfect p închis într-un vas cu volumul invariabil, adus la temperatura $t = 660$°C, dacă presiunea inițială este 10 N/cm² și temperatura inițială 38°C.

Se cunoaște: puterea calorică a păcurii $q = 4 \cdot 10^7$ J/kg.

2.2.56. Într-un vas izolat care conține, în echilibru termic, un amestec de $m_1 = 3$ kg apă și $m_2 = 0{,}5$ kg gheață se introduc vapori de apă saturanți cu temperatura $t = 100°C$. Să se determine masa apei din vas în momentul cînd:

1. toată gheața s-a topit;
2. temperatura sistemului a devenit $t = 100°C$.

2.2.57. Un amestec este format din $m_1 = 0{,}5$ kg gheață și $m_2 = 1$ kg apă, în echilibru termic. Să se calculeze cantitatea Q_1 necesară topirii gheței și cantitatea de căldură Q_2 necesară transformării amestecului inițial în vapori saturanți cu presiunea de saturație 1 atm.

2.2.58. Într-un vas izolat, cu capacitate calorică neglijabilă, care conține m kg apă la temperatura $t°C$ se introduce gheață cu temperatura $\theta°C$ ($\theta < 0$). Să se determine cantitatea de gheață x pentru ca sistemul să ajungă la echilibru termic, apa și gheața păstrîndu-și fiecare starea de agregare inițială.

2.2.59. Să se calculeze variația de energie internă ΔU pentru un sistem format din oxigen (masa, $m = 1$ kg) care este încălzit izobar astfel încît temperatura sa crește cu $\Delta T = 100$ K.

2.2.60. Să se reprezinte transformările izotermă, izobară și izocoră în diagrama:

1. presiune-volum;
2. temperatură-volum;
3. temperatură-presiune.

REZOLVĂRI ȘI SOLUȚII

2.1.1. La încălzire, lungimile barelor variază conform relațiilor:

$$l_1 = l_{01}(1 + \alpha_1 t) = l_{01} + l_{01}\alpha_1 t,$$
$$l_2 = l_{02}(1 + \alpha_2 t) = l_{02} + l_{02}\alpha_2 t.$$

Prin scădere

$$l_1 - l_2 = l_{01} + (l_{01}\alpha_1 - l_{02}\alpha_2)t.$$

Deoarece, conform datelor problemei

$$l_1 - l_2 = l_{01} - l_{02} = \Delta l,$$

urmează

$$l_{01}\alpha_1 = l_{02}\alpha_2.$$

Se obține sistemul de două ecuații cu două necunoscute (l_{01} și l_{02}).

$$l_{01}\alpha_1 = l_{02}\alpha_2, \quad l_{01} - l_{02} = \Delta l,$$

a cărui rezolvare conduce la

$$l_{01} = 5\frac{1}{7} \text{ cm și } l_{02} = 3\frac{1}{7} \text{ cm}.$$

2.1.2. Notînd v_0 volumul unei diviziuni la $t_0 = 0°C$ obținem pentru volumul a 50 diviziuni la temperatura t_1 expresia:

$$V_1 = 50\, v_0[1 + \gamma_{St}(t_1 - t_0)] = 50\, v_0(1 + \gamma_{St} t_1).$$

V_1 va reprezenta volumul fiecărui lichid la $t_1 = 10°C$. Putem scrie deci următoarea relație pentru mercur:

$$50\, v_0(1 + \gamma_{St} \cdot t_1) = V_{0Hg}(1 + \gamma_{Hg} t_1),$$

unde cu V_{0Hg} am notat volumul ocupat de mercur la $t_0 = 0°C$.

Rezultă

$$V_{0Hg} = \frac{50\, v_0(1 + \gamma_{St} \cdot t_1)}{1 + \gamma_{Hg} t_1}.$$

Analog, pentru lichidul necunoscut vom obține:

$$V_0 = \frac{50\, v_0(1 + \gamma_{St} \cdot t_1)}{1 + \gamma_l t_1}.$$

Folosind aceste expresii, putem scrie volumul ocupat de mercur la $t_2 = 90°C$;

$$V_{90Hg} = V_{0Hg}(1 + \gamma_{Hg} 90);$$

$$V_{90Hg} = \frac{50\, v_0(1 + \gamma_{St} \cdot 10)\,(1 + \gamma_{Hg} 90)}{1 + \gamma_{Hg} \cdot 10}.$$

Analog, pentru lichidul necunoscut:

$$V_{90l} = \frac{50\, v_0(1 + \gamma_{St} \cdot 10)\,(1 + \gamma_l \cdot 90)}{1 + \gamma_l \cdot 10}.$$

Dar $V_{90Hg} - V_{90l} = 0{,}3(1 + \gamma_{St} \cdot 90)\, V_0$ sau

$$50(1 + \gamma_{St} \cdot 10)\left(\frac{1 + \gamma_{Hg} \cdot 90}{1 + \gamma_{Hg} \cdot 10} - \frac{1 + \gamma_l 90}{1 + \gamma_l 10}\right) = 0{,}3(1 + \gamma_{St} \cdot 90),$$

$$\frac{1 + \gamma_{Hg} 90}{1 + \gamma_{Hg} 10} - \frac{1 + \gamma_l 90}{1 + \gamma_l 10} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{1 + \gamma_{St} 90}{1 + \gamma_{St} 10}.$$

Rezolvînd această ecuație de gradul I în γ_l obținem:

$$\gamma_l = 1{,}02 \cdot 10^{-4} K^{-1}.$$

2.1.3. 1. Temperatura t rezultă din $Q = \rho \cdot l_0 \cdot s \cdot c \cdot t$;

$$t = \frac{Q}{\rho l_0 S c} = \frac{3\,471}{8\,900 \times 1 \times 10^{-4} \times 390} = 10°C.$$

$$\Delta l = 1 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

2. $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$, $F = \frac{\Delta l E S}{l_0} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4}}{1} = 1\,665$ N.

3. La alungirea barei, forța elastică fiind proporțională cu alungirea, variază continuu între 0 și F. Atunci L va fi determinat de F_{medie} și deci

$$L = F_{med}\, \Delta l = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} \cdot 1\,665 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4} = 0{,}141 \text{ J}.$$

2.1.4. 1. $Mc(t - t_0) = m_2 \lambda$;

$$c = \frac{m_2 \lambda}{M(t - t_0)} = \frac{0{,}3 \times 80}{1 \times 240} = 0{,}1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

2. $m_2 \lambda + (m_1 + m_2) c_1 (\theta - t_0) = M_1 c (t - 0)$,

$$\theta = \frac{M_1 c t - m_2 \lambda}{(m_1 + m_2) c_1 + M_1 c} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 240 - 0{,}3 \cdot 80}{(0{,}5 + 0{,}3) \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}1} = 24° \text{ C}.$$

8. a) $M' = M$ (deoarece temperatura de echilibru rămîne neschimbată).

b) $m_2\lambda + (m_1 + m_2)c_1(\theta - t_0) + K(\theta - t_0) = M_1'c(t - \theta)$.

$$M_1' = \frac{m_2\lambda + (m_1 + m_2)c_1\theta + K\theta}{c(t - \theta)} = \frac{0{,}3 \cdot 80 + (0{,}5 + 0{,}3) \cdot 1 \cdot 24 + 0{,}2 \cdot 24}{0{,}1(240 - 24)};$$

$$M_1' = 2{,}22 \text{ kg}.$$

2.1.5. Masa de gheață topită, deci micșorarea volumului amestecului apă-gheață din B, exprimată prin numărul de diviziuni cu care se retrage mercurul, este proporțională cu cantitatea de căldură cedată de corpul introdus în A care se răcește pînă la $t_0 = 0°C$. Deci:

$$Q = K\Delta N$$

unde K este un coeficient de proporționalitate, exprimat în $\frac{\text{cal}}{\text{div}}$.

Pentru apă

$$Q_1 = m_1c_1(t_1 - t_0) = K(N_1 - N_2).$$

Rezultă

$$K = \frac{m_1c_1(t_1 - t_0)}{N_1 - N_2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10}{40 - 35} = 20 \frac{\text{cal}}{\text{div}}.$$

Pentru cupru

$$Q = mc(t - t_0) = K(N_2 - N_3).$$

Urmează

$$c = \frac{K(N_2 - N_3)}{m(t - t_0)} = \frac{20(35 - 27{,}8)}{20 \times 80} = 0{,}09 \frac{\text{cal}}{\text{gK}}.$$

2.1.6. 1. $Q = mc\Delta t = \rho lsc\Delta t$,

$$Q = \eta xq,$$

$$\Delta t = \frac{\eta x \cdot q}{\rho lsc} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}8 \cdot 10^7}{7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 460} = 668{,}9°C.$$

2. $\Delta l = l\alpha\Delta t = 1 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 668{,}9 = 8{,}696 \cdot 10^{-3}$ m.

3. $Mc_0(\theta - t_0) = \rho lsc(t + \Delta t - \theta)$.

$$\theta = \frac{\rho lsc(t + \Delta t) + Mc_0t_0}{\rho lsc + Mc_0} = \frac{7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 460(668{,}9 + 25) + 10 \cdot 4\,180 \cdot 20}{7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 460 + 10 \cdot 4\,180} = 30{,}95°C.$$

2.1.7. 1. $\Delta l = l_0\alpha\Delta t$, $Q = mc\Delta t = l_0s\rho c\Delta t$,

$$l_0\Delta t = \frac{Q}{s\rho c};$$

$$\Delta l = \frac{Q\alpha}{s\rho c} = \frac{22 \cdot 10^6 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}}{24 \cdot 10^{-4} \cdot 7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 460} = 3{,}07 \text{ cm}.$$

2. $Q = \eta xq$, $x = \frac{Q}{\eta q} = \frac{22 \cdot 10^6}{0{,}3 \cdot 3{,}13 \cdot 10^5} = 234$ kg.

3. $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$, $F = \frac{\Delta l}{l_0}E \cdot S = \frac{1}{100} \cdot 20 \cdot 10^{10} \cdot 24 \cdot 10^{-4} = 4{,}8 \cdot 10^6$ N.

2.1.8. 1. $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Q$ (conform legii conservării energiei);

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2} - Q\right)\frac{2}{m}} = \sqrt{\left(\frac{5 \cdot 300^2}{2} - 200\,000\right)\frac{2}{5}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. Într-o mișcare uniform întîrziată:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \quad v_1 = v_0 - at.$$

Introducînd valorile numerice:

$$10\,000 = 300\,t - \frac{1}{2} a t^2, \quad 100 = 300 - at.$$

Rezolvarea sistemului dă: $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ și $t = 50$ s.

3. $F = m \cdot a = 5 \cdot 4 = 20$ N.

4. $\eta Q = m \cdot c \cdot \Delta t$, $\Delta t = \frac{\eta Q}{m \cdot c} = \frac{0{,}5 \cdot 200\,000}{5 \cdot 125} = 160°\text{C}$.

2.1.9. 1. $L_{fr} = \mu F \cdot s = \mu F \cdot n \cdot \pi \cdot d = 0{,}2 \cdot 8\,000 \cdot 200 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = 1{,}0048 \cdot 10^6$ J.

$$\Delta t = \frac{0{,}5\, L_{fr}}{m \cdot c} = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}0048 \cdot 10^6}{10 \cdot 460} = 109°\text{C}.$$

2. $L_{fr} = xc'(t_0 - t) + x\lambda$;

$$x = \frac{L_{fr}}{c'(t_0 - t) + \lambda} = \frac{1{,}0048 \cdot 10^6}{2\,040 \cdot 10 + 330\,000} = 2{,}87 \text{ kg}.$$

2.1.10. Parametrii azotului

$$p_N = p_2 = 0{,}5 \text{ atm}. \quad V_N = V_2 = \frac{p_0 V_0}{p_2} = \frac{1 \cdot 22{,}4}{0{,}5} = 44{,}8 \text{ l}.$$

$$T_N = T_0 = 273 \text{ K}.$$

Parametrii argonului

$$p_A = p_3 = p_2 = 0{,}5 \text{ atm}, \quad V_3 = V_2 + 5{,}2 = 44{,}8 + 5{,}2 = 50 \text{ l}.$$

$$T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \frac{50 \cdot 273}{44{,}8} = 304 \text{ K}.$$

Ecuația calorimetrică

$$n_N C_N (T - T_N) = n_A C_A (T_A - T).$$

Conform datelor problemei, $n_N = n_A = 1$ mol.

$$T = \frac{C_N T_N + C_A T_A}{C_N + C_A} = \frac{\frac{5}{2} R \cdot 273 + \frac{3}{2} R \cdot 304}{\frac{5}{2} R + \frac{3}{2} R} = 285 \text{ K}.$$

Presiunea rezultată din legea gazelor perfecte:

$$p = \frac{nRT}{V}, \text{ unde } n = n_N + n_A = 2, \; V = V_N + V_A = 94{,}8 \text{ l}.$$

R nefăcînd parte din datele problemei se calculează din condițiile normale: $R = p_0 V_0 / T_0$,

$$p = \frac{nT}{V} \cdot \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{2 \cdot 285}{94{,}8} \cdot \frac{1 \cdot 22{,}4}{273} = 0{,}493 \text{ atm}.$$

2.1.11. 1. $\eta Q = mc(t - t_0) + x\lambda$;

$$x = \frac{\eta Q - mc(t - t_0)}{\lambda} = \frac{0{,}5 \cdot 828 - 4 \cdot 1 \cdot 90}{540} = 0{,}1 \text{ kg}.$$

2. $pV = \frac{m}{M} RT$;

$$V = \frac{mRT}{Mp} = \frac{100 \cdot 0{,}082 \cdot 373}{18 \cdot 1} = 169{,}9 \text{ dm}^3.$$

3. $\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T$,

$$R = 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 0{,}082 = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^{-3} \text{ m}^3}{10^{-3} \text{ kmol} \cdot \text{K}} = 8\,310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}.$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{8\,310}{6{,}02 \cdot 10^{26}} \cdot 373 = 7{,}73 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

4. $L = p(2V - V) = pV = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1699 = 17\,210$ J.

2.1.12. 1. $Q_1 = m\lambda = 1(606{,}5 - 0{,}695 \cdot 90) = 544$ cal.

$$L_1 = p_0(V_1 - V_0) \approx p_0 \cdot V_1$$

(volumul apei lichide este neglijabil față de cel al vaporilor).

$$V_1 = \frac{mRT_0}{Mp_0} = \frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 363}{18 \cdot 7 \cdot 10^4} = 2{,}39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$L_1 = 7 \cdot 10^4 \cdot 2{,}39 \cdot 10^{-3} = 167{,}3 \text{ J}.$$

2. $Q_2 = mc_v(T_1 - T_0)$,

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}, \quad T_1 = \frac{p_1 T_0}{p_0} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 363}{7 \cdot 10^4} = 525 \text{ K}.$$

$$Q_2 = 1 \cdot 0{,}36(525 - 363) = 58{,}4 \text{ cal}, \quad L_2 = 0.$$

3. $Q_3 = mc_p(T_2 - T_1) = 1 \cdot 0{,}48(373 - 525) = -73$ cal (răcire).

$$L_3 = p(V_3 - V_2),$$

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}, \quad V_3 = \frac{V_2 T_3}{T_2} = \frac{V_1 T_3}{T_2} = \frac{2{,}39 \cdot 10^{-3} \cdot 373}{525} = 1{,}69 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$L_3 = 1{,}013 \cdot 10^5(1{,}69 - 2{,}39)10^{-3} = -70{,}9 \text{ J (comprimare)}.$$

2.1.13. 1. Conform legii gazelor perfecte,

$$p = \frac{(n_1 + n_2)RT}{V_1 + V_2}.$$

Numerele de moli n_1 și n_2 se calculează din condițiile inițiale

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT} \text{ și } n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT}.$$

Rezultă

$$p = \frac{RT}{V_1 + V_2}\left(\frac{p_1 V_1}{RT} + \frac{p_2 V_2}{RT}\right) = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2};$$

$$p = \frac{0{,}5 \cdot 8 + 1{,}5 \cdot 5}{8 + 5} = 0{,}885 \text{ atm}.$$

2. În condiții izoterme, $pV = \text{ct}$ și deci $\frac{p}{\rho} = \text{ct.}$

Atunci

$$m_1 = V_1\rho_1 = V_1\frac{\rho_{01}}{p_0}p_1 = 8 \cdot 10^3 \frac{0{,}0013}{1} \cdot 0{,}5 = 5{,}2 \text{ g.}$$

$$m_2 = V_2\rho_2 = V_2\frac{\rho_{02}}{p_0}p_2 = 5 \cdot 10^3 \frac{0{,}00009}{1} \cdot 1{,}5 = 0{,}675 \text{ g.}$$

2.1.14. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{V_0 M}{V_{0m}V}$.

V_0 (volumul în condiții normale) rezultă din

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}, \quad V_0 = \frac{pVT_0}{p_0T}$$

$$\rho = \frac{M}{V_{0m}V} \cdot \frac{pVT_0}{p_0T} = \frac{MpT_0}{V_{0m}p_0T} = \frac{32 \cdot 150 \cdot 273}{22{,}4 \cdot 1 \cdot 323} = 181 \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}.$$

2.1.15. 1. În starea 1, $p_1 = \frac{F}{S} = \frac{10^4\text{N}}{2 \cdot 10^{-2}\text{ cm}^2} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

În starea 2, $T_2 = T_1 = 400$ K, $p_2V_2 = p_1V_1$,

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 2}{2{,}6} = 3{,}85 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

În starea 3, $p_3 = p_2 = 3{,}85 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ și $V_3 = V_1 = 2$ dm^3, $T_3 = \frac{p_3V_3}{nR}$; n se calculează din $p_1V_1 = nRT_1$,

$$T_3 = \frac{p_3V_3}{R} \cdot \frac{RT_1}{p_1V_1} = \frac{p_3T_1}{p_1} = \frac{3{,}85 \cdot 10^6 \cdot 400}{5 \cdot 10^6} = 308 \text{ K.}$$

2. Proces izoterm:

$$L_{12} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}303 \log\frac{2{,}6}{2} = 263 \text{ J.}$$

Proces izobar: $L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = 3{,}85 \cdot 10^6(2 - 2{,}6)10^{-3} = -231{,}5$ J.

Proces izocor: $L_{31} = 0$.

$L_{total} = 263 - 231{,}5 = 31{,}5$ J.

3. $\eta_i = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = \frac{400 - 308}{400} = 0{,}23.$

2.1.16. Reprezentarea grafică (fig. 2.16).

a) *1A2*, b) *1B2*, c) *12*.

1. $L_a = p_2(V_2 - V_A) = p_2(V_2 - V_1)$,

$$V_2 = \frac{p_1V_1}{p_2} = \frac{9 \cdot 10^6 \cdot 3}{6 \cdot 10^6} = 4{,}5 \text{ dm}^3,$$

$$L_a = 6 \cdot 10^6(4{,}5 - 3) \cdot 10^{-3} = 900 \text{ J.}$$

$$L_b = p_1(V_B - V_1) = p_1(V_2 - V_1) =$$
$$= 9 \cdot 10^6(4{,}5 - 3) \cdot 10^{-3} = 1\,350 \text{ J.}$$

$$L_c = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\, 2{,}303 \log\frac{V_2}{V_1},$$

$$L_c = 9 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}303 \log\frac{4{,}5}{3} = 1\,088 \text{ J.}$$

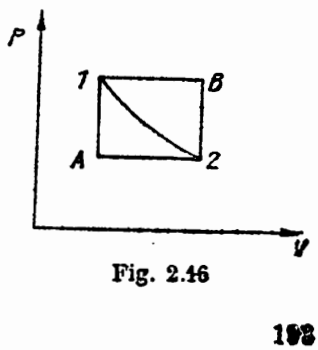


Fig. 2.16

2. Temperaturi extreme: T_B și T_A,

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_2}{T}, \quad T_B = \frac{V_2}{V_1} T,$$

$$\frac{V_2}{T} = \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_1}{T_A}, \quad T_A = \frac{V_1}{V_2} T,$$

$$\eta = \frac{T_B - T_A}{T_B} = \frac{\frac{V_2}{V_1} T - \frac{V_1}{V_2} T}{\frac{V_2}{V_1} T} = \frac{\frac{V_2}{V_1} - \frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_2}{V_1}}; \quad \eta = \frac{\frac{4,5}{3} - \frac{3}{4,5}}{\frac{4,5}{3}} = 0,555.$$

2.1.17. Presiunea se obține aplicînd legea gazelor perfecte:

$$p = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)RT}{V}.$$

Temperatura de echilibru rezultă din ecuația calorimetrică:

$$n_1 M_1 c_1 (T - T_1) + n_2 M_2 c_2 (T - T_2) + n_3 M_3 c_3 (T - T_3) = 0;$$

$$T = \frac{n_1 M_1 c_1 T_1 + n_2 M_2 c_2 T_2 + n_3 M_2 c_3 T_3}{n_1 M_1 c_1 + n_2 M_2 c_2 + n_3 M_3 c_3}.$$

Se obține:

$$p = \frac{(n_1 + n_2 + n_3) R (n_1 M_1 c_1 T_1 + n_2 M_2 c_2 T_2 + n_3 M_3 c_3 T_3)}{V(n_1 M_1 c_1 + n_2 M_2 c_2 + n_3 M_3 c_3)}.$$

2.1.18. 1. În transformarea izotermă: $p_1 V_1 = p_2 V_2$.

Presiunea inițială a gazului este $p_1 = H - h_1$, unde H este înălțimea coloanei de mercur corespunzătoare la 1 atm. Atunci

$$(H - h_1) s l_1 = (H - h_2) s l_2;$$

$$h_2 = H - \frac{(H - h_1) l_1}{l_2} = 760 - \frac{(760 - 400)200}{250} = 472 \text{ mm}.$$

$$L_2 = h_2 + l_2 = 472 + 250 = 722 \text{ mm}.$$

2. $p = (n_a + n_H) \frac{RT}{V}$;

$$n_H = \frac{m}{M} = \frac{pV}{RT} - n_a,$$

unde n_H și n_a reprezintă numerele de moli de hidrogen și aer; n_a se obține din condițiile inițiale:

$$n_a = \frac{p_1 V_1}{RT}.$$

Deoarece $p_1 = H - h_1 = 360 \text{ torr} = \frac{360}{760}$ atm și $V_1 = s l_1 = 20 \text{ cm}^3$,

$$p = H - h = 560 \text{ torr} = \frac{560}{760} \text{ atm} \text{ și } V = sl = 40 \text{ cm}^3,$$

rezultă

$$m = \frac{M}{RT}(pV - p_1 V_1) = \frac{2}{0,082 \cdot 300}\left(\frac{560 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{760} - \frac{360 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{760}\right) = 0,00164 \text{ g}.$$

2.1.19. 1. Parametrii de stare în starea normală și în condițiile problemei sînt legați prin relația

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}.$$

Masa gazului m este legată de densitatea ρ_0 în condiții normale prin $m = \rho_0 V_0$. Eliminînd V_0 între cele două relații se obține

$$m = \frac{pVT_0\rho_0}{p_0T} = \frac{151 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 273 \cdot 1{,}43}{10^5 \cdot 290} = 8{,}13 \text{ kg}.$$

2. Volumul oxigenului V în condițiile de lucru se obține din $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{pV}{T}$,

$$V_1 = \frac{pVT_1}{p_1T} = \frac{151 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 273}{2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 290} = 2\ 274 \text{ l}.$$

Deoarece în tub trebuie să rămînă 40 l (în condițiile de lucru) rezultă:

$$x = 2\ 274 - 40 = 2\ 234 \text{ l}.$$

3. Deoarece densitatea variază invers proporțional cu volumul

$$\frac{p'}{\rho'T'} = \frac{p_0}{\rho_0T_0}; \quad \rho' = \frac{p'\rho_0T_0}{p_0T'} = \frac{50 \cdot 10^5 \cdot 1{,}43 \cdot 273}{10^5 \cdot 300} = 76{,}8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

2.1.20. 1. $Q = mc_v\Delta t = nMc_v\Delta t = nC_v\Delta t$ unde $C_v = Mc_v$ reprezintă căldura molară (M este masa unui mol)

$$n = \frac{2{,}24}{V_{0m}} = \frac{2{,}24}{22{,}4} = 0{,}1.$$

Q rezultă din $Q = RI^2t = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 t = 1{,}5\left(\frac{2}{1{,}5+0{,}5)^2}\right)^2 100 = 150$ J.

$$\Delta t = \frac{Q}{nC_v} = \frac{150}{0{,}1 \cdot 20 \cdot 8} \approx 72^\circ\text{C} \Rightarrow T = 345 \text{ K}.$$

2. Transformarea fiind izocoră,

$$p = \frac{p_0}{T_0}T = \frac{1 \cdot 345}{273} = 1{,}262 \text{ atm}.$$

3. $\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T = \frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 345}{2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 7{,}13 \cdot 10^{-21}$ J.

2.1.21. Fie s secțiunea tubului. Inițial, coloana de mercur se află la mijlocul tubului. Putem scrie deci (fig. 2.17, *a*):

$$F_1 = F_2.$$

Dar:

$$F_1 = p_1s \Rightarrow p_1 = p_2; \quad F_2 = p_2s.$$

Cum masa de gaz A a suferit un proces izoterm, aplicăm legea lui Boyle-Mariotte:

$$p_1V_1 = p_3V_3, \quad p_1sl_1 = p_3sl_3, \quad p_1l_1 = p_3l_3.$$

Și masa de aer B a suferit un proces izoterm pentru care aplicăm aceeași lege:

$$p_1sl_2 = p_4sl_4 \quad p_2l_2 = p_4l_4.$$

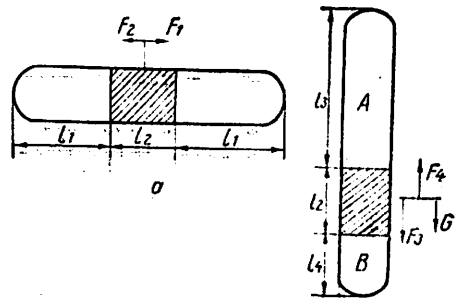


Fig. 2.17

Cînd tubul este așezat în poziție verticală (fig. 2.17, *b*), asupra coloanei de mercur acționează forțele:

$F_3 = p_3 s$, $G = \rho g s l_2$ (ρ = densitatea Hg)

$F_4 = p_4 s$, care își face echilibrul

$F_4 = F_3 + G$, deci $p_4 s = p_3 s + \rho g s l_2$;

$p_4 = p_3 + \rho g l_2$.

Din $p_1 l_1 = p_4 l_4$ avem $p_4 = \dfrac{p_1 l_1}{l_4}$

și din $p_3 l_3 = p_1 l_1$ avem $p_3 = \dfrac{p_1 l_1}{l_3}$.

Înlocuim pe p_4 și p_3 și obținem:

$$\frac{p_1 l_1}{l_4} = \frac{p_1 l_1}{l_3} + \rho g l_2 \Rightarrow p_1 = \frac{\rho g l_2}{\dfrac{l_1}{l_4} - \dfrac{l_1}{l_3}}.$$

$$p_1 = \frac{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{(40 \cdot 10^{-2}/30 \cdot 10^{-2}) - (40 \cdot 10^{-2}/50 \cdot 10^{-2})} = 49\,980 \text{ N/m}^2.$$

2.1.22. Randamentul $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(273 + 150) - (273 + 15)}{273 + 150} = \frac{135}{423}.$$

Se obține sistemul:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{135}{423}, \quad Q_1 - Q_2 = 3{,}6 \cdot 10^6$$

(deoarece $Q_1 - Q_2 = L = 1$ kWh $= 1\,000 \cdot 3\,600$ J).

Rezolvarea sistemului dă

$$Q_1 = 1{,}13 \cdot 10^7 \text{ J}; \quad Q_2 = 7{,}7 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

2.1.23. 1. $pV = \dfrac{m}{M} RT_2$, $T_2 = \dfrac{pVM}{mR} = \dfrac{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 28}{7 \cdot 8{,}31} = 337$ K.

2. $\Delta P = (1 - \eta')P_c$, unde

$$\eta' = \eta_r \eta = 0{,}6 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}6 \frac{(266 + 273) - 337}{266 + 273} = 0{,}225,$$

$$\Delta P = (1 - \eta')P_c = \frac{(1 - 0{,}225) \cdot 31{,}4 \cdot 10^6 \cdot 100}{3\,600} = 6{,}76 \cdot 10^5 \text{ W}.$$

3. $\varepsilon = \dfrac{3}{2} \dfrac{R}{N} T_2 = \dfrac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 337}{2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 6{,}98 \cdot 10^{-21}$ J.

4. $L = p\left(V - \dfrac{1}{2} V\right) = \dfrac{1}{2} pV = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} = 350$ J.

2.1.24. 1. $T_A = t_A + 273 = 127 + 273 = 400$ K.

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} = \frac{p_C V_C}{T_C} = \frac{p_D V_D}{T_D}.$$

Rezultă $T_B = 800$ K, $T_C = 2\,000$ K, $T_D = 800$ K.

2. Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este dat de suprafața ciclului:

$$L = p_B(V_C - V_B) + \frac{1}{2}(p_C + p_D)(V_D - V_C) - \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) =$$

$$= 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}\left[12(0{,}25 - 0{,}1) + \frac{(12 + 2)(0{,}6 - 0{,}25)}{2} - \frac{(1 + 12)(0{,}6 - 0{,}1)}{2}\right] =$$

$$= 101{,}3 \frac{\text{J}}{\text{ciclu}}.$$

$$P = \frac{Ln}{60} = \frac{101{,}3 \cdot 720}{60} = 1\,215{,}6 \text{ W}.$$

3. $\eta = \dfrac{L}{Q_1}$

unde Q_1 este cantitatea de căldură degajată prin arderea combustibilului într-un ciclu

$$Q_1 = \frac{vq_c}{60\,n} = \frac{0.280 \cdot 10^{-3} \cdot 820 \cdot 4.6 \cdot 10^7}{60 \cdot 720} = 246 \text{ J}, \quad \eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{101.3}{246} = 0{,}4118.$$

4. Conform principiului I al termodinamicii, cantitatea de căldură preluată într-un ciclu de apă de răcire este

$$Q_2 = Q_1 - L = 246 - 101{,}3 = 144{,}7 \text{ J}.$$

Pentru 1 s:

$$\frac{n}{60} Q_2 = \rho Q_v c(t_2 - t_1),$$

$$Q_v = \frac{nQ_2}{60\,\rho c(t_2 - t_1)} = \frac{720 \cdot 144{,}7}{60 \cdot 1\,000 \cdot 4\,180 \cdot 45} = 9{,}23 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

2.1.25. 1. $p = n\dfrac{RT}{V} = (n_1 + n_2 + n_3)\dfrac{RT}{V}$,

unde $n_1 = \dfrac{10^{15}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 0{,}166 \cdot 10^{-8}$ moli, $n_2 = \dfrac{4 \cdot 10^{15}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 0{,}664 \cdot 10^{-8}$ moli,

$$n_3 = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-7}}{39} = 0{,}846 \cdot 10^{-8} \text{ moli}.$$

$$p = (0{,}166 + 0{,}664 + 0{,}846)10^{-8}\frac{8{,}31 \cdot 296}{5 \cdot 10^{-3}} = 8{,}24 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

2. Transformare izobară

$$\frac{V'}{T + \Delta T} = \frac{V}{T}, \quad V' = \frac{V(T + \Delta T)}{T} = \frac{5(296 + 100)}{296} = 6{,}68 \text{ l}$$

sau

$$V' = \frac{nR(T + \Delta T)}{p} = \frac{1{,}676 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 396}{8{,}24 \cdot 10^{-3}} = 6{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

3. $L = p(V' - V) = 8{,}24 \cdot 10^{-3}(6{,}68 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) = 1{,}38 \cdot 10^{-5}$ J.

4. $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$.

Din motive de omogenitate, dacă R se exprimă în $\frac{J}{mol \cdot grad}$, M trebuie luat în $\frac{kg}{mol}$.

$$O_2: \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 396}{0{,}032}} = 555 \frac{m}{s},$$

$$N_2: \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 396}{0{,}028}} = 593 \frac{m}{s},$$

$$Ar: \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 396}{0{,}039}} = 504 \frac{m}{s}.$$

2.1.26. 1. $P_u = \eta P_c = \eta \frac{Qc}{t} = \eta \frac{0{,}5\, mq}{t} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 10^7}{3\,600} = 10^5 W = 100\ kW.$

2. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, $T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta} = \frac{273 + 23}{1 - 0{,}6} = 740\ K.$

3. $pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = \frac{pVM}{RT} = \frac{1{,}5 \cdot 5 \cdot 28{,}9}{0{,}082 \cdot 296} = 8{,}9\ g.$

2.1.27. 1. Pentru un ciclu

$$L_1 = (p_1 - p_2) \frac{\pi d^2}{4} l = (10^6 - 10^4) \frac{3{,}14 \cdot 0{,}09}{4} \cdot 0{,}6 = 4{,}2 \cdot 10^4\ J.$$

$$P = \frac{nL_1}{60} = \frac{180 \cdot 4{,}2 \cdot 10^4}{60} = 1{,}26 \cdot 10^5 W.$$

2. $m = \rho \frac{\pi d^2 l}{4} \frac{n}{60} \tau = \frac{5{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}6 \cdot 180 \cdot 3\,600}{4 \cdot 60} = 2\,335\ kg.$

3. $Q_1 = mc(t_1 - t) + m\lambda,$

$$Q_1 = 2\,335 \cdot 1(179 - 46) + 2\,335 \cdot 483 = 1{,}485 \cdot 10^6\ kcal.$$

4. $Q_2 = m\lambda_2 = 2\,335 \cdot 565 = 1{,}319 \cdot 10^6\ kcal.$

5. $Q_2 = Mc(\theta_2 - \theta_1)$, $M = \frac{Q_2}{c(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{1{,}319 \cdot 10^6}{1(40 - 15)} = 5{,}27 \cdot 10^4\ kg.$

2.1.28. 1. Agregatul preia de la sursa rece

$$Q_2 = n[c_a(t_1 - t_0) + \lambda + C_g(t_0 - t_2)] \quad (1)$$

și transmite sursei calde

$$Q_1 = Q_2 + P\tau. \quad (2)$$

Din formula randamentului

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ se deduce } Q_1 = Q_2 \frac{T_1}{T_2}. \quad (3)$$

Eliminînd Q_1 între (2) și (3) rezultă

$$Q_2 \frac{T_1}{T_2} = Q_2 + P\tau.$$

Introducînd pentru Q_2 expresia (1) și izolînd m se obține:

$$m = \frac{T_2 P \tau}{(T_1 - T_2)[c_a(t_1 - t_0) + \lambda + c_g(t_0 - t_2)]}, \qquad (4)$$

$$m = \frac{263 \cdot 17\,700 \cdot 8 \cdot 3\,600}{(293 - 263)(4\,180 \cdot 20 + 330\,000 + 2\,040 \cdot 10)} = 10\,285 \text{ kg}.$$

2. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{293 - 263}{293} = 0{,}102.$

3. $P = \dfrac{U^2}{R}, \quad R = \dfrac{U^2}{P} = \dfrac{220^2}{17\,700} = 2{,}73\ \Omega.$

4. Din (4) se observă o proporționalitate între m și P:

$$m = KP = KUI.$$

O creștere de 10% necesită o creștere ΔI a curentului

$$m + \frac{m}{10} = KU(I + \Delta I) = KUI + KU\Delta I.$$

$$\frac{m}{10} = KU\Delta I = \frac{m}{I}\,\Delta I.$$

Urmează

$$\Delta I = \frac{1}{10}\,I = \frac{P}{10\,U} = \frac{1}{10} \cdot \frac{17\,700}{220} = 8{,}04 \text{ A}.$$

2.1.29. 1. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad T_2 = T_1 - \eta T_1 = T_1(1 - \eta) = 433(1 - 0{,}21) = 342$ K.

2. $\eta_r = \dfrac{L}{Q} = \dfrac{4}{7}\,\eta,$

unde L este lucrul mecanic produs într-o oră, iar Q cantitatea de căldură consumată în acest timp.

$$\frac{Pt}{mq} = \frac{4}{7}\,\eta, \quad m = \frac{7\,PT}{4\eta q} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 3\,600}{4 \cdot 0{,}21 \cdot 3 \cdot 10^7} = 60 \text{ kg/h}.$$

3. $P = F \cdot v = (mg \sin \alpha + \mu\, mg \cos \alpha)v,$

$$v = \frac{P}{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Deoarece α este foarte mic, $\sin \alpha \approx \alpha$ și $\cos \alpha \approx 1$:

$$v = \frac{6 \cdot 10^4}{10^5 \cdot 9{,}8(0{,}0102 + 0{,}0102)} = 3 \text{ m/s}.$$

2.1.30. 1. La un proces izobar

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_2}{T_2}, \quad T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1};$$

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4}\,h = \frac{3{,}14 \cdot 100}{4} \cdot 15 = 1\,177{,}5 \text{ cm}^3, \quad V_2 = V_1 + \frac{\pi d^2}{4}\,h_1;$$

$$\frac{\pi d^2}{4}\,h_1 = \frac{3{,}14 \cdot 100}{4} \cdot 3 = 235{,}5 \text{ cm}^3, \quad V_2 = 1\,177{,}5 + 235{,}5 = 1\,413 \text{ cm}^3,$$

$$T_2 = \frac{1\,413 + (273 + 23)}{1\,177{,}5} = 355{,}2 \text{ K}.$$

2. $L = p(V_2 - V_1) = p\dfrac{\pi d^2}{4}\ h_1,$

$$p = p_0 + \frac{G}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1{,}013 \cdot 10^5 + \frac{300}{\frac{3{,}14 \cdot 100}{4} \cdot 10^{-4}} = 1{,}395 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

$$L = 1{,}395 \cdot 10^5 \cdot 2{,}355 \cdot 10^{-4} = 32{,}78 \text{ J}.$$

3. $Q = mc_p\ (T_2 - T_1),\ m = \dfrac{pV_1M}{RT_1} = \dfrac{1{,}395 \cdot 10^5 \cdot 1{,}1775 \cdot 10^{-3} \cdot 28{,}9}{8{,}31 \cdot 296} = 1{,}93 \text{ g}.$

$$Q = 1{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot 1\,000 \cdot (355{,}2 - 296) = 113{,}203 \text{ J}.$$

4. $Q = \eta Q_c = \eta xq,$

$$x = \frac{Q}{\eta q} = \frac{113{,}203}{0{,}6 \cdot 4{,}2 \cdot 10^7} = 4{,}48 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

2.1.31. 1. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{(273 + 400) - (273 + 23)}{(273 + 400)} = 0{,}56.$

2. $\eta = \dfrac{L}{Q_1} = \dfrac{Pt}{Q_1},\ P = \dfrac{\eta Q_1}{t} = \dfrac{0{,}56 \cdot 6 \cdot 10^5}{60} = 5\,600 \text{ W}.$

3. $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$

$$Q_2 = (1 - \eta)\ Q_1 = (1 - 0{,}56) \cdot 6 \cdot 10^5 = 2{,}64 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{min}}.$$

4. $P' = \eta' P = 0{,}715 \cdot 5\,600 = 4\,000 \text{ W}.$

5. $P' = F \cdot v = \mu m \cdot g \cdot v,\ v = 36 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \dfrac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}.$

$$\mu = \frac{P'}{mgv} = \frac{4\,000}{400 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 0{,}102.$$

6. O fracțiune din greutate va funcționa ca forța centripetă

$$F = mg - \frac{mv^2}{R} = 400 \cdot 9{,}8 - \frac{400 \cdot 100}{50} = 3\,120 \text{ N}.$$

2.1.32. 1. $L = p(V_g - V_l) \approx pV_g = RT$

(procesul este izobar și volumul specific al lichidului este neglijabil față de cel al vaporilor).

$$L = RT = 8{,}314 \cdot 373 = 3\,101 \text{ J}.$$

2. $\Delta U = Q - L = 2\,260\,000 \cdot 0{,}018 - 3\,101 = 37\,579 \text{ J}.$

2.1.33. 1. $m_1c_1\ (0 - t_1) + m_1\lambda_1 + m_1c(t - 0) = m_2c(100 - t) + m_2\lambda_2.$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c(100 - t) + \lambda_2}{c_1(0 - t_1) + \lambda_1 + ct} = \frac{4\,180 \cdot 60 + 2{,}26 \cdot 10^6}{2\,040 \cdot 10 + 3{,}3 \cdot 10^5 + 4\,180 \cdot 40} = 4{,}85.$$

2. $\Delta Q_u = \eta Dzq = 0{,}5 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 60 \cdot 5 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^5 \text{ J}.$

$$m = \frac{Q_u}{c\Delta t} = \frac{3 \cdot 10^5}{4\,180 \cdot 35{,}8} = 2 \text{ kg}.$$

3. $pV = \frac{mRT}{M}$, $D = \frac{m}{\text{timp}}$, $D' = \frac{V}{\text{timp}}$, $pD' = \frac{DRT}{M}$,

$$D' = \frac{DRT}{pM} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300}{1{,}1 \cdot 10^5 \cdot 16} = 2{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

4. $Q' = m'[c(100 - t) + \lambda_2 + c_2(t' - 100)] = 1[4\,180 \cdot 60 + 2{,}26 \cdot 10^6 + 1\,860 \cdot 20] =$
$= 2\,548\,000$ J.

2.1.34. 1. $P = F \cdot v$, unde

$$F = G_t + \mu G_n = M_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 2\,000 \cdot 10 \left(0{,}5 + 0{,}2 \frac{1{,}73}{2}\right) = 13\,460 \text{ N}.$$

$$P = 13\,460 \cdot 5{,}5 = 74{,}03 \text{ kW}.$$

2. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{1\,073 - 303}{1\,073} = 0{,}717$,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Pt}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{Pt}{\eta} = \frac{74{,}03 \cdot 3}{0{,}717} = 309{,}75 \text{ kJ}.$$

$$Q_2 = Q_1 - Pt = 309{,}75 - 74{,}03 \cdot 3 = 87{,}66 \text{ kJ}.$$

3. a) $P = \frac{\eta Q_1'}{t'} =$ unde Q_1' este cantitatea de căldură primită în timpul t' în care consumă cantitatea de combustibil m

$$t' = \frac{\eta Q_1'}{P} = \frac{\eta mq}{P} = \frac{0{,}717 \cdot 20{,}64 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^6}{74{,}03 \cdot 10^3} = 4{,}128 \text{ s},$$

$$s = v \cdot t = 5{,}5 \cdot 4{,}128 = 27{,}5 \text{ m}.$$

b) $\eta m \cdot q = F \cdot s$,

$$s = \frac{\eta mq}{F} = \frac{0{,}717 \cdot 20{,}64 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^6}{13\,460} = 27{,}5 \text{ m}.$$

4. $p \cdot V = \frac{mRT}{M}$, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{1{,}5 \cdot 28}{0{,}082 \cdot 303} = 1{,}7$ g/l.

5. $\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}$. Se notează:

$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_1$ alungirea relativă în mișcarea uniformă,

$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_2$ alungirea relativă în mișcarea accelerată,

$$\frac{(\Delta l/l)_2}{(\Delta l/l)_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{F + ma}{F} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + ma}{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 1{,}2;$$

$$a = 0{,}2\, g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0{,}2 \cdot 10 \left(0{,}5 + 0{,}2 \frac{1{,}73}{2}\right) = 1{,}346 \text{ m/s}^2.$$

2.1.35. 1. $p = p_0 + \frac{mg}{S} = 10^5 + \frac{5 \cdot 9{,}8}{4{,}9 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^5$ N/m^2,

$$pV = ph_0 S = nRT,$$

$$h_0 = \frac{nRT}{pS} = \frac{0{,}01 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-4}} = 0{,}2543 \text{ m}.$$

2. Se disting două faze:

a) Temperatura crește de la θ_0 până la 100° C și h crește de la h_0 până la o valoare h'.

b) Temperatura rămîne constantă (100° C, căldura preluată fiind utilizată pentru vaporizarea apei) și h rămîne constant (h').

a) $Dc(\theta_1 - \theta_2) = (m_a c_a + nMc_p)(\theta - \theta_0)$,

$$\theta = \theta_0 + \frac{Dc(\theta_1 - \theta_2)}{m_a c_a + nMc_p} \cdot t \approx \theta_0 + \frac{Dc(\theta_1 - \theta_2)}{m_a c_a}$$

(căldura preluată de gaz este neglijabilă față de cea luată de apă)

$$\theta = 27 + \frac{0{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 50}{10 \cdot 480} \cdot t = 27 + 0{,}1196\ t.$$

Transformarea gazului fiind izobară

$$h = h_0 \frac{T}{T_0} = 0{,}2543 \frac{273 + 27 + 0{,}1196\,t}{273 + 27} = (0.2543 + 1{,}014 \cdot 10^{-4}\ t)\text{m}.$$

Relația anterioară este valabilă până la momentul t' cînd temperatura a devenit 100°. Făcînd $\theta = 100°$ C rezultă;

$$t' = \frac{100 - 27}{0{,}1196} = 610{,}4\ \text{s}.$$

Se obține $h' = 0{,}3162$ m.

b) $h = 0{,}3162$ m.

3. $D_v \lambda = D \cdot c(\theta_1 - \theta_2)$, $D_v = \frac{Dc(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = \frac{0{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 50}{2{,}26 \cdot 10^6} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg/s.

4. $\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{RT_0}{N} = \frac{3 \cdot 8310 \cdot 300}{2 \cdot 6{,}025 \cdot 10^{26}} = 6{,}207 \cdot 10^{-21}$ J.

2.1.36. 1. $(m \cdot c + M_1 c_1)(\theta_1 - \theta) = M_2 c_2(\theta - \theta_2) + M_2 \lambda_2$;

$$M_2 = \frac{(mc + M_1 c_1)(\theta_1 - \theta)}{c_2(\theta_2 - \theta) + \lambda_2} = \frac{(2 \cdot 380 + 5 \cdot 4\,180)20}{2040 \cdot 10 + 330\,000} = 1{,}23\ \text{kg}.$$

2. $Q = [mc(M_1 + M_2)c](\theta_2 - \theta) + M_2 \lambda_1 = [2 \cdot 380 + (5 + 1{,}23)4\,180] \cdot 100 +$
$+ 1{,}23 \cdot 2{,}26 \cdot 10^6 = 5{,}46 \cdot 10^6$ J.

3. Presiunea de saturație 1 atm corespunde temperaturii 100° C.
Din legea gazelor perfecte

$$V = \frac{M_2 RT}{pM} = \frac{1{,}23 \cdot 8310 \cdot 373}{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 18} = 2{,}09\ \text{m}^3.$$

4. $L = p\Delta V = p(2\ V - V) = pV = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 2{,}09 = 2{,}117 \cdot 10^5$ J.

2.1.37. 1. $Q_1 = 1$ kcal $= 4\,185$ J, $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{1\,676}{4\,185} = 0{,}4$.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = T_1(1 - \eta) = 473(1 - 0{,}4) = 284\ \text{K}.$$

2. $P_c = \frac{mq}{t} = \frac{5 \cdot 48 \cdot 10^6}{3\,600} = 6{,}67 \cdot 10^4$ W, $P_u = \eta P_c = 0{,}4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^4 = 26{,}7$ kW

3. $pV = \frac{mRT}{M}$, $V = \frac{mRT}{pM} = \frac{56 \cdot 8{,}31 \cdot 473}{2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 28} = 3{,}88 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3 = 38{,}8\ \text{dm}^3$.

2.1.38. 1. $p = \frac{mRT}{MV} = \frac{\rho RT_A}{M} = \frac{1{,}22 \cdot 0{,}082\ (273 + 47)}{32} = 1$ atm

sau

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{32}{1{,}22} = 26{,}2 \text{ dm}^3, \quad p = \frac{RT_A}{V} = \frac{0{,}082 \cdot 320}{26{,}2} = 1 \text{ atm}.$$

2. $L = p(V_B - V_A) = pV_B - pV_A = RT_B - RT_A;$

$$T_B = \frac{L}{R} + T_A = \frac{1\,662}{8{,}31} + 320 = 520 \text{ K}.$$

3. $Q_{AB} = Mc_p(T_B - T_A) = 0{,}032 \cdot 910 \cdot 200 = 5\,824$ J.

$$Q = \frac{Q_{AB}}{\eta} = m \cdot q, \quad q = 13\,200 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = 13\,200 \cdot 4{,}185 = 5{,}52 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

$$m = \frac{Q_{AB}}{\eta q} = \frac{5\,824}{0{,}75 \cdot 5{,}52 \cdot 10^7} =$$

$$= 1{,}40 \cdot 10^{-4} \text{ kg}.$$

$$V = \frac{mRT}{pM'} = \frac{1{,}40 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}082 \cdot 290}{1{,}2 \cdot 16 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 0{,}175 \text{ dm}^3.$$

4. $U_B - U_A = Q_{AB} - L, \ U_B - U_A =$

$$= 5\,824 - 1\,662 = 4\,162 \text{ J}.$$

5. Ciclul $ABCA$ este reprezentat în figura 2.18.

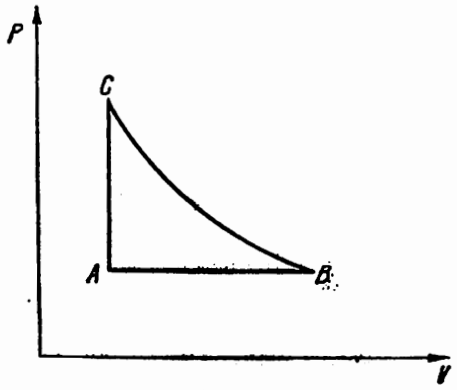


Fig. 2.18

2.1.39. Picătura se desprinde în momentul în care greutatea este egală cu forța datorită tensiunii superficiale:

$$m \cdot g = 2\pi r\sigma, \quad M = n \cdot m = n \frac{2\pi r\sigma}{g};$$

$$M = \frac{1}{9{,}8} 15 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 72{,}8 \cdot 10^{-3} = 8{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0{,}89 \text{ mg}.$$

2.1.40. Din cauza forțelor de adeziune, apa se ridică între cele două plăci. La echilibru, greutatea stratului de apă este compensată de forța datorită tensiunii superficiale. Pentru o lungime oarecare l a stratului de apă cu înălțimea h:

$$ldh\rho g = 2l\sigma;$$

$$h = \frac{2\sigma}{d\rho g} = \frac{2 \cdot 72{,}8 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} = 10{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 10{,}6 \text{ mm}.$$

2.1.41. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300} = 0{,}64 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad \rho_a = \frac{pM}{R} \cdot \frac{1}{T} =$

$$= \frac{10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{8{,}31} \cdot \frac{1}{T} = \frac{192{,}54}{T} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

$$\rho_b = \frac{pM}{RT}, \quad \rho_b = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot p}{8{,}31 \cdot 300} = 6{,}4 \cdot 10^{-6}\, p \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

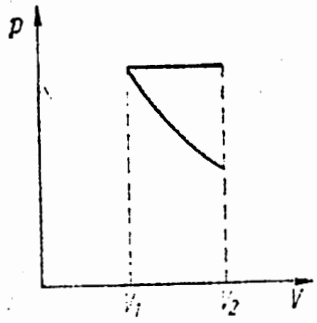


Fig. 2.19

2.1.42. În starea inițială:

$$V_1 = \frac{mRT_1}{Mp_1} = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 310}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5} = 3{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

În stările 2 a și 2 b:

$$p_{2a} = p_1 \text{ și } T_{2a} = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 2 \cdot 310 = 620 \text{ K}.$$

$$T_{2b} = T_1 \text{ și } p_{2b} = \frac{V_1}{V_2} p_1 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 = 0{,}6 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Transformarea 1 — 2 a:

$$U = mc_v(T_{2a} - T_1) = 0{,}048 \cdot 650{,}3 \cdot (620 - 310) = 9\,676 \text{ J}.$$

$$Q = mc_p(T_{2a} - T_1) = 0{,}048 \cdot 910(620 - 310) = 13\,540 \text{ J}.$$

$$L = -p(V_{2a} - V_1) = -1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}22 \cdot 10^{-3} = -3\,864 \text{ J},$$

sau $L = -nR(T_{2a} - T_1) = \frac{48 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31(620 - 310) = -3\,864$ J,

sau $L = \Delta U - Q = 9\,676 - 13\,540 = -3\,864$ J.

Transformarea 1 — 2 b (izotermă),

$$L = -nRT \ln \frac{V_{2b}}{V_1} = -\frac{48 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 310 \cdot 2{,}303 \log 2 = -2\,678{,}9 \text{ J}.$$

$$Q = -L = 2\,678{,}9 \text{ J}.$$

Observație. Lucrul mecanic este negativ, deoarece gazul se destinde, deci nu primește, ci efectuează lucru mecanic.

2.1.43. Starea 2 a: $T_{2a} = \frac{p_{2a}}{p_1} T = \frac{1}{2} \cdot 600 = 300$ K.

Starea 2 b: $V_{2b} = \frac{p_1}{p_{2b}} V_1 = 2 \cdot 3{,}116 \cdot 10^{-2} = 6{,}232 \cdot 10^{-2}$ m³.

Masa gazului: $m = \frac{Mp_1V_1}{RT_1} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 3{,}116 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 600} = 0{,}048$ kg.

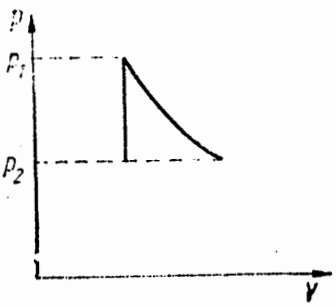


Fig. 2.20

Transformarea 1 — 2 a (izocoră, $L = 0$):

$$\Delta U = mc_v(T_{2a} - T_1) =$$

$$= 0{,}048 \cdot 650{,}3 \cdot (300 - 600) = -9\,364{,}32 \text{ J};$$

$Q = \Delta U = -9\,364{,}32$ J (sistemul se răcește).

Transformarea 1 — 2 b (izotermă, $\Delta U = 0$):

$$L = -nRT \ln \frac{V_{2b}}{V_1} = -1{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 600 \cdot 2{,}303 \log 2 =$$

$$= -5\,185 \text{ J};$$

$Q = -L = 5\,185$ J (sistemul primește căldură, $Q > 0$ și efectuează lucru mecanic, $L < 0$).

2.1.44. Valoarea minimă, x_{min}: sistemul conține apă la 0° C

$$M\lambda_{top} = x_{min}\lambda_{vap} + x_{min}ct,$$

$$\frac{x_{min}}{M} = \frac{\lambda_{top}}{\lambda_{vap} + ct} = \frac{330\,000}{2\,260\,000 + 4\,180 \cdot 100} = 0{,}123.$$

Valoarea maximă, x_{MAX}: sistemul conține apă la 100° C

$$M\lambda_{top} + M\,ct = x_{MAX}\lambda_{vap}$$

$$\frac{x_{MAX}}{M} = \frac{\lambda_{top} + ct}{\lambda_{vap}} = \frac{330\,000 + 4\,180 \cdot 100}{2\,260\,000} = 0{,}331.$$

2.1.45. Masa inițială m a gazului se deduce scriind legea gazelor perfecte în cele două stări

$$p_1V = \frac{m}{M}RT \text{ și } p_2V = \frac{m - \Delta m}{M}RT.$$

Prin împărțire

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \text{ unde masa gazului evacuat } \Delta m = m' - m'' = 0{,}001 \text{ kg.}$$

Rezultă $\frac{2 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^5} = \frac{m}{m - 0{,}001} \Rightarrow m = 0{,}004$ kg.

M se obține din:

$$M = \frac{mRT}{p_1V} = \frac{0{,}004 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0249\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}.$$

2.1.46. După încălzirea izobară, aerul ocupă volumul V'

$$V' = V\frac{T_2}{T_1} = 50\,\frac{298}{283} = 52{,}65 \text{ m}^3.$$

Masa de aer Δm corespunde creșterii volumului

$$\Delta V = V' - V = 2{,}65 \text{ m}^3.$$

Din legea gazelor perfecte, la temperatura T_2, rezultă

$$\Delta m = \frac{Mp\,\Delta V}{RT_2} = \frac{28{,}9 \cdot 10^3 \cdot 2{,}65}{8{,}31 \cdot 298} = 3{,}092 \text{ kg.}$$

2.1.47. n' este produsul dintre numărul lui Avogadro N și numărul de moli n, care se calculează utilizînd legea gazelor perfecte

$$n' = Nn = N\frac{pV}{RT} = 6{,}025 \cdot 10^{23}\,\frac{8{,}31 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{8{,}31 \cdot 320} = 1{,}883 \cdot 10^{21}.$$

Variantă. n' este produsul n_0V, unde n_0, numărul de molecule din unitatea de volum, rezultă din $p = n_0kT$. Deci

$$n' = n_0V = \frac{p}{kT}V = \frac{p}{\frac{R}{N}T}V = \frac{pN}{RT}V = 1{,}883 \cdot 10^{21}.$$

2.1.48. Într-un proces reversibil (și ciclul Carnot, prin definiție, este format din procese reversibile), variația de entropie este:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}.$$

1. În procesul izoterm reversibil la temperatura T_1

$$Q = -L = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1} = 8{,}31 \cdot 2{,}303 \log 2 = 13{,}265 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

2. În transformarea reversibilă adiabatică, $Q = 0$ și deci

$$\Delta S = 0.$$

3. Într-un ciclu

$$\Delta S = 0,$$

entropia fiind funcție de stare.

2.1.49. 1. $m = \rho D \tau$ unde D, debitul, este $D = Sv$.

Viteza de curgere v este $v = \sqrt{2gh}$; urmează

$$m = \rho S \sqrt{2gh} = 1\,000 \cdot 10^{-4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}275 \cdot 12} = 6 \text{ kg}.$$

2. Încălzirea făcîndu-se sub presiunea de 1 atm, temperatura de fierbere este $t = 100°$ C.

$$Q = mc(t - t_1) + \frac{m}{100} \lambda = 6 \cdot 4\,180 \cdot 80 + \frac{6}{100} \cdot 2\,260\,000 = 2\,142\,000 \text{ J}.$$

3. Prin destindere, vaporii devin nesaturați; aplicînd legea gazelor perfecte

$$V = \frac{\frac{m}{100} RT}{Mp} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}082 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25} = [illegible] \text{ dm}^3.$$

2.1.50. Căldura q degajată de 1 min este

$$q = RI^2\tau = 20 \cdot 5^2 \cdot 60 = 3\,000 \frac{\text{J}}{\text{min}}.$$

Primul proces, încălzirea gheții pînă la 0°C, necesită căldura Q_1

$$Q_1 = mc_1(0 - t_0) = 0{,}2 \cdot 2\,040 \cdot 10 = 4\,080 \text{ J}$$

și se realizează în timpul τ_1

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{q} = \frac{4\,080}{3\,000} = 1{,}36 \text{ min}.$$

În grafic (fig. 2.21), procesul este redat printr-o dreaptă cu panta pozitivă, conform relației

$$mc_1(t - t_0) = q\tau, \text{ adică}$$

$$t = \frac{q}{mc_1} \tau + t_0 = \frac{3\,000}{0{,}2 \cdot 2\,040} \tau - 10 = 7{,}35 \tau - 10.$$

Al doilea proces, topirea gheții, necesită căldura Q_2 și durează un timp τ_2

$$Q_2 = m\lambda_{top} = 0{,}2 \cdot 330\,000 = 66\,000 \text{ J};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{q} = \frac{66\,000}{3\,000} = 22 \text{ min}.$$

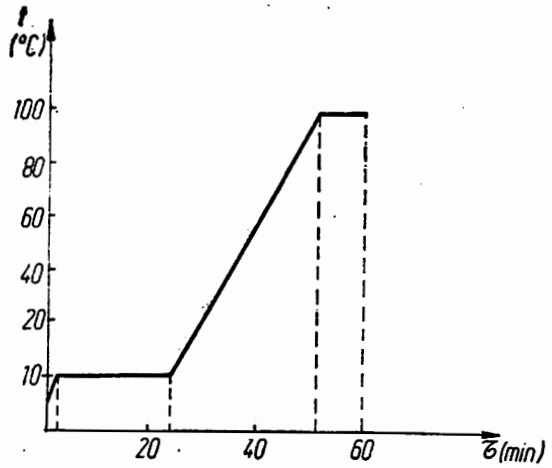


Fig. 2.21

În acest timp, temperatura prezintă un palier procesul fiind izoterm.

Procesul următor, încălzirea apei până la $t_1 = 100°$ C, necesită căldura Q_3 și se realizează în timpul τ_3

$$Q_3 = mc(t_1 - 0) = 0{,}2 \times 4\,180 \times 100 = 83\,600 \text{ J}.$$

$$\tau_3 = \frac{83\,600}{3\,000} = 27{,}87 \text{ min}.$$

În grafic apare o dreaptă, cu panta pozitivă, conform relației:

$$t = \frac{q}{mc}\tau = \frac{3\,000}{0{,}2 \cdot 4\,180}\tau = 3{,}59\ \tau.$$

Ultimul proces durează

$$\tau_4 = 60 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = 8{,}77 \text{ min}.$$

În acest timp se degajă o cantitate de căldură

$$Q_4 = q\ \tau_4 = 3\,000 \cdot 8{,}77 = 26\,310 \text{ J},$$

care vaporizează o cantitate de apă

$$x = \frac{Q_4}{\lambda_{vap}} = \frac{26\,310}{2\,260\,000} = 0{,}0116 \text{ kg}.$$

În grafic apare un nou palier.

2.2.1. 1. $\alpha = 8{,}55 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}. $\gamma = 2{,}565 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.
2. $R = 1{,}00171$. 3. $\gamma_{Hg} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}.

2.2.2. 1. $m_1 = 0{,}9823$ kg. 2. $m_2 = 0{,}9852$ kg.

2.2.3. 1. $t = 90{,}1$ °C. 2. $\gamma = 1{,}14 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}.

2.2.4. $F = 28\,000$ N.

2.2.5. $h = 7\,823$ m.

2.2.6. 1. $\theta = 27{,}11$ °C. 2. $x = 0{,}0475$ kg.

2.2.7. 1. $t' = 8{,}8$ °C. 2. $x = 0{,}0158$ kg.
3. $M = 1{,}21$ kg.

2.2.8. 1. $\Delta m = 0{,}344$ g. 2. $Q = 1\,720$ cal.
3. $\Delta l = 2{,}6 \cdot 10^{-6}$ m.

2.2.9. a) $\Delta t = \dfrac{mc\theta_0 + D\tau c_1\theta_1}{mc + D\tau c_1}$.

b) $\Delta t = \theta_0 + \dfrac{D\tau c_1(\theta_1 - \theta_2)}{mc}$.

2.2.10. 1. $x = 1\,350$ t. 2. $m = 5{,}9$ kg.
3. $P = 5\,780$ kW.

2.2.11. a) $\theta_a = 22{,}32$ °C. b) $\theta_b = 22{,}23$ °C. c) $\theta_c = 21{,}87$ °C.

2.2.12. 1. $Q = 513\,400$ J, 2. $\tau = 972{,}3$ s,
3. $R_s = 0{,}1\ \Omega$.

2.2.13. $T = 572{,}6$ K.

2.2.14. $p_1 = 1$ atm. $V_1 = 82{,}8$ dm³. $T_1 = 400$ K.
$p_2 = 0{,}1$ atm. $V_2 = 328$ dm³. $T_2 = 400$ K.
$p_3 = 0{,}082$ atm. $V_3 = 328$ dm³. $T_3 = 328$ K.
$p_4 = 0{,}082$ atm. $V_4 = 273$ dm³. $T_4 = 273$ K.

2.2.15. $t = 79{,}8$ °C. $p = 1{,}23$ atm.

2.2.16. $\Delta V = 229{,}1$ l.

2.2.17. 1. $Q_l = 2\,640$ J. 2. $Q = 290\,784$ J.
3. $x = 12{,}4$ g. 4. $V = 0{,}1836$ m³.
5. $V' = 0{,}2082$ m³.

2.2.18. $P = 1{,}1275 \cdot 10^5 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$. $\Delta h = 9{,}56$ cm.

2.2.19. $H = 0{,}98$ atm.

2.2.20. $p = 0{,}93$ atm.

2.2.21. 1. $p' = 1{,}61$ atm. 2. a. $n_A = 0{,}0416$ moli.
2b. $n_B = 0{,}0832$ moli. 3. $x = 0$.

2.2.22. $p = 0{,}95$ atm. $\dfrac{p}{\rho} = \text{constant}$.

2.2.23. $p_1' = 47{,}26$ atm. $p_2' = 114{,}24$ atm.
$p_3' = 82{,}31$ atm.

2.2.24. 1. $u = 59{,}25\%$. 2. $u' = 63{,}85\%$.
3. $\Delta m = 90{,}9$ g.

2.2.25. 1. $V_0 = 11{,}2$. 2. $V_A = 5{,}6$.
3. $T_B = 1\,365$ K. 4. $L = 4\,538$ J.

2.2.26. 1. $h = 0{,}831$ m. 2. $L = 415{,}5$ J.
3. $P = 2{,}53 \cdot 10^5 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$.
4a. $n_A = 0{,}5$. 4b. $n_B = 0{,}361$.

2.2.27. 1. $V_1 = 6{,}23 \cdot 10^{-2}$ m³. 2a. $T_2 = 900$ K.
2b. $L = 4\,990$ J. 3. $V_3 = 37{,}38 \cdot 10^{-3}$ m³.
4. $m = 0$.

2.2.28. 1. $n = 2{,}083 \cdot 10^{23}$. 2. $t = 17{,}28$ °C.
3. $s = 0{,}248$ m. 4. $X = \frac{0{,}010(T' - T)}{T'}$ kg.

2.2.29. 1. $t = 25$ °C. 2. $t_2 = 148$ °C.
3. $Q = 2\,592$ cal. 4. $l_0 = 3$ cm.
5. $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.

2.2.30. 1. $\Delta m = 0{,}593$ g. 2. $T = 424{,}5$ K.

2.2.31. 1. $\rho = 8{,}44 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. 2. $V = 1\,009$ m^3.
3. $n = 2{,}57 \cdot 10^{28}$.

2.2.32. 1. $l' = 0{,}475$ m. 2. $T_3 = 363{,}8$ K.
3. $\Delta l = 3{,}63 \cdot 10^{-3}$ m.

2.2.33. 1. $t = 708{,}8$ °C. 2. $\Delta V = 2{,}211 \cdot 10^{-6}$ m^3.
3. $M = 15{,}95$ kg. 4. $pf = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

2.2.34. 1. $m_2 = 3{,}04$ g. 2. $t_3 \approx 25$ °C.
3. $p_2 = 9{,}43$ atm. 4. $Q = 2{,}46 \cdot 10^6$ cal.

2.2.35. 1. $m = 0{,}1$ kg. 2. $V = 169{,}8$ dm^3.
3. $D = 1 \frac{\text{g}}{\text{s}}$. 4. $n = 3{,}344 \cdot 10^{24}$.
5. $\varepsilon = 7{,}7 \cdot 10^{-21}$ J.

2.2.36. 1. $t = 15$ °C. 2. $Q = 1\,312{,}5$ kcal.
3. $x = 0{,}025$ kg. 4. $V = 161$ dm^3.

2.2.37. 1. $Q = 0{,}64$ kcal. 2. $Q' = 697{,}60$ kcal.
3. $x = 12{,}45$ g. 4. $V = 183$ dm^3.

2.2.38. 1. $\theta = 45$ °C. 2. $Q = 321\,300$ cal.
3. $x = 76{,}5$ g. 4. $V = 6{,}96$ m^3.

2.2.39. 1a. $L_1 = 6 \cdot 10^3$ J. 1b. $Q_1 = 3{,}6 \cdot 10^4$ J.
2a. $L_2 = 2 \cdot 10^3$ J. 2b. $Q_2 = 3{,}2 \cdot 10^4$ J.
3a. $L_3 = 4 \cdot 10^3$ J. 3b. $Q_3 = 3{,}4 \cdot 10^4$ J.

2.2.40. 1. $V = 3{,}16$ cm^3. 2. $n_0 = 2{,}62 \cdot 10^{13}$ cm^{-3}.
3a. $p_1 = 7{,}37 \cdot 10^{-4}$ torr. 3b. $p_2 = 2{,}63 \cdot 10^{-4}$ torr.

2.2.41. 1. $m = 34{,}6$ g. 2a. $T_2 = 450$ K.
2b. $T_3 = 900$ K. 2c. $T_4 = 600$ K.
3. $L_{12} = 0$. $L_{23} = 4\,500$ J.
$L_{34} = 0$. $L_{41} = -3\,000$ J.
$Q_{12} = 3\,753$ J. $Q_{23} = 15\,726$ J.
$Q_{34} = -7\,506$ J. $Q_{41} = -10\,480$ J.
4a. $L = 1\,500$ J. 4b. $Q = 19\,479$ K.
5a. $\eta = 7{,}7\%$. 5b. $\eta = 66{,}6\%$.

2.2.42. 1. $L = 831$ J. 2. $x = 0{,}25$ mol.

2.2.43. 1. $\eta = 0{,}093$. 2a. $Q_1 = 3{,}97 \cdot 10^5$ J. 2b. $Q_2 = 3{,}6 \cdot 10^5$ J.
2. $L = 2\,659{,}2$ J. 3. $\Delta U = 6\,659{,}2$ J.

2.2.44. 1. $Q = 9\,318{,}4$ J. $V = 3\,349$ dm³.

2.2.45. $T = 408{,}45$ K.

2.2.46. $Q = 12\,500$ J.

2.2.47. 1. $p_A = 8{,}2$ atm; $p_B = 4{,}1$ atm;
$p_C = 4{,}1$ atm; $V_C = 1\ l$; $T_C = 200$ K.
2. $L_{AB} = 576{,}1$ J; $L_{BC} = -415{,}5$ J; $L_{CA} = 0$;
$Q_{AB} = 576{,}1$ J. $Q_{BC} = -1\,454{,}25$ J. $Q_{CA} = 1\,038{,}75$ J.
3. $L = 160{,}6$ J. 5. $\eta = 50\%$
4. $\eta' = 9{,}9\%$.

2.2.48. $L = 1\,000$ J. $\eta' = 8{,}38\%$.

2.2.49. $V = 4$ cm³.

2.2.50. 1. $p' = p\left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$, 2. $L = \frac{R\Delta U}{C_v}$.

2.2.51. $L = 2\,584{,}4$ J.

2.2.52. 1. $x = 36{,}7$ kg. 2. $I = 17{,}3$ A.
3. $m = 615$ kg.

2.2.53. 1. $P_u = 10{,}45$ kW. 2. $V_2 = 5{,}75 \cdot 10^{-3}$ m³.
3. $Q = 2\,190$ J.

2.2.54. 1. $t_0 = 9$ °C. 2. $L = 2\,090$ J.
3. $h = 2{,}13$ m. 4. $v = 3{,}7$ m/s.

2.2.55. 1. $Q = 4{,}695 \cdot 10^8$ J. 2. $D = 42{,}68$ kg/h.
3. $L = 5{,}121 \cdot 10^8$ J. 4. $p = 30$ N/cm².

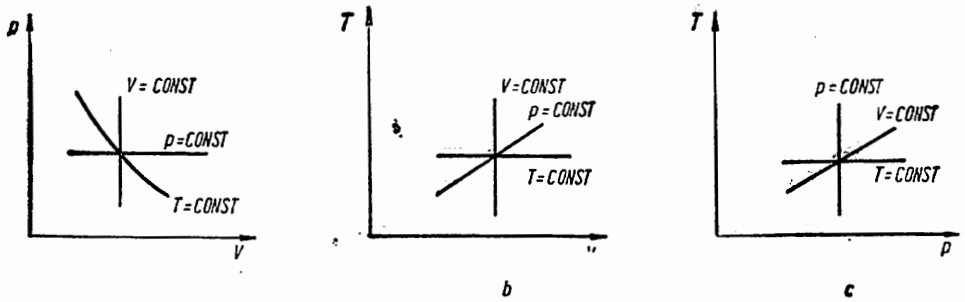
2.2.56. $x_1 = 3{,}561$ kg. $x_2 = 3{,}618$ kg.

2.2.57. $Q_1 = 165\,000$ J. $Q_2 = 4\,182\,000$ J.

2.2.58. $x = 2{,}05 \frac{mt}{|\theta|}$.

2.2.59. $\Delta U = 6\,5031$ J.

2.2.60. 1. Fig. 2.22, *a*; 2. Fig. 2.22, *b*; 3. Fig 2.22, *c*.



b *c*

Fig. 2.22

3. ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM

3.0. BREVIAR

3.0.1. ELECTROSTATICA

Atomii, particule constitutive ale tuturor corpurilor, sînt formaţi din electroni care se rotesc în jurul nucleului respectiv. Electronii au masa $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg şi sarcina electrică negativă $e = -e_0 = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. În stare normală, atomii sînt neutri din punct de vedere electric, adică sarcina electrică negativă a electronilor este compensată de sarcina electrică pozitivă a nucleului.

Dacă atomii unui corp pierd un număr n de electroni, corpul are un surplus de sarcină electrică pozitivă $q = ne_0$, adică devine încărcat cu sarcina electrică pozitivă q.

Deci apariţia unei sarcini electrice pozitive este legată de faptul că un număr oarecare de electroni trec de pe corpul respectiv pe alt corp. De aici rezultă că încărcarea cu sarcina electrică pozitivă $+q$ a unui corp este totdeauna însoţită de încărcarea cu sarcină electrică negativă $-q$ a unuia sau a mai multor corpuri. Aceste afirmaţii, verificate experimental, reflectă *legea conservării sarcinii electrice.*

Faptul că încărcarea corpurilor cu sarcină electrică pozitivă sau negativă se datoreşte trecerii electronilor de pe (sau pe) corpul respectiv, înseamnă că sarcina electrică q nu poate fi decît un număr întreg de sarcini electrice elementare e_0.

Analog cu noţiunea de punct material din mecanică se introduce noţiunea de *sarcină electrică punctiformă.* Dacă distanţa dintre corpurile încărcate cu sarcină electrică este mult mai mare decît dimensiunile corpurilor respective, acestea pot fi considerate ca puncte materiale, iar sarcinile electrice cu care sînt încărcate corpurile respective se numesc sarcini electrice punctiforme.

3.0.1.1. Legea lui Coulomb

În anul 1785, C o u l o m b a stabilit experimental legea de interacţiune între sarcinile electrice. Conform acestei legi, *forţa de interacţiune dintre două sarcini electrice punctiforme este direct proporţională cu produsul sarcinilor electrice respective, invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele şi este orientată pe dreapta ce trece prin cele două sarcini electrice.*

În SI, valoarea forței este:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r^2}, \tag{3.0.1}$$

unde q_1 și q_2 sînt sarcinile electrice punctiforme respective, iar r este distanța dintre ele, ε_0 este permitivitatea vidului egală cu $8{,}856 \cdot 10^{-12}$ F/m. Pentru calcule concrete, este utilă mărimea $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ m/F. Mărimea ε_r este permitivitatea relativă a mediului în care se află cele două sarcini electrice.

Dacă sarcinile electrice q_1 și q_2 se află în vid la distanța r între ele, atunci valoarea forței de interacțiune între ele va fi:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{3.0.2}$$

Din (3.0.1) și (3.0.2) rezultă că ε_r este raportul forțelor F_0 și F:

$$\varepsilon_r = F_0/F. \tag{3.0.3}$$

Deci permitivitatea relativă a mediului arată de cîte ori forța de interacțiune între sarcinile electrice punctiforme q_1 și q_2, aflate la distanța r, este mai mare în vid decît în mediul respectiv.

Ținînd seama de valoarea lui ε_0 putem scrie:

$$F_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{3.0.4}$$

Dacă $q_1 = q_2 = 1$ C și $r = 1$ m, $F_0 = 9 \cdot 10^9$ N. Deci în SI, unitatea de sarcină electrică un coulomb (1 C) este acea sarcină electrică care, aflată în vid la distanța $r = 1$ m de o altă sarcină electrică egală cu prima, între ele acționează forța $F_0 = 9 \cdot 10^9$ N.

3.0.1.2. **Intensitatea cîmpului electric**

Dacă o sarcină electrică de probă q se află în cîmpul electric creat de sarcina electrică Q, atunci într-un punct oarecare din spațiu, forța care acționează asupra sarcinii electrice q va depinde de valoarea acestei sarcini electrice, dar raportul

$$E = \frac{F}{q} \tag{3.0.5}$$

depinde numai de distanța dintre sarcinile electrice Q și q.

Mărimea E este *intensitatea cîmpului electric* al sarcinii electrice Q, fiind o mărime vectorială. Sensul vectorului $\vec{E}$ coincide cu sensul forței $\vec{F}$ care acționează, în punctul respectiv, asupra sarcinii electrice q pozitive. Unitatea pentru intensitatea cîmpului electric E în SI este

$$< E > = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Din relaţia (3.0.1) rezultă

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon_r r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{\varepsilon_r r^2}. \quad (3.0.6)$$

Dacă sarcina electrică q se află în cîmpul electric al mai multor sarcini electrice $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ (fig. 3.1), asupra ei va acţiona forţa:

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ unde } \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4. \quad (3.0.7)$$

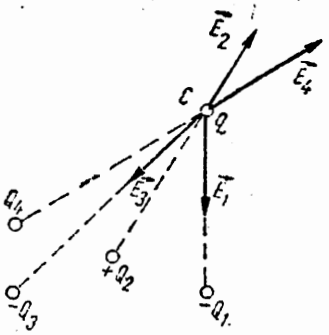


Fig. 3.1.

3.0.1.3. Potenţial electric. Diferenţa de potenţial. Lucrul mecanic necesar pentru deplasarea sarcinilor electrice în cîmp electric

Energia potenţială în cîmp gravitaţional a fost introdusă pe baza faptului că lucrul mecanic necesar pentru a ridica un corp de la înălţimea h_1 la înălţimea h_2 nu depinde de forma drumului între poziţia iniţială şi poziţia finală. Vom arăta că nici lucrul mecanic necesar pentru deplasarea unei sarcini electrice în cîmp electrostatic nu depinde de forma drumului între poziţia iniţială şi cea finală. Deci *atît cîmpul gravitaţional cît şi cîmpul electrostatic sînt cîmpuri conservative.* Aceasta, de fapt, este o proprietate generală pentru toate cîmpurile în cazul cărora forţa de interacţiune este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre corpurile ce interacţionează.

Considerăm deplasarea sarcinii electrice q în cîmpul electrostatic creat de două plăci paralele încărcate cu sarcinile electrice $+Q$ şi $-Q$ (fig. 3.2). Pentru deplasarea sarcinii electricce q pe drumurile AD, ABD şi ACD se cheltuieşte acelaşi lucru mecanic:

$$L_{AD} = qE \cdot AD \cos\varphi = qEd; \quad (3.0.8)$$

$$L_{ABD} = qE \cdot (AB\cos\varphi_1 + BD\cos\varphi_2) = qE \cdot (AG + GF) = qEd; \quad (3.0.9)$$

$$L_{ACD} = qE(0 + d) = qEd. \quad (3.0.10)$$

Potenţialul φ într-un punct oarecare din cîmpul electric este raportul dintre energia potenţială E_p a sarcinii electrice în punctul respectiv şi sarcina q:

$$\varphi = \frac{E_p}{q}. \quad (3.0.11)$$

Energia potenţială a unei sarcini electrice într-un punct din spaţiu este lucrul mecanic necesar pentru deplasarea sarcinii electrice din punctul respectiv la infinit, unde energia potenţială se consideră zero.

Deci potenţialul într-un punct dat este numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de sau împotriva

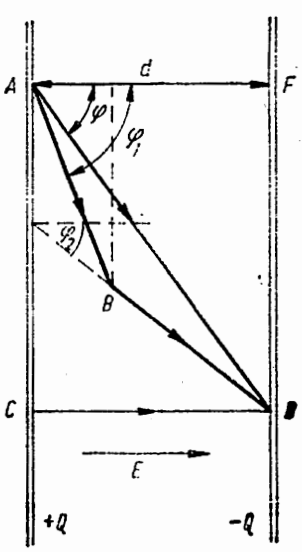


Fig. 3.2.

forțelor cîmpului electric, pentru deplasarea sarcinii electrice pozitive, egale cu un coulomb, din punctul respectiv la infinit:

$$\varphi = \frac{L}{q} \text{ sau } L = q\varphi. \tag{3.0.12}$$

Pentru deplasarea sarcinii electrice q între două puncte oarecare 1 și 2 din spațiu, lucrul mecanic va fi

$$L = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \tag{3.0.13}$$

unde U este diferența de potențial pentru punctele 1 și 2 din spațiu.

Unitatea pentru φ și U este

$$< \varphi > = < U > = 1\,\text{J/1C} = 1\text{V}. \tag{3.0.14}$$

Pentru deplasarea sarcinii electrice q din punctul A în punctul B (fig. 3.3) se va cheltui lucrul mecanic

$$L = F \cdot (r_2 - r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot (r_2 - r_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right), \tag{3.0.15}$$

unde am considerat $r^2 = r_u^2 = r_1 \cdot r_2$.

Dacă $r_2 = \infty$

$$L = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{r_1}, \quad \varphi_1 = \frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r_1}. \tag{3.0.16}$$

Dacă sarcina electrică q se deplasează pe distanța d într-un cîmp electric omogen $\vec{E}$ = constant, lucrul mecanic este:

$$L = qEd = q(\varphi_1 - \varphi_2); \; E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}. \tag{3.0.17}$$

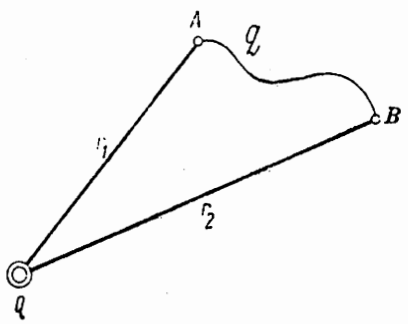


Fig.3.3.

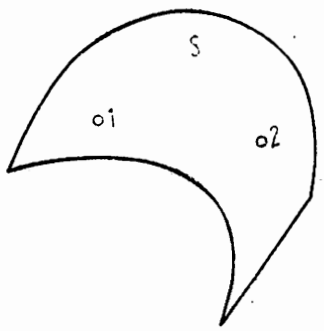


Fig.3.4.

Dacă pentru oricare din punctele 1 și 2 ale suprafeței S (fig. 3.4) avem:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{3.0.18}$$

spunem că suprafața S este *echipotențială*.

Suprafața unui conductor aflat în cîmp electric este echipotențială, ceea ce înseamnă că vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafața conductorului.

3.0.1.4. Capacitate electrică. Condensatoare

Capacitatea unui conductor este numeric egală cu sarcina electrică q, cu care trebuie încărcat conductorul respectiv, aflat inițial fără sarcină electrică, pentru ca potențialul acestuia să varieze cu un volt:

$$C = \frac{q}{\varphi}\ ;\ < C > = \frac{1\text{C}}{1\text{V}} = 1\ \text{F}. \tag{3.0.19}$$

Capacitatea unui conductor depinde de corpurile ce-l înconjură. Cînd se vorbește de capacitatea unui conductor se înțelege raportul dintre sarcina q și potențialul φ, față de pămînt.

Dacă conductorul A încărcat cu sarcina electrică q este înconjurat de alte conductoare (fig. 3.5) neelectrizate, acestea se electrizează prin influență și potențialul φ_A al conductorului A variază. Pentru a înlătura această influență este necesar să se localizeze cîmpul electric creat de conductor. În cazul în care capacitatea unui sistem de conductoare nu este influențată de conductoarele din afara acestuia, sistemul respectiv formează *un condensator.*

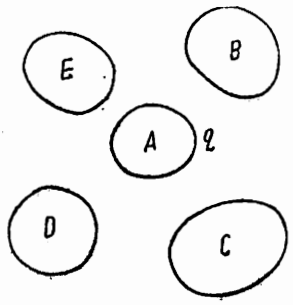


Fig. 3.5.

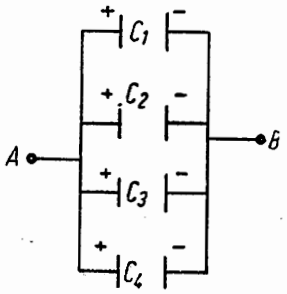


Fig. 3.6.

Condensatorul plan constă din două plăci metalice paralele și izolate, încărcate cu aceeași sarcină electrică q, dar de semne diferite. Capacitatea condensatorului plan este:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}. \tag{3.0.20}$$

unde S este suprafața unei armături, iar d este distanța dintre armăturile condensatorului. Pentru un condensator format din k plăci paralele aflate la aceeași distanță d și între care se află același dielectric, capacitatea este:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S(k-1)}{d}. \tag{3.0.21}$$

Dacă avem mai multe condensatoare legate în paralel (fig. 3.6), capacitatea totală este

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n, \tag{3.0.22}$$

iar dacă condensatoarele sînt legate în serie (fig. 3.7), atunci

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}, \tag{3.0.23}$$

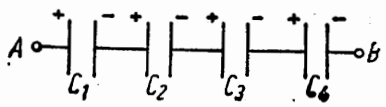


Fig. 3.7

Pentru încărcarea unui condensator se cheltuieşte energia

$$W = U_{mediu} \cdot q = \frac{q \cdot U}{2} = \frac{CU^2}{2}, \qquad (3.0.24)$$

unde U este diferenţa de potenţial între armăturile condensatorului, iar U_{mediu} este media aritmetică între 0 şi U.

3.0.2. Curentul electric continuu

Într-un mediu poate apărea curent electric numai dacă în acesta se creează un cîmp electric şi dacă conţine sarcini electrice libere. În metale, sarcinile electrice libere sînt electronii de valenţă care nu sînt legaţi de un atom anume, ci se pot mişca liber în întregul metal. Electronii liberi din metal se mai numesc şi *electroni de conducţie.*

Intensitatea curentului electric I este o mărime scalară, egală cu sarcina electrică ce trece prin secţiunea conductorului în unitatea de timp:

$$I = \frac{Q}{t}. \qquad (3.0.25)$$

Ca sens al curentului electric se consideră sensul deplasării sarcinilor electrice pozitive. Deci sensul curentului electric într-un conductor metalic este opus sensului de deplasare ale electronilor. Curentul electric este continuu dacă intensitatea curentului I — precum şi sensul curentului — rămîne constant în timp.

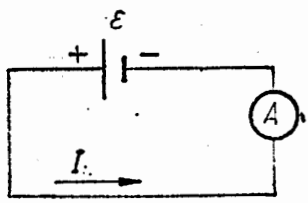


Fig. 3.8.

Dacă prin secţiunea conductorului trece sarcina $Q = 1$ C în timp de o secundă, intensitatea I a curentului este de un amper (1 A). Intensitatea curentului electric se măsoară cu galvanometru sau cu ampermetrul. Aceste aparate se leagă în circuit, în serie (fig. 3.8).

3.0.2.1. Legea lui Ohm

Intensitatea curentului printr-o porţiune din circuit este dată de *legea lui Ohm,*

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (3.0.26)$$

unde U este diferenţa de potenţial între capetele porţiunii de circuit, iar R este rezistenţa porţiunii respective de circuit.

Dacă prin secţiunea conductorului trec n electroni în timp de o secundă, atunci numeric intensitatea curentului este:

$$I = ne_0, \qquad (3.0.27)$$

unde e_0 este sarcina electronului. Fie v_m, viteza medie cu care electronii se deplasează în lungul conductorului; atunci

$$n = n_0 S v_m, \qquad (3.0.28)$$

unde n_0 este numărul electronilor liberi din unitatea de volum al conductorului.

Notăm cu λ drumul mediu parcurs de electron între două ciocniri, iar cu v viteza agitației termice a electronului. În timpul $\tau = \lambda/v$, între două ciocniri, electronul capătă viteza u în sens opus vectorului intensitate $\vec{E}$ al cîmpului electric din conductor:

$$u = a\tau = \frac{e_0 E}{m}\frac{\lambda}{v}, \quad \text{iar} \quad v_m = \frac{1}{2}u. \tag{3.0.29}$$

Deci

$$I = \frac{n_0 e_0^2 \lambda S}{2mv} E. \tag{3.0.30}$$

Dacă l este lungimea conductorului, atunci

$$E = \frac{u}{l} \quad \text{și} \quad I = \frac{n_0 e_0^2 \lambda}{2mv}\frac{S}{l}u. \tag{3.0.31}$$

Mărimea

$$\rho = \frac{2mv}{n_0 e_0^2 \lambda}, \tag{3.0.32}$$

se numește *rezistivitate* și pentru o temperatură dată și un tip dat de conductor, este o constantă.

Cu această notație, formula (3.0.31) trece în (3.0.26) dacă

$$R = \rho\frac{l}{S}. \tag{3.0.33}$$

Rezistența R se măsoară în Ohm (Ω), iar rezistivitatea ρ în $\Omega \cdot$ m. Pentru un circuit întreg (fig. 3.9),

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \tag{3.0.34}$$

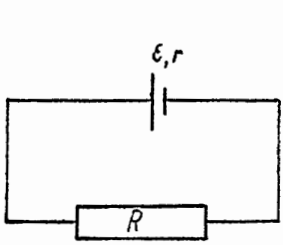


Fig. 3.9.

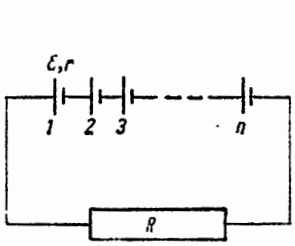


Fig. 3.10.

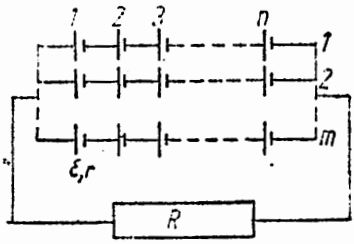


Fig. 3.11.

unde $\mathcal{E}$ este tensiunea electromotoare a sursei de curent, iar r este rezistența internă a acesteia.

Dacă avem n baterii legate în serie (fig. 3.10), atunci

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}. \tag{3.0.35}$$

În cazul general, cînd avem legate în paralel m grupe de cîte n baterii legate în serie (fig. 3.11), avem:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{n}{m}r}. \tag{3.0.36}$$

Dacă $n = 1$, adică dacă avem m baterii legate în paralel:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r/m}. \tag{3.0.37}$$

3.0.2.2. Dependența rezistenței de temperatură

Rezistența metalelor crește cu temperatura. Dacă R_0 este rezistența unui conductor la 0°C, iar R_t la t°C, atunci coeficientul dependenței rezistenței de temperatură este

$$\alpha = \frac{R_t - R_0}{R_0 t^\circ} \quad \text{sau} \quad R_t = R_0(1_1^\circ + \alpha t^\circ), \tag{3.0.38}$$

α se măsoară în grad la minus unu.

Dacă scriem

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{S} \quad \text{și} \quad R_t = \rho_t \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{l}{S}(1 + \alpha t), \tag{3.0.39}$$

obținem dependența rezistivității de temperatură:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t). \tag{3.0.40}$$

Pe măsură ce ne apropiem de 0 K, rezistența conductoarelor scade foarte mult ajungîndu-se pentru 4—5 K la starea de supraconductibilitate cînd $R \to 0$.

3.0.2.3. Legarea conductoarelor în serie și în paralel

Rezistența a n rezistoare legate în serie (fig. 3.12) este

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i, \tag{3.0.41}$$

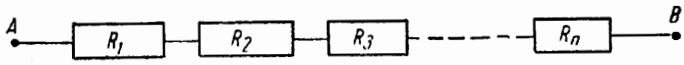


Fig. 3.12.

iar dacă rezistoarele sînt legate în paralel (fig. 3.13), atunci

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{3.0.42}$$

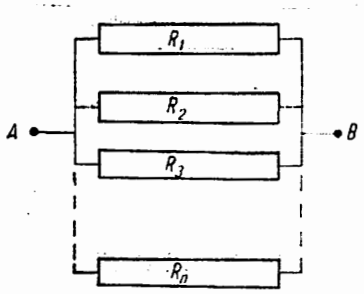


Fig. 3.13.

Dacă $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$,

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{R_1}; \quad R = R_1/n. \tag{3.0.43}$$

3.0.2.4. Șuntul ampermetrelor. Rezistența suplimentară pentru voltmetre

Dacă ampermetrul A (fig. 3.14) are rezistența R_A și este calculat pentru măsurarea unui curent I_A, atunci pentru a putea măsura curentul $I = nI_A$, trebuie ca paralel cu ampermetrul să conectăm rezistența

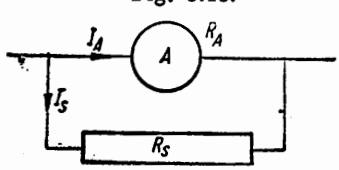


Fig. 3.14.

$$R_s = \frac{R_A}{n - 1}. \tag{3.0.44}$$

Prin această șuntare a ampermetrului se realizează trecerea curentului $(n-1)I_A$ prin R_s și numai I_A prin ampermetru. Aceasta conduce la micșorarea sensibilității aparatului de măsură. Pentru a putea măsura cu un voltmetru o tensiune $U = nU_v$, unde U_v este tensiunea pentru care a fost proiectat voltmetrul, trebuie să conectăm în serie cu voltmetrul o rezistență suplimentară (fig. 3.15):

$$R_a = R_v(n-1). \tag{3.0.45}$$

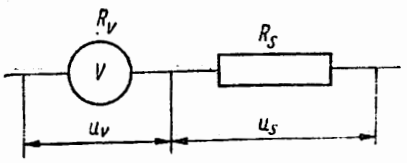


Fig. 3.15.

3.0.2.5. Teoremele lui Kirchhoff

Prima teoremă a lui Kirchhoff afirmă că *suma intensităților curenților ce intră într-un nod este egală cu suma intensităților curenților ce ies din nodul respectiv*, nodul reprezentînd un punct din circuit în care sînt legate cel puțin trei conductoare.

A doua teoremă a lui Kirchhoff indică faptul că *în orice contur închis dintr-un circuit, suma tensiunilor electromotoare este egală cu suma căderilor de tensiune pe rezistențele conturului respectiv.*

Considerînd pozitive intensitățile curenților ce intră în nod și negative intensitățile curenților ce ies din nodul respectiv, cele două teoreme a lui Kirchhoff se scriu matematic sub forma:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{3.0.46}$$

și

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum I_i R_i + \sum I_i r_i. \tag{3.0.47}$$

Prima teoremă a lui Kirchhoff este o consecință a legii conservării sarcinii electrice.

La utilizarea teoremelor lui Kirchhoff trebuie să se procedeze în următoarea ordine:

a) Să se indice sensul curenților pentru fiecare porțiune de circuit. Aceasta se poate face arbitrar. Dacă sensul unui curent se indică în sens opus curentului real, prin calcule se va obține o valoare negativă pentru intensitatea curentului respectiv.

b) Se alege sensul de parcurgere a contururilor. De obicei, se ia sensul acelor de ceasornic.

c) Se scriu cele $n-1$ ecuații corespunzătoare primei teoreme, n fiind numărul nodurilor independente.

d) Se scriu ecuațiile ce rezultă din a doua teoremă.

Tensiunile electromotoare $\mathcal{E}_i$ se iau cu semnul plus dacă parcurgînd conturul după sensul ales trecem de la polul negativ la cel pozitiv al bate-

riei şi cu semnul minus dacă se trece de la polul pozitiv la cel negativ. Dacă sensul de parcurgere a conturului coincide cu sensul curentului I_i, atunci căderea de tensiune $I_i r_i$ sau $I_i R_i$ se ia cu semnul plus, iar dacă sensul de parcurgere a conturului nu coincide cu sensul curentului I_i, atunci căderile de tensiune $I_i R_i$ sau $I_i r_i$ se iau cu semnul minus.

3.0.2.6. Lucrul mecanic şi acţiunea termică a curentului continuu

Pentru realizarea unei surse de curent electric este necesar ca o anume formă de energie (mecanică, chimică etc.) să se transforme în energie electrică. În circuitul exterior, această energie cheltuită trece din energie electrică în alte forme de energie, cum ar fi energia termică.

Lucrul mecanic cheltuit pentru deplasarea sarcinii electrice prin porţiunea exterioară a circuitului este

$$L_{ext} = qU = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t, \tag{3.0.48}$$

iar lucrul mecanic total pentru deplasarea sarcinii electrice q pe întregul circuit este

$$L_{total} = \mathcal{E}It = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}t = I^2(R+r)t. \tag{3.0.49}$$

Puterea degajată în circuitul exterior se determină prin formula:

$$P = \frac{L_{ext}}{t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}. \tag{3.0.50}$$

Randamentul unei surse de curent este

$$\eta = \frac{L_{ext}}{L_{tot}} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}. \tag{3.0.51}$$

Pentru scurtcircuit $R = 0$, $\eta = 0$.

Legea Joule-Lenz afirmă că *la trecerea unui curent printr-un conductor se degajă căldura*

$$Q = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t. \tag{3.0.52}$$

Dacă avem două conductoare de rezistenţe R_1 şi R_2 legate în serie, atunci căldura totală degajată este

$$Q = Q_1 + Q_2 = R_1I^2t + R_2I^2t. \tag{3.0.53}$$

De unde

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{3.0.54}$$

Dacă conductoarele respective sînt legate în paralel, atunci

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{U^2}{R_1}t + \frac{U^2}{R_2}t \tag{3.0.55}$$

şi

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{3.0.56}$$

Putem afla valoarea rezistenței exterioare R pentru care puterea degajată în circuitul exterior este maximă:

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R,$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2(r-R)}{(R+r)^3} = 0.$$

Se obține că puterea degajată în circuitul exterior este maximă dacă

$$R = r. \tag{3.0.57}$$

3.0.2.7. Electroliza. Legile lui Faraday

Depunerea substanței pe electrozi, în procesul de trecere a curentului electric prin electroliți, este cunoscută sub numele de *electroliză*.

Prima lege a lui Faraday afirmă că *masa de substanță depusă pe fiecare din electrozi este direct proporțională cu sarcina electrică q ce trece prin electrolit*:

$$m = kq, \tag{3.0.58}$$

unde k este echivalentul electrochimic al substanței respective. Se vede că echivalentul electrochimic este numeric egal cu masa de substanță depusă la trecerea prin electrolit a sarcinii electrice $q = 1C$.

Mai putem scrie

$$m = kIt. \tag{3.0.59}$$

A doua lege a lui Faraday arată că *echivalentul electrochimic este direct proporțional cu raportul dintre masa atomică A și valența n.*

$$k = \frac{1}{F}\frac{A}{n}, \tag{3.0.60}$$

unde F este o constantă universală, numită *numărul lui Faraday*:

$$F = 9{,}65 \cdot 10^7 \text{ C/kg·atom}. \tag{3.0.61}$$

Cele două legi ale lui Faraday se scriu unit sub forma

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}q = \frac{1}{F}\frac{A}{n}It. \tag{3.0.62}$$

3.0.3. ELECTROMAGNETISM

3.0.3.1. Inducția cîmpului magnetic

Am văzut că asupra unei sarcini electrice q, aflată într-un cîmp electric, acționează forța $\vec{F} = q\vec{E}$, iar cîmpul electric de intensitate $\vec{E}$ este creat de sarcini electrice Q_i.

Sarcinile electrice în mișcare, adică curenții electrici creează în spațiul ce le înconjură, un cîmp magnetic, care se manifestă prin acțiunea unei forțe $\vec{F}$ asupra sarcinilor electrice ce se deplasează în spațiul respectiv.

Experimental, s-a stabilit că forța F care acționează asupra unui conductor liniar aflat în cîmp magnetic este proporțională cu intensitatea curentului I ce trece prin conductor, cu lungimea conductorului l și cu valoarea unei mărimi fizice vectoriale $\vec{B}$ ce caracterizează cîmpul magnetic și care se numește *inducție magnetică* sau inducția cîmpului magnetic și cu sinusul unghiului α dintre sensul vectorului $\vec{B}$ și sensul curentului din conductor:

$$F = BIl \sin \alpha. \tag{3.0.63}$$

Această formulă este cunoscută și sub numele de *legea lui Ampère*. Pentru $\alpha = 90°$

$$B = \frac{F}{Il}. \tag{3.0.64}$$

Inducția magnetică B este numeric egală cu forța F ce acționează asupra unui conductor de lungime $l = 1$ m prin care trece un curent de intensitate $I = 1$ A, dacă conductorul este perpendicular pe vectorul $\vec{B}$. Cînd forța este $F = 1$ N, avem inducția magnetică $B = 1$ T.

$$1\text{T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}} = 1\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{J}}{\text{A}\cdot\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{V}\cdot\text{A}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}. \tag{3.0.65}$$

După natura sa, inducția magnetică $\vec{B}$ este analoagă cu intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electric.

3.0.3.2. Fluxul magnetic

Dacă vectorul $\vec{B}$ este constant ca mărime și sens, avem un cîmp magnetic omogen. Fluxul inducției magnetice $\vec{B}$ printr-o secțiune de arie S (fig. 3.16) este

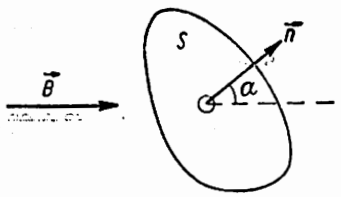


Fig. 3.16

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{n}S = B\cdot S\cos\alpha, \tag{3.0.66}$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafața S. Ca unitate de măsură pentru mărimea scalară Φ se ia în SI:

$$1\text{Wb} = 1\text{T}\cdot 1\text{m}^2 = 1\text{V}\cdot 1\text{s}.$$

3.0.3.3. Intensitatea cîmpului magnetic

Inducția magnetică $\vec{B}$ caracterizează nu numai cîmpul magnetic creat de un curent electric, ci și cîmpul magnetic al mediului în care se află conductorul respectiv. Din punct de vedere magnetic, un mediu este caracterizat de permeabilitatea magnetică relativă μ_r. Permeabilitatea magnetică a vidului este

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{H}}{\text{m}}. \tag{3.0.67}$$

Cîmpul magnetic într-un mediu oarecare se compune din cîmpul magnetic creat de curentul electric și din cîmpul magnetic al mediului respectiv. Electronii ce se rotesc în atomii substanței creează curenți circulari elementari care la rîndul lor creează cîmp magnetic. Acest cîmp magnetic propriu al substanței poate întări sau slăbi cîmpul magnetic exterior.

Vectorul $\vec{B}$ caracterizează cîmpul magnetic rezultant prin suprapunerea cîmpului magnetic exterior și cel intern, specific fiecărei substanțe.

Pentru a caracteriza cîmpul magnetic extern, independent de proprietățile substanței, se introduce vectorul *intensitate a cîmpului mgnetic* $\vec{H}$, care este legat de vectorul $\vec{B}$ prin relația

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \tag{3.0.68}$$

Pentru substanțele feromagnetice ca fier, cobalt, nichel, $\mu_r \gg 1$, iar pentru substanțele diamagnetice ca aur, cupru, sticlă etc., $\mu_r < 1$. Substanțele ca aluminiul, platina etc. sînt paramagnetice, pentru ele $\mu_r \geqslant 1$.

Unitatea de măsură pentru intensitatea cîmpului magnetic H este $1 \frac{A}{m}$.

Intensitatea cîmpului magnetic creat de un curent electric de intensitate I ce trece printr-un conductor liniar și infinit, la distanța r de conductor este:

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \tag{3.0.69}$$

În centrul unei spire circulare de rază r, prin care trece un curent electric de intensitate I, avem intensitatea cîmpului magnetic

$$H = \frac{I}{2r}. \tag{3.0.70}$$

3.0.3.4. Forța de interacțiune între două conductoare paralele prin care trec curenți electrici

Dacă avem două conductoare paralele prin care trec curenții electrici de intensități I_1 și I_2, atunci conductoarele se atrag cînd curenții au același sens și se resping cînd curenții sînt de sensuri opuse.

În figura 3.17 se indică două conductoare liniare aflate la distanța d între ele. Sensul curenților este perpendicular pe planul hîrtiei, de la cititor.

Conform formulei 3.0.63

$$F_1 = B_2 I_1 l; \qquad F_2 = B_1 I_2 l$$

iar conform formulei 3.0.69

$$B_1 = \mu_0 \mu_r \frac{I_1}{2\pi d}; \quad B_2 = \mu_0 \mu_r \frac{I_2}{2\pi d}.$$

Deci (3.0.71)

$$F_1 = F_2 = F = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2 l}{2\pi}.$$

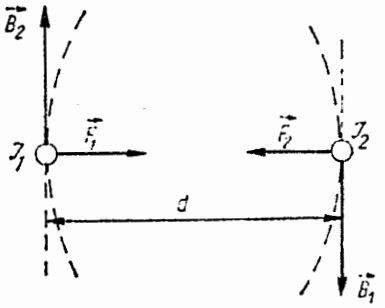


Fig. 3.17.

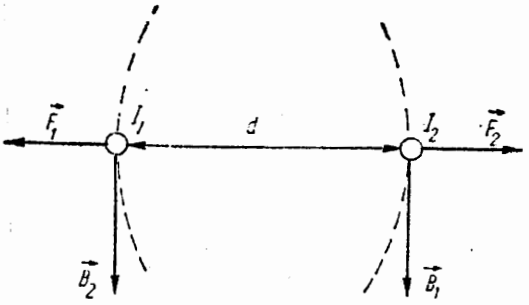


Fig. 3.18.

Forţele care acţionează asupra lungimii l, a fiecărui conductor, sînt egale şi de sens opus, fiind de atracţie dacă curenţii au acelaşi sens (fig. 3.17) şi de respingere dacă curenţii sînt de sensuri opuse (fig. 3.18).

Formula (3.0.71) serveşte la definirea amperului ca unitate a intensităţii curentului electric. Un a m p e r (A) este intensitatea curentului continuu care trecînd prin două conductoare liniare şi infinite, aflate la distanţa $d = 1$ m între ele, în vid, produce forţa $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N pe lungimea $l = 1$ m din fiecare conductor.

3.0.3.5. Acţiunea cîmpului magnetic asupra unei sarcini electrice în mişcare. Forţa Lorentz

În formula (3.0.63) putem scrie:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t}, \tag{3.0.72}$$

unde n este numărul electronilor ce trec prin secţiunea transversală a conductorului de lungime l, iar l/t este viteza medie v a electronilor. Astfel se obţine:

$$F = Benv \sin \alpha. \tag{3.0.73}$$

Forţa Lorentz F_L care acţionează asupra unui electron este:

$$F_L = F/n = evB \sin \alpha, \tag{3.0.74}$$

sau vectorial

$$\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{3.0.75}$$

Unghiul α este unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$.

Se vede că forţa Lorentz $\vec{F}_L$ este totdeauna perpendiculară pe direcţia vitezei $\vec{v}$, ceea ce înseamnă că această forţă poate imprima particulei numai o acceleraţie centripetă.

Dacă $\alpha = \pi/2$, particula se deplasează pe un cerc de rază R într-un cîmp magnetic omogen de inducţie B,

$$evB = \frac{mv^2}{R}; \quad R = \frac{mv}{B \cdot e}. \tag{3.0.76}$$

Măsurînd pe v, B şi R, putem calcula sarcina specifică a electronului:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot R}. \tag{3.0.77}$$

3.0.4. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ

3.0.4.1. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar

Conductorul AB se deplasează cu viteza $\vec{v}$ perpendiculară pe inducţia cîmpului magnetic $\vec{B}$ (fig. 3.19). În urma acţiunii forţei Lorentz asupra sarcinilor electrice din conductor, capătul A al conductorului se încarcă cu sarcină electrică negativă, iar capătul B cu sarcină electrică pozitivă. Acest proces continuă pînă cînd forţele Lorentz sînt echilibrate de forţele coulombiene:

$$eE = e\frac{\mathcal{E}_i}{l} = -evB. \tag{3.0.78}$$

De unde tensiunea electromotoare indusă la capetele conductorului este

$$\mathcal{E}_i = -Blv. \tag{3.0.79}$$

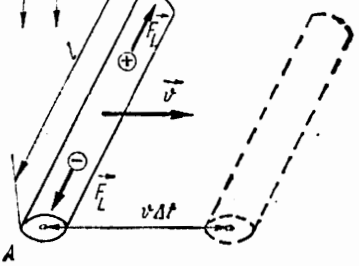


Fig. 3.19.

Dacă viteza $\vec{v}$ face unghiul α cu vectorul $\vec{B}$, atunci

$$\mathcal{E}_i = -Blv \sin \alpha. \tag{3.0.80}$$

Dacă în timpul Δt conductorul a parcurs distanţa $\Delta x = v\Delta t$, atunci

$$\mathcal{E}_i = -\frac{Bl\,\Delta x}{\Delta t} = -\frac{B \cdot \Delta s}{\Delta t} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \tag{3.0.81}$$

unde $\Delta S = l \cdot \Delta x$ este aria suprafeţei măturate de conductor în timpul Δt, iar $\Delta \Phi$ este fluxul magnetic prin suprafaţa ΔS. Relaţia (3.0.81) este o formulă generală de calcul a tensiunii electromotoare induse.

Legînd capetele A şi B ale conductorului la o porţiune de circuit exterior, prin circuitul închis astfel format va circula cu curent electric de inducţie.

Regula lui Lenz afirmă că acest curent de inducţie are astfel de sens încît cîmpul magnetic creat de el se opune variaţiei fluxului magnetic, care conduce la apariţia curentului de inducţie respectiv. Această regulă a lui Lenz conduce la apariţia semnului minus în formulele de mai sus.

3.0.4.2. Autoinducția. Inducția unei bobine

Autoinducția este fenomenul de apariție a tensiunii electromotoare de inducție într-un conductor, datorită variației curentului electric prin însăși conductorul respectiv.

În interiorul unei bobine de lungime l, cu secțiunea transversală S, formată din N spire și aflată într-un mediu cu permeabilitatea magnetică relativă μ_r, prin care trece un curent electric de intensitate I, inducția magnetică este

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l}. \tag{3.0.82}$$

Fluxul magnetic prin fiecare spiră a bobinei va fi:

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 \mu_r \frac{NS}{l} I. \tag{3.0.83}$$

Fluxul magnetic total prin toate spirele bobinei este

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} I. \tag{3.0.84}$$

Mărimea

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}, \tag{3.0.85}$$

se numește *inductanța* bobinei. Unitatea de măsură pentru inductanța L este

$$1\text{H} = 1\text{Wb}/1\text{A} = 1\text{W}\cdot\text{s}/1\text{A}. \tag{3.0.86}$$

O bobină are inductanța $L = 1$ H dacă trecînd curentul de intensitate $I = 1$ A în bobină apare fluxul $\Phi = 1$ Wb.

Dacă intensitatea curentului electric prin bobină variază în timp, apare o tensiune electromotoare de inducție

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{3.0.87}$$

3.0.5. CURENT ALTERNATIV

Curentul alternativ este curentul electric pentru care variază periodic atît sensul cît și intensitatea I.

3.0.5.1. Obținerea curentului alternativ

Rama $ABCD$ (fig. 3.20) se rotește cu pulsația ω în jurul axei OO'. Inelele I_1 și I_2 se rotesc odată cu rama respectivă, iar pe ele apasă periile P_1 și P_2 care se leagă la circuitul exterior. Dacă la momentul $t = 0$ cînd începe rotirea ramei, unghiul între inducția $\vec{B}$ și normala la ramă este α, atunci dependența fluxului magnetic prin ramă, de timp este:

$$\Phi = BS\cos(\omega t + \alpha). \tag{3.0.88}$$

Tensiunea electromotoare de inducție ce apare în ramă este

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.0.89)$$

Notăm cu

$$\mathcal{E}_m = BS\omega, \quad (3.0.90)$$

adică tensiunea electromotoare maximă și

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.0.91)$$

Deci prin rotirea ramei apare o tensiune electromotoare de inducție care variază atît ca mărime cît și ca sens.

În circuitul exterior (fig. 3.20) va apărea un curent

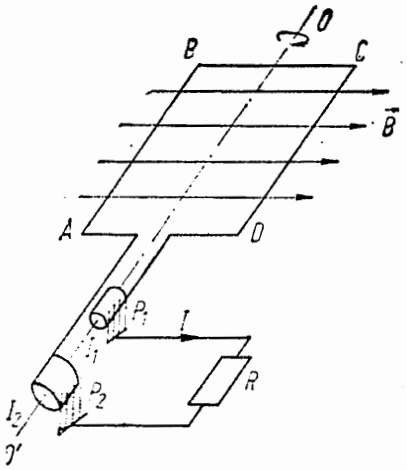


Fig. 3.20.

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin(\omega t + \alpha) = I_{max} \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.0.92)$$

Valoarea *efectivă* a intensității curentului alternativ I_{ef} se consideră intensitatea curentului continuu care într-un conductor dat și într-un timp Δt determinat degajă aceeași căldură, prin efect Joule, ca și curentul alternativ:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m \quad (3.0.93)$$

și

$$E_{ef} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ E_m. \quad (3.0.94)$$

Din relațiile (3.0.91) și (3.0.92) rezultă că dacă într-un circuit de curent alternativ avem numai rezistență ohmică R, intensitatea curentului este în fază cu tensiunea electromotoare.

3.0.5.2. Bobină și condensator în circuit de curent alternativ

Dacă la o sursă de tensiune electromotoare alternativă se conectează o bobină de inductanță L și rezistență R neglijabilă, prin bobină va trece curentul de intensitate

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.0.95)$$

Mărimea

$$X_L = \omega L \quad (3.0.96)$$

se numește *reactanță inductivă*.

Intensitatea curentului prin bobină este în urmă față de tensiunea electromotoare cu faza $\pi/2$.

În cazul în care la sursa de tensiune alternativă se conectează un condensator de capacitate C, prin circuit vom avea curentul de intensitate

$$I = \omega C \mathcal{E}_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (3.0.97)$$

iar mărimea

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad (3.0.98)$$

se numește *reactanță capacitivă*.

Deci căderea de tensiune pe condensator rămîne în urma curentului cu faza $\pi/2$.

3.0.5.3. Circuit R, L, C în curent alternativ

Dacă avem circuitul din figura 3.21, atunci intensitatea curentului este

$$I = \frac{E}{Z}, \qquad (3.0.99)$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (3.0.100)$$

se numește *impedanța* circuitului.

Intensitatea curentului în circuit este maximă dacă reactanța totală a circuitului este zero:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \qquad (3.0.101)$$

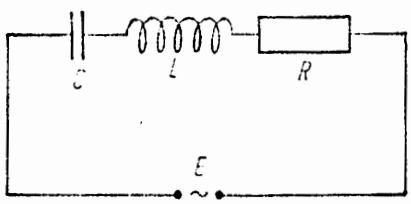


Fig. 3.21.

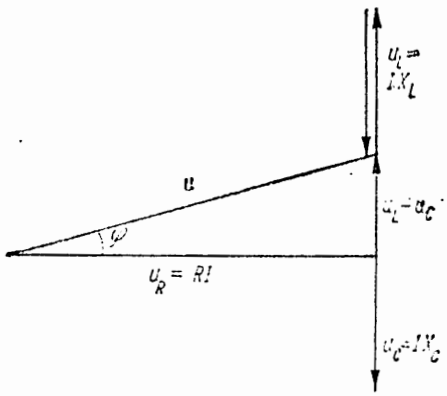


Fig. 3.22.

sau *pulsația de rezonanță* este

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (3.0.102)$$

În cazul circuitului din figura 3.21, între curent și tensiune există o *diferență de fază* φ (fig. 3.22):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \qquad (3.0.103)$$

3.0.5.4. Puterea în curent alternativ

Puterea

$$P = U_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi, \tag{3.0.104}$$

se numeşte *putere activă* şi poate fi transformată în căldură sau lucrul mecanic, iar cos φ este factorul de putere.

Puterea reactivă

$$P_r = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi \tag{3.0.105}$$

nu poate fi transformată în căldură sau lucru mecanic. Aceasta se acumulează în circuit sub formă de energie a cîmpului magnetic al bobinei sau al cîmpului electric al condensatorului.

Puterea aparentă este:

$$P_a = \sqrt{P^2 + P_r^2} = U_{ef} \cdot I_{ef}. \tag{3.0.106}$$

3.0.5.5. Transformatorul

Transformatorul constă din bobina primară cu N_1 spire şi bobina secundară cu N_2 spire (fig. 3.23). De regulă, $N_2 \gg N_1$. Curentul alternativ ce trece prin bobina primară creează un flux magnetic variabil, care intersectează bobina secundară. Datorită miezului magnetic, ambele bobine se află în acelaşi flux magnetic Φ. Tensiunile electromotoare de inducţie în cele două bobine sînt:

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{3.0.107}$$

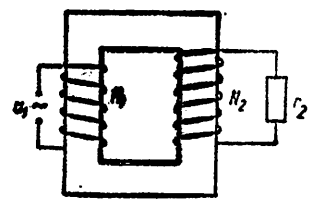


Fig. 3.23.

iar

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = k \tag{3.0.108}$$

se numeşte *coeficientul de transformare.*

Tensiunea electromotoare indusă în bobina primară $\mathcal{E}_1$ este, după regula Lentz, opusă tensiunii U_1 şi practic egală cu aceasta: $\mathcal{E}_1 \simeq U_1$,

iar

$$U_2 = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2. \tag{3.0.109}$$

Neglijînd pierderile în transformator

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2 = I_2(U_2 + I_2 r_2),$$

iar din (3.0.108) avem:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} I_1 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{1}{k} I_1. \tag{3.0.110}$$

3.0.6. CURENTUL ALTERNATIV TRIFAZAT

Dacă în loc de o singură spiră (fig. 3.20) se introduc în cîmpul magnetic trei spire identice care se rotesc pe acelaşi ax, planele cărora fac între ele unghiuri de 120°, în spire se vor induce tensiunile electromotoare $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, şi $\mathcal{E}_3$ cu aceeaşi valoare efectivă $\mathcal{E}_{ef}$. Considerînd faza iniţială pentru tensiunea

electromotoare $\mathcal{E}_1$ egală cu zero, valorile instantanee ale tensiunilor electromotoare din cele trei spire, vor fi:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t,$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{max} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad (3.0.111)$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_{max} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Aceste tensiuni electromotoare, defazate între ele cu unghiuri egale cu $2\pi/3$, constituie un *sistem trifazat*. Datorită faptului că valorile efective ale celor trei tensiuni electromotoare sînt egale, sistemul trifazat este simetric. Este ușor de arătat că într-un sistem trifazat simetric, suma celor trei tensiuni electromotoare este zero:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = 0. \qquad (3.0.112)$$

Fiecare înfășurare a generatorului trifazat (numită pe scurt fază) poate alimenta cîte un receptor (fig. 3.24). În practică, se mai recurge la *gruparea în stea* (fig. 3.25) și la *gruparea în trunghi* (fig. 3.26), a celor trei faze. La gru-

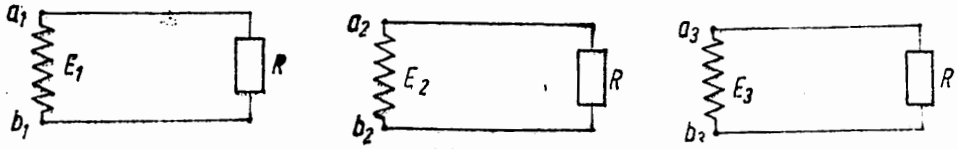


Fig. 3.24.

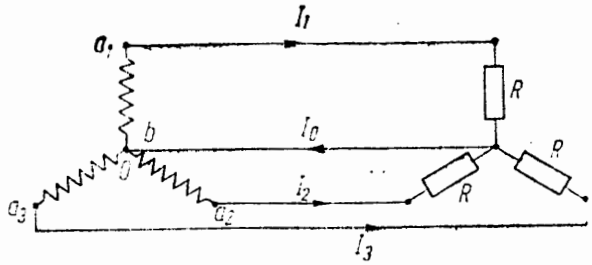


Fig. 3.25.

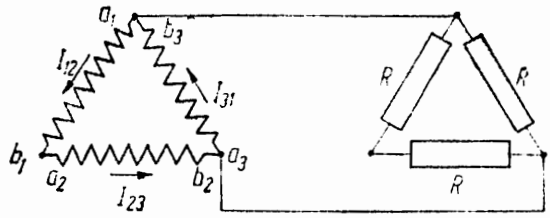


Fig. 3.26.

parea în stea, începuturile înfășurărilor se leagă la receptoare prin conductoare de linie, iar sfîrșiturile înfășurărilor (punctele b_1, b_2 și b_3) se leagă într-un punct comun O, care se numește *punct neutru* sau *nul*. Conductorul ce pleacă din acest punct la receptor se numește *conductor neutru* sau *conductor de nul*.

Tensiunile măsurate între începuturile fazelor și punctul neutru se notează cu $U_1(Ua_{10})$, $U_2(Ua_{20})$; $U_3(Ua_{30})$ sau U_f și se numesc *tensiuni de fază*.

Tensiunile măsurate între începuturile a două faze se numesc *tensiuni de linie* și se notează $U_{12}(Ua_1a_2)$, $U_{23}(Ua_2a_3)$, $U_{31}(a_3a_1)$ sau U_l.

La fel, curentul care trece printr-o fază a generatorului sau a receptorului se numește *curent de fază* (I_f), iar curentul ce trece prin conductorul de linie se numește *curent de linie* (I_l).

În cazul grupării în stea (Y)

$$U_l = \sqrt{3}\, U_f;\ I_l = I_f, \tag{3.0.113}$$

iar în cazul grupării în triunghi ($\triangle$)

$$U_l = U_f;\ I_l = \sqrt{3}\, I_f. \tag{3.0.114}$$

Ținînd seama de aceste relații, rezultă că puterea în circuite trifazate este aceeași atît în cazul grupării în stea cît și în cazul grupării în triunghi:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi, \\ P_r &= \sqrt{3}\, U_l I_l \sin\varphi, \\ P_a &= \sqrt{3}\, U_l I_l. \end{aligned} \tag{3.0.115}$$

3.0.7. MAȘINI ELECTRICE

O mașină care transformă puterea mecanică în putere electrică, sau invers, se numește *mașină electrică*. Acestea pot funcționa fie în regim de *generator electric*, cînd se transformă puterea mecanică în putere electrică, fie în regim de *motor electric*, cînd are loc transformarea energiei electrice în energie mecanică.

Mașinile electrice pot fi de curent continuu și de curent alternativ, monofazat sau polifazat. La rîndul lor, mașinile de curent alternativ se împart în două clase: mașini sincrone și mașini asincrone. Dacă frecvența rețelei electrice de curent alternativ se află în raport constant cu viteza de rotație a mașinii pentru orice regim de funcționare, mașina este *sincronă*, iar dacă raportul dintre frecvența rețelei și viteza de rotație a mașinii variază odată cu schimbarea regimului de funcționare sau a gradului de încărcare a mașinii, avem mașină electrică *asincronă*.

3.0.7.1. Mașini electrice de curent continuu

În regim de *generator de curent continuu*, mașina electrică este antrenată de un motor exterior (motor Diesel, turbină cu abur, turbină hidraulică etc.) care poartă numele de *motor primar*. Generatorul de curent continuu poate funcționa cu excitație separată (fig. 3.27) sau cu excitație proprie (autoexcitație).

În cazul funcționării în sarcină a generatorului de curent continuu cu *excitație separată* (fig.3.27), tensiunea U_{AB} la bornele înfășurării rotorului va fi:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_r \cdot r - \Delta U_p, \tag{3.0.116}$$

unde I_r este intensitatea curentului prin înfășurarea rotorului, prin înfășurarea

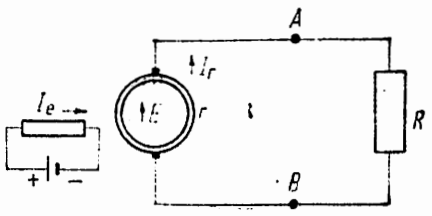


Fig. 3.27.

polilor auxiliari și prin periile mașinii, iar r reprezintă rezistența totală a înfășurării rotorului și a înfășurării polilor auxiliari. ΔU_p este căderea de tensiune la contactul perie-colector, care de regulă este foarte mică (0,5÷÷2,5 V). Tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ este proporțională cu numărul N de spire ale rotorului, cu fluxul magnetic Φ produs de inductor și cu numărul ν de rotații pe secundă a rotorului:

$$\mathcal{E} = kN\Phi\nu. \tag{3.0.117}$$

Coeficientul k depinde de construcția mașinii.

Dacă I_r = const, atunci $\mathcal{E}$ = const. și deci odată cu creșterea curentului I_r, tensiunea la bornele generatorului scade.

În cazul dinamului cu *excitație proprie în serie* (figura 3.28), tensiunea la borne este:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I(r + r_e). \tag{3.0.118}$$

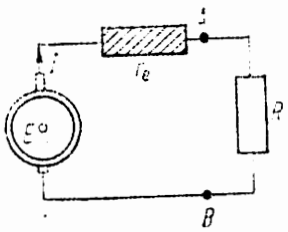


Fig. 3.28.

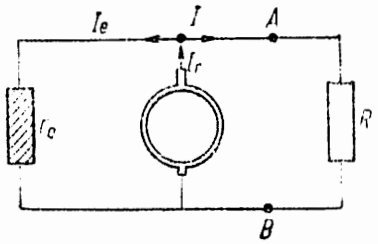


Fig. 3.29.

Generatorul de curent continuu cu *excitație în paralel* (fig.3.29) este cel mai răspîndit. În acest caz avem:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_r \cdot r = I_e r_e; \quad I_r = I + I_e. \tag{3.0.119}$$

Schemele de principiu pentru *motoarele de curent continuu* rămîn aceleași ca pentru generatoarele de curent continuu. Dacă în loc de acțiunea motorului primar se aplică tensiunea U_{AB} din exterior, prin conductoarele rotorului va apărea un curent electric al cărui cîmp magnetic va interacționa cu cîmpul magnetic inductor dînd naștere la un cuplu de forțe ce va pune în mișcare rotorul mașinii electrice, care va funcționa deci ca un motor electric. În conductoarele rotorului apare o tensiune indusă a contraelectromotoare $\mathcal{E}_c$. Pentru *motorul cu excitație în serie*

$$U_{AB} = I(r + r_e) - \mathcal{E}_c, \tag{3.0.120}$$

iar pentru *motorul cu excitație în paralel*

$$U_{AB} = I_r \cdot r - \mathcal{E}_c = I_e r_e, \tag{3.0.121}$$

$$I = I_r + I_e. \tag{3.0.122}$$

La pornirea motorului de curent continuu, tensiunea contraelectromotoare fiind zero, curentul de pornire

$$I_p = \frac{U_{AB}}{r}, \tag{3.0.123}$$

are o intensitate mult mai mare decît valoarea nominală. Din acest motiv, în serie cu rotorul se conectează un reostat de pornire, cu rezistența

inițială R_p. Deci la pornirea motorului, reostatul avînd rezistența R_p, curentul de pornire va fi:

$$I_p = \frac{U_{AB}}{r + R_p}. \tag{3.0.124}$$

Pe măsura creșterii tensiunii contraelectromotoare, rezistența reostatului se micșorează pînă la zero, iar în regim normal

$$I = \frac{U_{AB} - \mathcal{E}_c}{r}. \tag{3.0.125}$$

Înlocuind în (3.0.121) tensiunea contraelectromotoare $\mathcal{E}_c = k_e \nu \Phi$ unde k_e este o constantă pentru o mașină dată, se obține frecvența de rotație a motorului:

$$\nu = \frac{U_{AB} - I_r \cdot r}{k_e \Phi}. \tag{3.0.126}$$

Aflăm deci viteza de rotație, una din mărimile importante care caracterizează funcționarea unui motor electric.

3.1. PROBLEME CU REZOLVĂRI

3.1.1. Doi electroni se află în vid la distanța r între ei. Sarcina electrică a electronului este $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, iar masa electronului este $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) Să se calculeze raportul dintre forța coulombiană de respingere și forța atracției universale, ce acționează între cei doi electroni.

b) Care trebuie să fie raportul dintre sarcina electrică q și masa M a unei particule pentru care cele două forțe ar fi egale?

3.1.2. În vîrfurile unui pătrat cu latura l se află sarcinile electrice pozitive, egale cu $+q$. În centrul pătratului se pune o sarcină electrică negativă $-Q$.

Se cere să se calculeze raportul Q/q astfel încît forțele care acționează asupra fiecăruia din cele patru sarcini electrice q să aibă rezultanta egală cu zero.

3.1.3. Conform modelului Bohr pentru atomul de hidrogen, electronul se rotește pe o orbită circulară în jurul nucleului care constă dintr-un singur proton. Sarcina electrică a electronului este $-e_0$, iar a protonului $+e_0$, unde $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Masa electronului este $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. Raza orbitei electronului se consideră $r = 5 \cdot 10^{-11}$ m.

Să se calculeze:

a) forța de atracție între electron și proton;

b) viteza electronului pe orbita circulară.

3.1.4. Sarcinile electrice $q_1 = +10$ nC și $q_2 = +40$ nC se află în vid la distanța $r = 20$ cm între ele. Pe linia ce unește cele două sarcini electrice trebuie așezată sarcina electrică pozitivă q_3 astfel încît aceasta să rămînă în repaus.

Să se calculeze distanța x de la sarcina electrică q_1 la care trebuie așezată sarcina electrică q_3.

3.1.5. Punctele materiale $ABCD$ (fig. 3.31) aflate în vîrfurile unui pătrat cu latura $l = 2$ m sînt încărcate cu sarcini electrice egale ca valoare, $q = 2$ C. Să se calculeze intensitatea cîmpului electrostatic în punctele O și O_1 dacă:

a) toate sarcinile electrice sînt pozitive;

b) sarcinile electrice ale corpurilor A și B sînt pozitive, iar ale corpurilor C și D sînt negative;

c) sarcinile electrice ale corpurilor B și C sînt pozitive, iar ale corpurilor A și D negative.

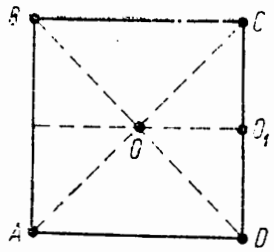


Fig. 3.31.

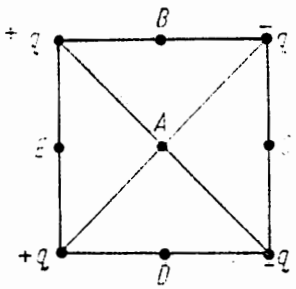


Fig. 3.32.

3.1.6. În figura 3.32 se indică patru sarcini electrice egale ca mărime, $q = 2$ C, aflate în vîrfurile unui pătrat cu latura $l = 2$ m. Se cere să se calculeze potențialul electrostatic creat de sistemul de sarcini electrice în punctele A, B, C, D și E.

3.1.7. În interiorul unui condensator plan, între plăcile căruia intensitatea cîmpului electric este E, se rotește uniform un punct material, de masă m încărcat cu sarcina electrică $+q$, fixat cu ajutorul unui fir de lungime l (figura 3.33). În timpul rotației, firul face unghiul α cu verticala. Să se calculeze tensiunea T din fir și energia cinetică E_c a punctului material în timpul mișcării.

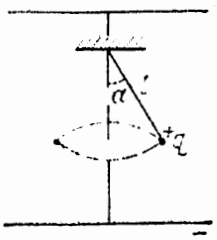


Fig. 3.33.

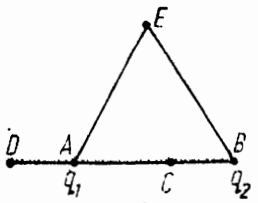


Fig. 3.34.

3.1.8. Două sfere de greutăți egale $G_1 = G_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ N sînt suspendate în aer, de același punct O, prin intermediul a două fire de mătase de aceeași lungime, $l = 1$ m fiecare. Încărcate cu aceeași sarcină electrică q, sferele se resping, rămînînd în poziția de echilibru la distanța $d = 9$ cm între ele.

Să se calculeze valoarea sarcinii electrice q, cu care este încărcată fiecare din cele două sfere.

3.1.9. Două corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile electrice $q_1 = +1{,}2 \cdot 10^{-8}$ C și $q_2 = -1{,}2 \cdot 10^{-8}$ C se află, în aer, la distanța $d = 10$ cm, unul de altul. Să se calculeze intensitatea cîmpului electrostatic E al sistemului format din cele două sarcini electrice, în punctele C, D și E (fig. 3.34). $BC = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $AD = 4$ cm, $AE = BE = AB = 10$ cm.

3.1.10. Densitatea superficială de sarcină electrică pe suprafața unei sfere conductoare este $\sigma = 8{,}85 \cdot 10^{-7}$ C/m^2, iar intensitatea cîmpului electrostatic la o distanță $R = 2$ m de suprafața sferei este $E = 3{,}6 \cdot 10^4$ V/m.

Să se calculeze raza sferei r.

3.1.11. Două corpuri punctiforme cu masele m_1 și m_2, încărcate cu sarcinile electrice $+q_1$ și $+q_2$, sînt legate printr-un fir ce trece peste un scripete. Sistemul este introdus într-un cîmp electric omogen de intensitate $\vec{E}$, vectorul $\vec{E}$ fiind orientat pe verticală în jos. Interacțiunea dintre sarcinile electrice q_1 și q_2 se neglijează.

Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea T din firul de legătură.

3.1.12. Trei sarcini electrice identice, $q = 10^{-9}$ C, se află în vîrfurile unui triunghi echilateral (figura 3.35). În centrul triunghiului se află o sarcină electrică negativă $-q_1$.

Să se calculeze valoarea sarcinii electrice q, astfel încît forțele de atracție exercitate de aceasta să echilibreze forțele de respingere între sarcinile electrice aflate în vîrful triunghiului. Să se specifice dacă starea de echilibru a sistemului este sau nu stabilă.

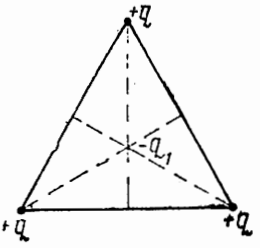


Fig. 3.35.

3.1.13. Două sarcini electrice de valori $+9q$ și $-q$ sînt fixate la distanța $l = 50$ cm, una de alta. A treia sarcină electrică de valoare q_1 se poate deplasa pe linia ce unește primele două sarcini electrice. Să se stabilească poziția sarcinii electrice q_1 pentru care aceasta se va găsi în echilibru. Care trebuie să fie semnul sarcinii electrice q_1 pentru ca aceasta să se găsească în echilibru stabil?

3.1.14. Două sfere identice încărcate cu aceeași sarcină electrică q sînt fixate de același punct prin intermediul a două fire de lungime l fiecare. Datorită forței de respingere dintre sarcinile electrice, firele fac unghiul α între ele.

După stabilirea unghiului α, sferele se introduc într-un ulei de densitate $\rho_0 = 8 \cdot 10^2$ kgm^{-3}. Densitatea materialului din care sînt făcute sferele este $\rho = 1{,}6 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}.

Să se calculeze permitivitatea electrică relativă ε_r a uleiului astfel încît după introducerea sferelor în ulei, unghiul α dintre fire să rămînă același.

3.1.15. Distanța dintre două sarcini electrice punctiforme $q_1 = 10^{-6}$ C și $q_2 = -10^{-6}$ C este $d = 10$ cm. O sarcină electrică $q = 10^{-7}$ C se află la distanța $d_1 = 6$ cm de q_1 și la distanța $d_2 = 8$ cm de q_2. Să se calculeze forța F care acționează asupra sarcinii electrice q.

3.1.16. În vîrfurile unui hexagon cu latura $l = 10$ cm se află sarcinile electrice punctiforme q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$ și $6q$ ($q = 10^{-7}$ C). În planul hexagonului, la distanțe egale de vîrfurile acestuia se află sarcina electrică punctiformă q.

Să se calculeze forța care acționează asupra sarcinii electrice q.

3.1.17. Două sfere metalice identice încărcate cu sarcinile electrice q_1 și q_2 se află la distanța $d = 60$ cm una de alta. Forța de respingere dintre sfere este $F_1 = 7 \cdot 10^{-5}$ N. Sferele se pun în contact una cu alta și apoi se

îndepărtează la distanța d. După aceasta, forța de respingere între sfere este $F_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ N. Diametrul sferelor se consideră mult mai mic decît distanța d dintre ele.

Să se calculeze valorile sarcinilor electrice q_1 și q_2.

3.1.18. Dacă se încarcă cu sarcină electrică o sferă metalică de rază r, la un potențial $U = 1\,200$ V, densitatea superficială de sarcină electrică pe suprafața sferei este $\sigma = 4{,}6 \cdot 10^{-7}$ C/m^2. Să se calculeze raza sferei.

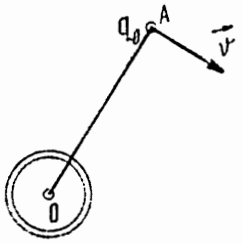


Fig. 3.36.

3.1.19. Sarcina electrică $q = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$ C este distribuită uniform pe suprafața unei sfere de rază r. În punctul A (fig. 3.36) se află un corp punctiform cu sarcina specifică $\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$ C/kg. Distanța $OA = R = 10$ cm, iar $R \gg r$. Sarcinile electrice se află în vid.

Să se calculeze valoarea vitezei v ce trebuie imprimată în direcția perpendiculară pe OA astfel încît corpul să se rotească pe un cerc de rază R.

3.1.20. Două sfere cu masele $m_1 = 5$ g și $m_2 = 15$ g, încărcate cu sarcinile electrice $q_1 = 8 \cdot 10^{-8}$ C și respectiv $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ C, se află inițial în repaus la distanța $l_0 = 20$ cm între ele. Datorită forței de atracție, sferele încep să se apropie una de alta, fără frecare. Cîmpul magnetic datorat mișcării sferelor se neglijează.

Să se calculeze vitezele celor două sfere la momentul cînd distanța dintre ele este $l = 8$ cm.

3.1.21. Un electron intră cu viteza v între plăcile unui condensator plan, paralel cu acestea, la distanța $d = 4$ cm de placa încărcată cu sarcină electrică pozitivă. Lungimea plăcilor este $l = 15$ cm, iar intensitatea cîmpului electric între plăcile condensatorului este $E = 500$ V/m. Să se calculeze valoarea minimă a vitezei v astfel încît electronul să nu cadă pe placa condensatorului.

3.1.22. Un electron intră cu viteza $v_0 = 3 \cdot 10^6$ ms^{-1} între plăcile unui condensator plan, paralel cu acestea. Lungimea plăcilor condensatorului este $l = 20$ cm. La ieșirea din condensator, direcția de mișcare a electronului face unghiul $\alpha = 30°$ cu plăcile condensatorului. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric E între plăcile condensatorului.

3.1.23. Într-un cîmp electric omogen de intensitate E (vectorul E fiind orientat pe verticală în sus) se rotește în plan vertical o sferă de masă m încărcată cu sarcina electrică $+q$, legată de un fir de lungime l.

Să se calculeze viteza v ce trebuie imprimată sferei în momentul cînd aceasta se află în punctul cel mai de sus al traiectoriei, astfel încît în momentul cînd aceasta trece prin punctul cel mai de jos al traiectoriei tensiunea din fir să fie $T = 10$ mg.

3.1.24. O sferă de masă m încărcată cu sarcina electrică q este legată de punctul O prin intermediul unui fir de lungime l. În punctul O se află o sarcină electrică de valoare q. Să se calculeze viteza minimă v care trebuie imprimată sferei, pe orizontală, în poziția de echilibru, astfel încît aceasta să poată efectua o rotație completă în plan vertical.

3.1.25. O sferă de masă m încărcată cu sarcina electrică q, legată de un fir de lungime l, se rotește în plan orizontal în jurul unei sfere fixe încărcate tot cu sarcina electrică q (figura 3.37). Firul face unghiul α cu verticala. Să se calculeze viteza unghiulară ω de rotație a primei sfere și tensiunea T din fir.

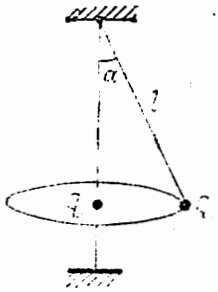


Fig. 3.37.

3.1.26. O picătură de mercur încărcată cu sarcina electrică $q = 8 \cdot 10^{-19}$ C se află în echilibru între plăcile unui condensator plan, orizontal. Intensitatea cîmpului electric între plăcile condensatorului este $E = 600$ V/m. Să se calculeze raza r a picăturii de mercur.

3.1.27. Două condensatoare cu capacitățile $C_1 = 2$ μF și $C_2 = 5$ μF sînt conectate la o sursă de curent continuu cu tensiunea $U = 140$ V. Să se calculeze sarcinile electrice și diferențele de potențial pe fiecare condensator.

3.1.28. O sferă cu capacitatea $C_1 = 10^{-6}$ F este încărcată cu sarcina electrică $q_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ C, iar o sferă cu capacitatea $C_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ F se încarcă cu sarcina electrică $q_2 = 9 \cdot 10^{-5}$ C. Sferele se leagă printr-un fir conductor. Să se calculeze:

a) sarcinile electrice q_1' și q_2' ale sferelor după ce au fost puse în contact electric;

b) potențialul sferelor.

3.1.29. Un condensator este format din foițe de staniol între care se află foița de mică de grosime $d = 0{,}1$ mm și suprafață $S = 9$ cm². Să se calculeze numărul foițelor de staniol astfel încît capacitatea condensatorului obținut să fie $C = 10^{-7}$ F.

3.1.30. Un condensator plan constă din două plăci de suprafață $S = 100$ mm² fiecare, iar distanța dintre plăci este $d = 6$ mm. Condensatorul în poziția verticală se introduce jumătate în ulei de parafină ($\varepsilon_r = 2$). Inițial, între plăcile condensatorului se afla aer, iar condensatorul a fost încărcat pînă la o diferență de potențial $U = 600$ V. Să se calculeze:

a) distanța d_1 dintre plăcile condensatorului după introducerea în ulei astfel încît capacitatea condensatorului să rămînă cea inițială;

b) sarcina electrică de pe plăcile condensatorului.

3.1.31. Doi protoni cu viteza v_0 fiecare se află inițial la o distanță foarte mare între ei. Apropiindu-se unul de altul pe linia ce unește cei doi protoni, aceștia se pot apropia pînă la distanța minimă $r_{min} = 10^{-11}$ cm. Să se calculeze viteza inițială v_0 a protonilor.

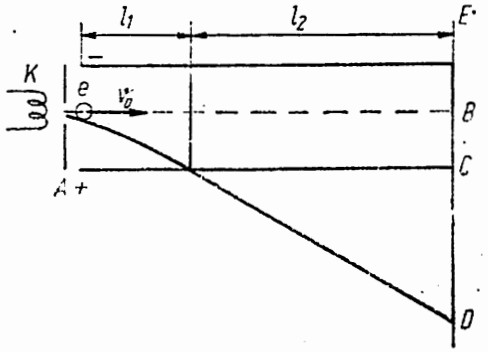


Fig. 3.38.

3.1.32. Un electron emis de catodul K (figura 3.38) fără viteza inițială este accelerat între catod și anodul A la o diferență de potențial $U_{AK} = 10$ kV. După aceea, electronul intră între plăcile unui condensator aflate la o diferență de potențial $\Delta U = 100$ V. Distanța dintre plăcile condensatorului este

$d = 2$ cm, lungimea plăcilor este $l_1 = 20$ cm, iar distanța de la condensator la ecranul E este $l_2 = 1$ m. Să se calculeze distanța BD cu care este deviat electronul de la direcția inițială, cînd aceasta ajunge pe ecranul E.

3.1.33. Un electron avînd viteza $v = 1{,}83 \cdot 10^6$ ms^{-1} intră într-un cîmp electric omogen în sens opus sensului vectorului intensității cîmpului electric E. Să se calculeze diferența de potențial pe care trebuie s-o parcurgă electronul pentru ca energia lui să devină $E_i = 13{,}6$ eV.

3.1.34. Un proton intră între plăcile unui condensator plan aflat orizontal, cu viteza $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ ms^{-1} paralelă cu plăcile condensatorului. Intensitatea cîmpului electric între plăcile condensatorului este $E = 30$ V/cm, iar lungimea plăcilor este $l = 10$ cm. Să se calculeze raportul dintre viteza v cu care protonul iese din condensator și viteza inițială v_0.

3.1.35. În figura 3.39 se indică o baterie de condensatoare cu capacitățile $C_1 = 2$ μF și $C_2 = 3$ μF. Să se calculeze capacitatea C_{AB} a bateriei.

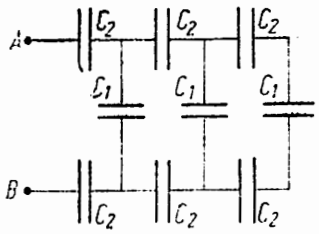


Fig. 3.39.

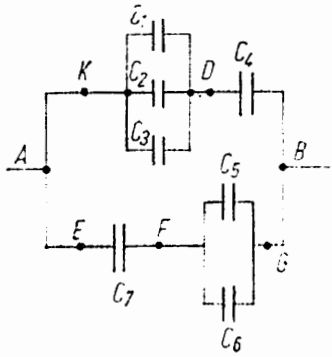


Fig. 3.40.

3.1.36. În figura 3.40 se indică o baterie de condensatoare cu capacitățile $C_1 = 3$ μF, $C_2 = 5$ μF, $C_3 = 4$ μF, $C_4 = 4$ μF, $C_5 = 4$ μF, $C_6 = 2$ μF și $C_7 = 3$ μF. Sarcina electrică de pe condensatorul C_2 este $q_2 = 120$ μC. Să se calculeze:

a) capacitatea C_{AB} a bateriei;

b) diferența de potențial între punctele A și F.

3.1.37. Sarcinile electrice $-q$ și $+q$ ce formează un dipol electric sînt fixate în punctele A și B (figura 3.41). Distanța $AB = l$, iar $OA = OB = l/2$. Să se calculeze distanța OC de la centrul dipolului astfel încît în punctul C, potențialul electric al dipolului să fie egal cu potențialul sarcinii electriece $+q$, fixată în punctul O.

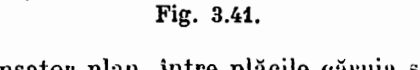


Fig. 3.41.

3.1.38. Un condensator plan, între plăcile căruia se află aer, este încărcat de la o sursă de tensiune pînă la diferența de potențial U_1 între plăci. Distanța dintre plăcile condensatorului este d_1, iar capacitatea acestuia este C_1.

Se deconectează condensatorul de la sursa de tensiune și distanța dintre plăci se mărește pînă la $d_2 = d_1 + x$.

Să se calculeze capacitatea C_2, diferența de potențial U_2, sarcina electrică q_2 și intensitatea cîmpului electric E_2 în funcție de mărimile U_1, d_1, C_1 și x.

3.1.39. Un electron cu viteza $v_0 = 10^5$ ms^{-1} se apropie de un ion negativ cu sarcina $q = 3e_0$. Să se calculeze:

a) distanța minimă la care electronul se poate apropia de ionul negativ;

b) diferența de potențial cu care a fost accelerat electronul pentru a obține viteza v_0, dacă inițial electronul se afla în repaus.

3.1.40. O picătură sferică de apă se obține în urma contopirii a 125 de picături mici identice. Potențialul sferei rezultante este $U = 2{,}5$ V. Să se calculeze potențialul U_1 pînă la care au fost încărcate picăturile sferice mici, înainte de contopirea acestora.

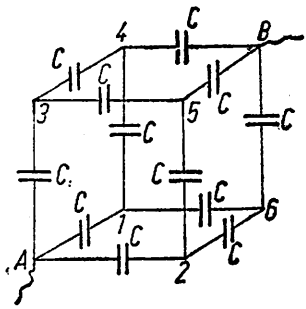


Fig. 3.42.

3.1.41. Muchiile unui cub sînt formate din conductoare conectate la condensatoare identice de capacitate C (fig. 3.42).

Să se calculeze capacitatea C_{AB} a bateriei formate din cele douăsprezece condensatoare.

3.1.42. Se consideră două rezistoare cu rezistențele R_{01} și R_{02} la temperatura 0°C, iar coeficienții termici de rezistență sînt respectiv α_1 și α_2. Să se calculeze:

a) dependența de temperatură a rezistenței circuitului dacă cele două rezistoare se conectează în serie și respectiv, în paralel;

b) coeficienții de temperatură a circuitelor în cele două cazuri.

3.1.43. În momentul conectării unui bec cu filament de wolfram ($\alpha = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$ grad^{-1}) la temperatura de 20°C, intensitatea curentului prin filament este de $n = 12{,}5$ ori mai mare decît în regimul normal de funcționare a becului.

Să se calculeze temperatura filamentului de wolfram în regimul normal de funcționare.

3.1.44. Rezistența fiecărui conductor conectat în hexagonul din figura 3.44 este R. Să se calculeze rezistența R_{AB} a circuitului.

3.1.45. Muchiile unui cub sînt formate din conductoare de rezistență R fiecare (fig. 3.46). Să se calculeze rezistența R_{AB} a circuitului format din cele 12 conductoare.

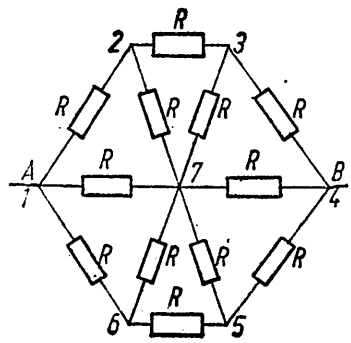


Fig. 3.44.

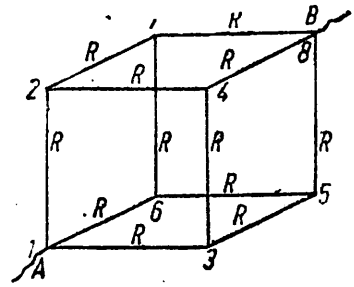


Fig. 3.46.

3.1.46. Un număr $n = 50$ de becuri sînt conectate în paralel la o sursă de t.e.m. Căderea de tensiune pe becuri este $U_1 = 220$ V. Rezistența fiecărui bec în regim de funcționare este $R = 100\ \Omega$. Rezistența firelor de legătură a becurilor la bornele sursei de t.e.m. este $R_1 = 0{,}5\ \Omega$, iar rezistența internă a sursei este $r = 0{,}5\ \Omega$. Să se calculeze:

a) căderea de tensiune la bornele sursei de t.e.m.;

b) tensiunea electromotoare E a sursei.

3.1.47. Se pune problema construirii unui reșou electric. Rezistența electrică se confecționează dintr-un conductor cu secțiunea $S = 0{,}5$ mm² și rezistivitatea $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot$m. Să se calculeze lungimea conductorului astfel încît cu ajutorul reșoului alimentat la tensiunea $U = 220$ V, cantitatea de 1,5 l de apă aflată la temperatura inițială $\theta_0 = 10°$C să ajungă în timpul $t = 5$ minute la fierbere. Se consideră că randamentul reșoului este $\eta = 0{,}8$.

3.1.48. Două baterii cu tensiunile electromotoare E_1 și respectiv E_2 ($E_1 > E_2$) și rezistențele interioare r_1 și respectiv r_2, sînt conectate în paralel (fig. 3.48).

Să se calculeze căderea de tensiune între punctele A și B.

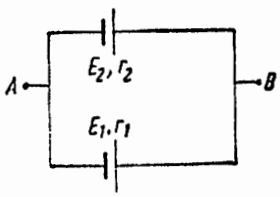


Fig. 3.48.

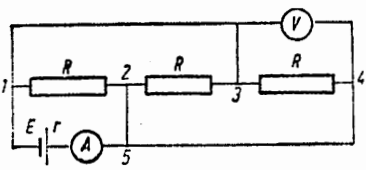


Fig. 3.49.

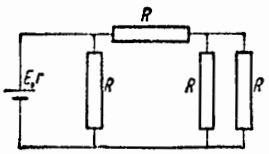


Fig. 3.50.

3.1.49. Se dă schema electrică din figura 3.49. Rezistența R_A a ampermetrului se consideră zero, iar rezistența voltmetrului $R_v = \infty$. Să se calculeze intensitatea curentului indicat de ampermetru și tensiunea indicată de voltmetru în funcție de tensiunea electromotoare E, rezistența interioară r și rezistența R.

3.1.50. Se indică schema electrică din figura 3.50. Randamentul sursei de t.e.m. este η. Mărimile E, r și η se consideră cunoscute. Să se calculeze:

a) rezistența R;

b) puterea utilă P degajată de sursa de t.e.m.

3.1.51. O baterie de tensiune electromotoare E și rezistență internă r este conectată la un rezistor de rezistență $R_1 = n_1 r$. În acest caz, randamentul bateriei este η_1. Paralel cu rezistorul R_1 se conectează un alt rezistor de rezistență $R_2 = n_2 r$. Randamentul bateriei în acest caz va fi η_2. Să se calculeze:

a) intensitățile curentului I_1 și I_2 prin baterie în cele două cazuri în funcție de intensitatea curentului I_s de scurtcircuit;

b) raportul η_2/η_1.

3.1.52. Un lift cu masa totală $M = 1\,500$ kg este ridicat uniform cu viteza $v = 0{,}5$ ms^{-1} cu ajutorul unui motor electric al cărui randament este $\eta = 0{,}9$. Tensiunea la bornele motorului este $U = 380$ V. Să se calculeze:

a) intensitatea I a curentului prin motor;

b) puterea consumată de motor.

3.1.53. O baterie de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r debitează curentul de intensitate I_1 dacă este conectată la un rezistor de rezistență R_1 și curentul de intensitate I_2 dacă este conectată la un rezistor de rezistență R_2. Să se calculeze t.e.m. E și rezistența internă r a bateriei. Mărimile I_1, I_2, R_1 și R_2 se consideră cunoscute.

3.1.54. Pentru măsurarea unei rezistențe R se utilizează un montaj ce constă dintr-o baterie cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r la care se conectează rezistorul de rezistență R ce urmează a fi determinată, iar în serie cu acesta se conectează un ampermetru de rezistență interioară R_A. Să se calculeze:

a) valoarea rezistenței R în funcție de indicația ampermetrului și mărimile E, r și R_A;

b) eroarea comisă în valoarea rezistenței R dacă eroarea în măsurarea intensității curentului este ΔI.

3.1.55. Se consideră circuitul din figura 3.51. Rezistorul R are rezistența R variabilă. Să se calculeze intensitatea curentului I prin baterie în funcție de rezistența R. Mărimile E, R_1, R_2 și r se consideră cunoscute.

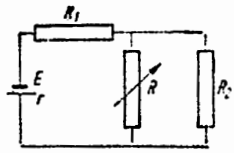


Fig. 3.51.

3.1.56. Avem la dispoziție n baterii cu tensiunea electromotoare E_1 și rezistența interioară r_1, fiecare. Conectînd bateriile în paralel la un rezistor cu rezistența R, intensitatea curentului prin circuit este I_p, iar dacă bateriile legate în serie se conectează la rezistența R, intensitatea curentului este I_s.

Să se stabilească condițiile în care $I_p > I_s$, $I_p = I_s$, $I_p < I_s$.

3.1.57. Pe soclul unui bec cu filament de wolfram scrie „220 V, 150 W". Să se calculeze rezistența filamentului la temperatura $\theta_1 = 20°C$ dacă temperatura filamentului în condiții normale de funcționare este $\theta_2 = 2\,500°C$.

Coeficientul de temperatură a rezistenței wolframului este $\alpha = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$ grad^{-1}.

3.1.58. Dacă o baterie cu tensiunea electromotoare $E = 12$ V și rezistența interioară r este conectată la un rezistor de rezistență $R = 2\ \Omega$, intensitatea curentului prin circuit este $I_1 = 5$ A. Să se calculeze:

a) intensitatea curentului I_s la scurtcircuitarea bateriei;

b) puterea maximă ce poate fi debitată de baterie în circuitul exterior.

3.1.59. Conectînd o baterie de tensiune electromotoare E și rezistență internă r la o rezistență exterioară R_1 diferența de potențial la bornele bateriei este U_1. Dacă se schimbă rezistența R_1 cu o rezistență $R_2 = nR_1$, diferența de potențial la bornele bateriei este $U_2 = kU_1$. Să se calculeze tensiunea electromotoare E a bateriei funcție de U_1, n și k. Să se efectueze calcule pentru $U_1 = 5$ V, $n = 6$ și $k = 2$.

3.1.60. O baterie cu tensiunea electromotoare E și rezistență interioară r este conectată la un rezistor de rezistență R. Să se calculeze randamentul bateriei dacă se știe că mărind rezistența R de două ori diferența de potențial la bornele bateriei crește cu 10 %.

3.1.61. Adeseori, în rețelele electrice rezistențele electrice sînt legate fie în triunghi (fig. 3.52, *a*), fie în stea (fig. 3.52, *b*). Vîrfurile triunghiului, precum și vîrfurile stelei sînt noduri ale rețelei. Se cere să se determine:

a) rezistențele laturilor stelei echivalente cînd se cunosc rezistențele triunghiului;

b) rezistențele R_{12}, R_{31} și R_{23} ale triunghiului echivalent dacă se cunosc rezistențele R_1, R_2 și R_3 ale laturilor stelei.

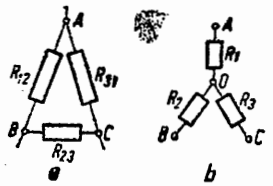


Fig. 3.52.

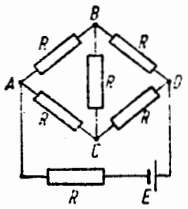


Fig. 3.53.

3.1.62. Se dă circuitul din figura 3.53. Se cere să se calculeze intensitatea I a curentului din circuit în funcție de tensiunea electromotoare E a bateriei și de rezistența R.

3.1.63. Într-un circuit electric format din conductoare de cupru de secțiune S_1 se utilizează o siguranță de plumb de secțiune S_2. Se știe că dacă temperatura conductorului crește cu $\Delta\theta$ siguranța din plumb se topește. Se cere să se calculeze secțiunea S_2 a siguranței. Temperatura inițială este θ_1, iar temperatura de topire a plumbului este θ. Se neglijează pierderile de căldură.

Se va nota cu ρ_1, d_1, c_1 și ρ_2, d_2, c_2 rezistivitatea, densitatea și căldura specifică pentru cupru și respectiv, pentru plumb, iar cu λ căldura latentă de topire a plumbului. Rezistența conductorului se notează cu R_1, iar a siguranței cu R_2.

3.1.64. Două baterii identice avînd aceeași tensiune electromotoare E și aceeași rezistență internă r se conectează una la rezistența R_1 și cealaltă la rezistența R_2. Se constată că în timpul t se degajă aceeași căldură atît în rezistența R_1 cît și în rezistența R_2.

Să se calculeze rezistența interioară r a bateriei.

3.1.65. Un bec și un reostat de rezistență $R = 10\ \Omega$ sînt conectate în serie la o sursă de tensiune electromotoare. Căderea de tensiune pe bec este $U = 40$ V. Puterea utilizată de bec și reostat este $P = 120$ V.

Să se calculeze intensitatea I a curentului din circuit.

3.1.66. Un număr de 100 de becuri de putere $P_1 = 75$ W și 50 de becuri de putere $P_2 = 25$ W se alimentează de la rețeaua de tensiune $U_1 = 220$ V prin conductoare la distanța $d = 50$ m. Se constată că tensiunea la becuri este $U_2 = 210$ V. Să se calculeze secțiunea conductorului dacă acesta este format din cupru ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m).

3.1.67. Puterea electrică $P = 200$ MW trebuie transmisă la o distanță $d = 250$ km, astfel încît pierderea de energie pe linie să nu depășească 10%. Tensiunea la furnizor este $U_1 = 400$ kV. Liniile sînt formate din cupru ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m). Să se calculeze secțiunea conductorului.

3.1.68. Se consideră circuitul din figura 3.54. Să se calculeze rezistența exterioară R_{AB} și intensitatea curentului prin rezistorul de rezistență R_1.

3.1.69. În figura 3.55 se indică schema punții Wheatstone pentru măsurarea rezistențelor. Între punctele A și B se află un conductor omogen de aceeași secțiune, conectat la o sursă de tensiune electromotoare; R_x este rezistența necunoscută, iar R_0 este o rezistență cunoscută. Între punctele C

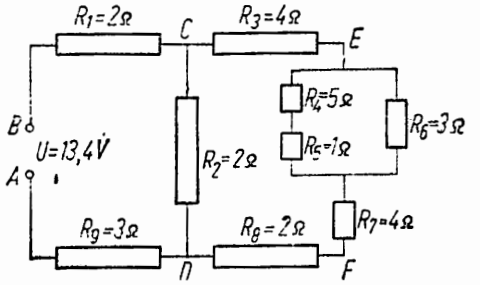


Fig. 3.54.

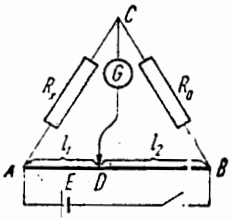


Fig. 3.55.

și D se conectează un galvanometru sensibil. Să se afle raportul R_x/R_0 când prin galvanometrul G nu avem curent electric. Rezistențele conductorului între punctele A și D și respectiv, D și B sînt proporționale cu lungimile l_1 și respectiv, l_2.

3.1.70. Să se calculeze intensitățile I_1, I_2 și I_3 în cazul schemei indicate în figura 3.56. Se dă $E_1 = 5$ V, $E_2 = 3$ V, $r_1 = r_2 = 2$ Ω și $R = 1$ Ω. Să se exprime I_1, I_2 și I_3 în funcție de E_1, E_2, r_1, r_2 și R.

3.1.71. Trei baterii cu tensiunile electromotoare $E_1 = 1{,}2$ V, $E_2 = 1{,}1$ V, $E_3 = 1{,}3$ V și rezistențele interioare $r_1 = 0{,}1$ Ω, $r_2 = 0{,}2$ Ω, $r_3 = 0{,}3$ Ω sînt conectate ca în figura 3.57 la un rezistor de rezistență $R = 2$ Ω. Să se calculeze intensitățile curenților prin fiecare baterie și prin rezistența R.

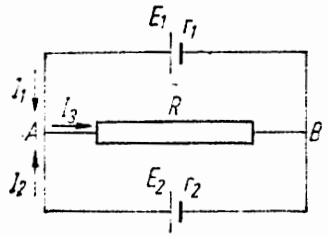


Fig. 3.56.

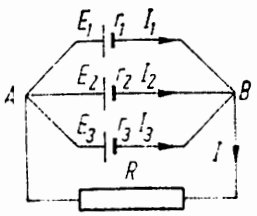


Fig. 3.57.

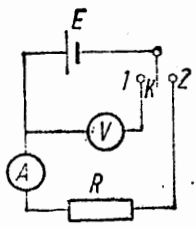


Fig. 3.58.

3.1.72. Dacă întrerupătorul K (fig. 3.58) este pus în poziția *1*, voltmetrul indică $U = 5$ V, iar dacă întrerupătorul se află în poziția *2*, ampermetrul indică intensitatea curentului $I = 2$ A. Rezistorul exterior are rezistența $R = 2$ Ω, voltmetrul are rezistența R_v, iar rezistența ampermetrului se neglijează.

Se cere:

a) să se exprime rezistența interioară a bateriei în funcție de mărimile I, U, R_v și R;

b) valoarea minimă a rezistenței voltmetrului pentru care presupunînd $R_v = \infty$ se omite în calculul rezistenței interioare r, o eroare mai mică decît 0,5%.

3.1.73. Avem un număr $N = 100$ de baterii cu tensiunea electromotoare $E_1 = 4$ V și rezistența interioară $r = 0{,}4$ Ω, fiecare. Se formează n grupe de cîte k baterii. Grupele de cîte k baterii se conectează în paralel, iar cele n astfel de grupe formate se conectează în serie. Sistemul de baterii astfel format se conectează la rezistența interioară $R = 10$ Ω.

Se cere:

a) numerele n și k astfel încît intensitatea curentului prin circuit să aibă valoarea maximă și valoarea intensității curentului prin circuit în acest caz;

b) intensitățile I_s și I_p ale curentului prin circuit dacă cele N baterii se leagă în serie, respectiv în paralel.

3.1.74. O sursă de curent cu tensiunea electromotoare $E = 20$ V și rezistența internă $r = 2$ Ω alimentează un rezistor $R_1 = 10$ Ω, legat în paralel cu o baie electrolitică de azotat de argint cu rezistența $R_2 = 15$ Ω. Se cere:

a) căderea de tensiune la bornele sursei de curent;

b) timpul în care la catod se depune masa $m = 6{,}71$ g de argint;

c) randamentul de utilizare a sursei de curent.

Echivalentul electrochimic al argintului este $k = 1{,}118 \cdot 10^{-6}$ kg/C.

3.1.75. Două rezistoare avînd rezistențele R_x și R_y se leagă în paralel la bornele unei surse de tensiune electromotoare $E = 10$ V și rezistență interioară $r = 1$ Ω. Intensitatea curentului prin circuit este $I = 2$ A, iar suma rezistențelor $R_x + R_y = 25$ Ω. Să se calculeze:

a) valorile rezistențelor R_x și R_y;

b) tensiunea la bornele sursei și intensitatea curenților prin rezistoarele R_x și R_y;

c) randamentul sursei de curent.

3.1.76. O baterie cu tensiunea electromotoare $E = 10{,}2$ V și rezistența internă $r = 1$ Ω este conectată la un rezistor de rezistență R. Puterea debitată în circuitul exterior este de $n = 13$ ori mai mică decît puterea maximă ce poate fi debitată de baterie. Se cere să se calculeze:

a) valoarea rezistenței R;

b) intensitatea curentului prin circuit și căderea de tensiune la bornele bateriei;

c) capacitatea unui condensator care conectat paralel cu rezistorul R se încarcă cu sarcina electrică $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C.

3.1.77. O baterie este formată din $n = 40$ de elemente identice cu rezistența interioară $r = 0{,}5$ Ω fiecare. Dacă bateria este conectată la un rezistor de rezistență $R = 20$ Ω, prin rezistor trece curentul electric de intensitate I_1. Dacă un număr Δn din elementele bateriei se scurtcircuitează, prin rezistor trece curentul de intensitate $I_2 = I_1/3$. Dacă bateria formată din cele n elemente se conectează la un condensator plan format din două armături de arie $S = 4 \cdot 10^{-2}$ m^2, aflate la distanța $d = 2{,}95 \cdot 10^{-4}$ m între ele, condensatorul se încarcă cu sarcina electrică $q = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$ C. În condensator se află o lamă dielectrică de grosime d, dar de arie $S/2$.

Se cere:

a) numărul Δn de elemente ce au fost scurtcircuitate;

b) tensiunea electromotoare a unui element dacă $I_1 = 1{,}5$ A;

c) capacitatea condensatorului și permitivitatea relativă ε_r, a lamei dielectrice.

3.1.78. O baterie este formată din 20 de elemente legate în serie. Tensiunea electromotoare a fiecărui element este $E_1 = 2$ V, iar rezistența interioară a elementelor se neglijează. Bateria alimentează un circuit format dintr-un voltametru cu sulfat de cupru, cu rezistența $R_1 = 20\ \Omega$, legat în serie cu rezistențele $R_2 = 100\ \Omega$ și $R_3 = 25\ \Omega$ legate în paralel. Pe catodul voltametrului se depune în timp de 10 minute masa $M = 2{,}178$ g de cupru. Echivalentul electrochimic al cuprului se ia $k = 0{,}33 \cdot 10^{-6}$ kg/C.

Să se calculeze:

a) intensitatea curentului prin circuit și prin rezistențele R_2 și R_3;

b) puterea consumată în rezistența R_3 și căldura degajată în rezistența R_2 în timp de 10 minute.

3.1.79. La rețeaua de curent continuu se conectează un reșou cu puterea $P = 2$ kW, prin conductoare de cupru ($\rho = 1{,}76 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m), la distanța $l = 28{,}5$ m de la priză. Să se calculeze secțiunea minimă a conductoarelor de legătură dacă pierderile de tensiune admise sînt $\Delta U = 2\%$ din tensiunea nominală a rețelei. Se va lua tensiunea nominală a rețelei $U_n = 220$ V și $U_n = 120$ V. Să se discute rezultatul obținut.

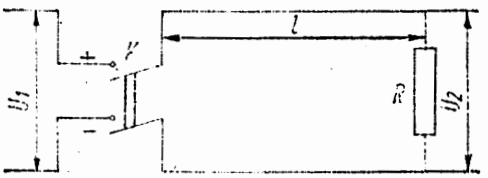


Fig. 3.59

3.1.80. Pe o linie analoagă cu cea din figura 3.59 se transmite energie electrică la un consumator aflat la distanța $l = 400$ m. Tensiunea $U_1 = 235$ V, iar intensitatea curentului prin linie este $I = 17{,}8$ A. Să se calculeze tensiunea U_2 la consumator, pierderile de tensiune ΔU în procente din tensiunea nominală $U_n = 220$ V, dacă:

a) conductoarele sînt din cupru ($\rho_1 = 1{,}76 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m) și secțiune $S_1 = 10$ mm²;

b) conductoarele sînt din oțel ($\rho_2 = 0{,}13 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$ m) și secțiunea $S_2 = 35$ mm².

De cîte ori trebuie să fie mai mare secțiunea conductorului din oțel decît cea a conductorului din cupru, pentru a avea aceeași pierdere de tensiune pe linie, tensiunea nominală și rezistența de sarcină rămînînd aceleași?

3.1.81. De la un generator cu tensiunea electromotoare $E = 120$ V și rezistența interioară $r = 1\ \Omega$, energia se transmite la distanța $l = 171$ m cu ajutorul unei linii din conductoare de cupru cu secțiunea $S = 4$ mm². Să se calculeze intensitatea curentului în circuit, tensiunea la bornele generatorului U_1, tensiunea la bornele consumatorului U_2 și pierderea de tensiune ΔU pe linie dacă:

a) rezistența consumatorului este $R = 10\ \Omega$;

b) consumatorul este scurtcircuitat;

c) consumatorul este deconectat.

3.1.82. În figura 3.60 se indică modul de conectare a unui voltmetru și a unui ampermetru într-un circuit de curent continuu. Rezistența de sarcină este R, rezistența internă a generatorului este r, rezistența ampermetrului este R_A, iar a voltmetrului R_v. Tensiunea electromotoare E a generatorului se consideră constantă.

Se cere:

a) eroarea relativă în măsurarea intensității curentului prin circuit dacă se deconectează voltmetrul;

b) eroarea relativă în măsurarea diferenței de potențial cu voltmetrul cînd rezistența de sarcină R este deconectată și cînd este conectată la generator.

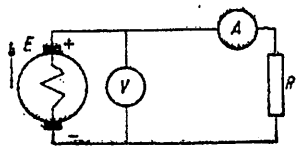


Fig. 3.60.

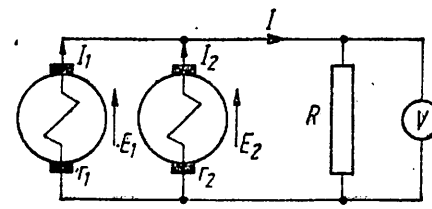


Fig. 3.61.

3.1.83. Două generatoare de curent continuu cu tensiunile electromotoare E_1 și E_2 și rezistențele interioare $r_1 = 0{,}5\ \Omega$ și respectiv, $r_2 = 0{,}2\ \Omega$ sînt conectate în paralel la o rezistență de sarcină $R = 2\ \Omega$ (fig. 3.61). Se consideră $E_2 = 125$ V.

Se cere:

a) intensitățile curenților I_1 și I_2 prin cele două generatoare, curentul I și tensiunea U la consumator, precum și ecuația balanței puterilor dacă $E_1 = 130$ V;

b) valoarea tensiunii electromotoare E_1 astfel încît prin cele două generatoare intensitățile I_1 și I_2 ale curenților să fie egale între ele;

c) tensiunea electromotoare E_1 pentru ca intensitatea curentului prin primul generator să fie zero;

d) tensiunea electromotoare E_1 astfel încît intensitatea curentului prin cel de-al doilea generator să fie zero.

3.1.84. Două baterii cu tensiunile electromotoare $E_1 = 10$ V și $E_2 = 4$ V sînt conectate în circuitul indicat în figura 3.62. Rezistențele interioare ale bateriilor se neglijează, iar rezistențele exterioare au valorile $R_1 = R_4 = 2\ \Omega$ și $R_2 = R_3 = 4\ \Omega$.

Să se calculeze intensitățile I_2 și I_3 ale curenților prin rezistoarele R_2 și R_3.

3.1.85. Bateriile cu tensiunile electromotoare $E_1 = 2{,}1$ V și respectiv $E_2 = 1{,}9$ V sînt conectate în circuitul indicat în figura 3.63. Rezistențele

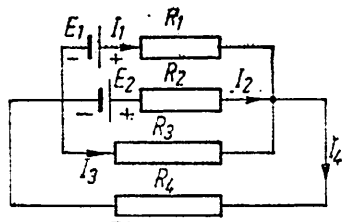


Fig. 3.62.

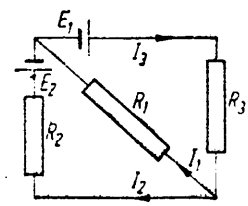


Fig. 3.63.

interioare au valorile $R_1 = 45\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ și $R_3 = 10\ \Omega$. Rezistențele interioare ale bateriilor se neglijează. Să se calculeze intensitățile I_1, I_2 și I_3 ale curenților prin cele trei rezistențe exterioare.

3.1.86. Într-un circuit electric ce constă din conductoare de cupru cu secțiunea $S_1 = 3\ mm^2$ se conectează o siguranță de plumb cu secțiunea $S_2 = 1\ mm^2$. Se consideră că în cazul unei scurtcircuitări, întreaga căldură degajată este utilizată la încălzirea circuitului. Temperatura inițială a siguranței este $\theta_0 = 17°C$.

Să se calculeze la ce creștere a temperaturii $\Delta\theta$ a fost proiectată rețeaua, prin alegerea secțiunilor indicate.

3.1.87. Două conductoare paralele, infinit de lungi, se află la distanța $d = 10$ cm unul de altul, în aer. Prin fiecare conductor trece un curent de intensitate $I = 60$ A, în același sens. Se cere să se calculeze:

a) inducția cîmpului magnetic într-un punct aflat la distanța $d_1 = 5$ cm de unul din conductoare și la distanța $d_2 = 12$ cm de celălalt conductor;

b) forța maximă ce acționează în punctul respectiv asupra unui electron accelerat la o diferență de potențial $\Delta U = 300$ V.

3.1.88. O baterie cu tensiunea electromotoare $E = 12$ V și rezistența interioară $r = 0{,}9\ \Omega$ alimentează o bobină și un rezistor, conectați în paralel. Bobina are lungimea $l = 20$ cm și un număr total de $N = 300$ spire. Rezistența firului din care este confecționată bobina este $R_1 = 3\ \Omega$, iar rezistorul are rezistența $R_2 = 7\ \Omega$. Diametrul spirelor bobinei este $D = 4$ cm. Să se calculeze:

a) tensiunea la bornele bateriei și randamentul bateriei;

b) intensitatea cîmpului magnetic H pe axa bobinei;

c) fluxul magnetic Φ printr-o spiră a bobinei.

3.1.89. Se consideră un solenoid de lungime $l = 0{,}4$ m și diametru mediu $D = 0{,}06$ m. Numărul total de spire înfășurate pe solenoid este $N = 100$, iar miezul feromagnetic are $\mu = 500\ \mu_0$.

Se cere:

a) inducția magnetică B_1 în interiorul solenoidului și fluxul magnetic Φ_1, dacă prin solenoid trece curentul de intensitate $I = 4$ A;

b) valoarea medie a tensiunii electromotoare induse în solenoid dacă acesta așezat într-un cîmp magnetic de inducție $B = 5$ T (cu axa paralelă cu $\vec{B}$), se rotește cu 180° în timpul $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ s.

3.1.90. Circuitul indicat în figura 3.65 este format din rezistența $R = 10\ \Omega$, o bobină cu inductanța $L = \frac{1}{10\pi}$ H și un condensator cu capacitatea $C = \frac{1}{2\pi} 10^{-3}$ F, legate în serie. La bornele circuitului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală cu valoarea eficace $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz.

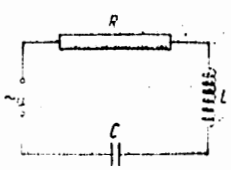


Fig. 3.65.

Să se calculeze:

a) impedanța circuitului și valoarea eficace a intensității curentului prin circuit;

b) defazajul dintre tensiune și curent, precum și tensiunile la bornele rezistenței, bobinei și condensatorului;

c) puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă din circuit;

d) intensitatea curentului prin circuit dacă se clachează (scurtcircuitează) condensatorul.

3.1.91. Un dinam șunt are tensiunea electromotoare $E = 120$ V, rezistența indusului $r = 0{,}5\ \Omega$ și rezistența inductorului $R_i = 12\ \Omega$ (fig. 3.67).

Să se determine:

a) intensitatea curentului la consumator astfel încît randamentul electric al dinamului să fie maxim;

b) rezistența consumatorului corespunzătoare intensității maxime a curentului;

c) intensitățile I_r și I_i ale curentului prin indus și respectiv, prin inductor.

* **3.1.92.** Un circuit oscilant constă dintr-un condensator plan cu aria armăturilor $S = 100$ cm^2, fiecare și o bobină cu inductanța $L = 10^{-6}$ H. Circuitul astfel construit se află în rezonanță pentru undele electromagnetice cu lungimea de undă $\lambda = 10$ m. Să se calculeze distanța d între armăturile condensatorului dacă:

a) între armături se află aer;

b) între armături se află dielectric cu $\varepsilon_r = 5$.

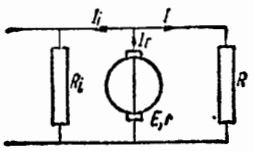


Fig. 3.67.

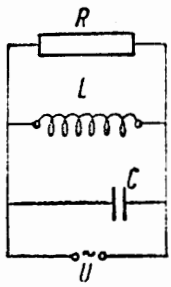


Fig. 3.68.

3.1.93. Să se scrie impedanța Z și tg φ, unde φ este defazajul între tensiune și curent, pentru un circuit în curent alternativ în care avem:

a) rezistența R și capacitatea C conectate în serie;

b) rezistența R și capacitatea C conectate în paralel;

c) rezistența R și inductanța L conectate în serie;

d) rezistența R și inductanța L conectate în paralel;

e) rezistența R, capacitatea C și inductanța L conectate în serie.

3.1.94. Circuitul din figura 3.68 este format din rezistența $R = 10\ \Omega$, o bobină de inductanță $L = \frac{1}{10\pi}$ H și un condensator cu capacitatea $C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-3}$ F, legate în paralel. La bornele circuitului se aplică o tensiune alternativă cu valoarea eficace $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Să se calculeze:

a) intensitatea curentului prin fiecare element din circuit și intensitatea curentului prin sursa de curent alternativ;

b) impedanța circuitului și defazajul dintre curentul rezultant și tensiunea aplicată al borne.

c) puterea activă, puterea aparentă și puterea reactivă din circuit.

3.1.95. Datorită curentului alternativ din bobina primară a unui transformator se creează în miezul feromagnetic fluxul magnetic Φ care se exprimă prin una din relațiile:

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 90°); \quad \Phi = \Phi_m \sin \omega t, \quad \Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 180°).$$

Se cere:

a) să se scrie, pentru cazurile indicate, forma analitică a tensiunii electromotoare induse în bobina secundară și să se discute problema defazajului dintre fluxul Φ și t.e.m. E_2;

b) dacă frecvența curentului alternativ ce alimentează bobina primară este $\nu = 50$ Hz, iar amplitudinea fluxului magnetic este $\Phi_m = 27 \cdot 10^{-4}$ Wb, să se calculeze amplitudinea tensiunii electromotoare în bobina secundară și indicația voltmetrului conectat la această bobină (fig. 3.69). Numărul de spire în bobina secundară este $N_2 = 200$.

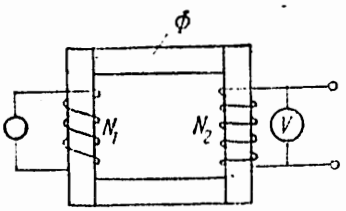


Fig. 3.69.

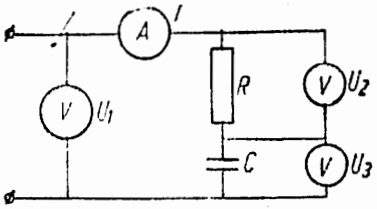


Fig. 3.70.

3.1.96. Pentru circuitul indicat în figura 3.70, valorile instantanee ale tensiunii și intensității curentului se scriu sub forma:

$$U = 169 \sin(\omega t - 90°)\text{V}, \quad i = 5{,}64 \sin(\omega t - 30°)\text{A}.$$

Frecvența $\nu = 50$ Hz.

Se cere:

a) să se stabilească indicațiile I, U_1, U_2 și U_3 ale aparatelor indicate în figură;

b) rezistența R și capacitatea C a condensatorului.

3.1.97. Într-un circuit de curent alternativ se conectează o rezistență activă $R = 10\ \Omega$ în serie cu o bobină și un condensator legate în paralel, între ele. Inductanța bobinei este $L = 0{,}01$ H, iar capacitatea condensatorului este $C = 400\ \mu$F. Tensiunea la bornele circuitului este $U = 120$ V.

Se cere:

a) frecvența ν_0 pentru care are loc rezonanța curenților în circuit, stabilindu-se intensitățile curenților și tensiunile pe fiecare element din circuit pentru $\nu < \nu_0$, $\nu = \nu_0$ și $\nu > \nu_0$;

b) să se studieze circuitul indicat pentru $\nu \to 0$ și $\nu \to \infty$.

3.1.98. Să se stabilească modul de variație a intensității curenților de linie I_l și a puterii într-un circuit trifazic, dacă pentru o tensiune de linie U_l neschimbată, trei consumatori identici, cu aceeași rezistență Z_f, se leagă din stea în triunghi.

Cum trebuie schimbate rezistențele consumatorilor pentru ca la trecerea din stea în triunghi, puterea, curenții de linie și cos φ să rămînă neschimbate?

3.1.99. La capătul unei linii electrice aeriene de lungime $l = 2$ km, formată din fir de cupru cu secțiunea $S = 50$ mm^2, se conectează un consumator cu puterea $P_2 = 10$ kW, avînd factorul de putere $\cos \varphi_2 = 0{,}8$. Reactanța inductivă și capacitivă a liniei este 0,4 Ω/km.

Să se stabilească tensiunea U_1 a furnizorului pentru ca la consumator să avem tensiunea $U_2 = 380$ V, dacă:

a) linia este monofazică cu două conductoare;

b) linia este trifazică cu trei conductoare.

3.1.100. Un transformator trifazic, la care bobina primară și cea secundară sînt legate în stea, lucrează într-o rețea de iluminare de putere $P = 45$ kW. Tensiunea primară este $U_1 = 6$ kV, iar tensiunea secundară este $U_2 = 220$ V. Randamentul transformatorului este $\eta = 0{,}9$.

Să se calculeze intensitățile curenților în bobinele primare și secundare.

3.2. PROBLEME CU INDICAȚII ȘI REZULTATE

3.2.1. Să se calculeze forța cu care s-ar respinge două sarcini electrice pozitive egale cu 1 C fiecare, aflate în vid la distanța de 100 m una de alta.

3.2.2. Două sfere mici încărcate cu sarcini electrice pozitive se află în vid la distanța $d = 2$ m și se resping cu o forță $F = 1$ N. Suma sarcinilor fiind $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ C, să se afle cum este distribuită aceasta între cele două sfere.

3.2.3. Două particule identice încărcate electric cu sarcinile $q_1 = +3 \cdot 10^{-9}$ C și respectiv, $q_2 = -12 \cdot 10^{-9}$ C se află în vid la distanța $d = 3$ cm.

1°. Să se calculeze forța de atracție dintre cele două particule.

2°. Se pun în contact cele două particule și apoi se separă din nou la distanțe $d = 3$ cm. Ce forță se exercită în acest caz între cele două particule?

3.2.4. Trei particule încărcate electric cu sarcinile: $q_1 = +2 \cdot 10^{-8}$ C, $q_2 = +3 \cdot 10^{-8}$ C și $q_3 = +4 \cdot 10^{-8}$ C se află în vid ocupînd vîrfurile unui triunghi echilateral de latură $l = 5$ cm.

Să se calculeze forța la care este supusă particula de sarcină q_3.

3.2.5. Trei particule încărcate cu sarcinile electrice q_1, q_2 și respectiv, q_3 se află în vid ocupînd vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $l = 9$ cm. Particulele cu sarcinile q_1 și q_2 se resping cu o forță $F_{1-2} = 0{,}27 \cdot 10^{-3}$ N. În mod analog, sarcinile q_2, q_3 și q_3, q_1 se resping cu forțele $F_{2-3} = 0{,}48 \cdot 10^{-3}$ N, respectiv $F_{3-1} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ N. Să se calculeze sarcinile q_1, q_2 și q_3.

3.2.6. Trei particule identice, de masă $m = 10$ g fiecare, sînt suspendate separat dintr-un punct comun, cu fire izolante de lungime $l = 1$ m. Particulele fiind încărcate cu sarcini electrice identice se depărtează, ocupînd pozițiile vîrfurilor unui triunghi echilateral cu latura $r = 0{,}1$ m.

Să se deducă valoarea sarcinii electrice cu care este încărcată fiecare particulă.

3.2.7. Trei particule încărcate cu sarcina electrică $q = +4 \cdot 10^{-9}$ C fiecare sînt așezate în trei vîrfuri ale unui pătrat cu latura $l = 0{,}8$ m.

Să se calculeze forța care s-ar exercita asupra unei a patra particule cu sarcina $q' = -2 \cdot 10^{-9}$ C aflată: 1°. în cel de-al patrulea vîrf a pătratului; 2°. în centrul pătratului.

3.2.8. Două sfere conductoare identice, de masă $m = 9{,}81$ g fiecare și rază $r = 1$ cm sînt suspendate într-un același punct prin două fire izolante, de aceeași lungime $l = 19$ cm. Cu ajutorul unei a treia sfere, identică cu primele și încărcată cu sarcina electrică q, se încarcă concomitent — prin contact, primele două sfere. După încărcare, cea de-a treia sferă se depărtează, iar cele două sfere se depărtează reciproc, firele făcînd între ele un unghi $2\alpha = 90°$. Să se determine valoarea sarcinii q cu care a fost încărcată inițial cea de-a treia sferă.

3.2.9. Două sarcini electrice punctiforme $q_1 = +5 \cdot 10^{-4}$ C și $q_2 = -5 \cdot 10^{-4}$ C se află la distanța $d = 80$ cm.

1°. Să se calculeze valorile intensității cîmpului electric și a potențialului electric în punctul M aflat pe mediatoarea segmentului d, la distanța $a = 30$ cm de acesta.

2°. Să se calculeze lucrul mecanic necesar deplasării unei sarcini punctiforme $q_3 = 2 \cdot 10^{-6}$ C din punctul M în punctul N situat pe dreapta care unește sarcinile q_1 și q_2 la distanța $b = 20$ cm de sarcina q_1 și în afara sarcinilor.

3.2.10. Să se calculeze forța electrostatică de respingere dintre doi protoni din nucleul unui atom de fier, dacă distanța dintre cei doi protoni este de $4 \cdot 10^{-15}$ m. Cum se explică totuși stabilitatea nucleului atomului?

3.2.11. În vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $l = 52$ cm sînt plasate sarcinile electrice: $q_1 = 2 \cdot 10^{-10}$ C, $q_2 = 3 \cdot 10^{-9}$ C și $q_3 = -5 \cdot 10^{-10}$ C. Sarcinile se consideră că sînt punctiforme și aflate în vid. Să se calculeze valoarea potențialului electric în centrul triunghiului.

3.2.12. Două sarcini electrice punctiforme $+q$ și $-q'$ de semne opuse și fără să aibă aceeași valoare absolută sînt așezate într-o poziție relativă oarecare, fixă în timp. Să se arate că suprafața echipotențială de $V = 0$ din apropierea lor este o sferă, oricare ar fi sarcinile considerate.

Ce se poate spune în cazul în care cele două sarcini au valori absolute egale?

3.2.13. La suprafața solului se află sarcina electrică $Q = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ C. Pe verticala locului la înălțimea $h_A = 4$ m se află o mică sferă de masă $m = 1$ g încărcată cu sarcina $q = 6 \cdot 10^{-8}$ C și de același semn cu Q. Sfera este lăsată liberă și se deplasează pe verticală.

Să se calculeze: a) distanța h_B pînă la care sfera se apropie de sarcina Q; b) intensitatea cîmpului și valoarea potențialului electric în punctul în care forța electrică echilibrează greutatea sferei; c) să se studieze, calitativ, mișcarea bilei în condițiile problemei.

3.2.14. Să se calculeze accelerația a pe care un electron o imprimă unui alt electron, aceștia aflîndu-se în vid la distanța $d = 1$ mm unul de altul.

Se dau: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

3.2.15. La distanța x de un plan conductor P, infinit întins și menținut la potențial zero se află o sarcină electrică punctiformă q.

a) Care este forța de interacțiune între particula încărcată și planul conductor?

b) Care este valoarea intensității cîmpului electric într-un punct M situat de aceeași parte cu particula față de plan și în imediata apropiere a planului?

3.2.16. Două semiplane conductoare foarte întinse și neîncărcate electric fac între ele un unghi diedru de 90°. Într-un punct M aflat pe bisectoarea diedrului celor două plane la distanța $h = 2$ cm față de fiecare din cele două plane se află o particulă încărcată cu sarcina $q = 4 \cdot 10^{-8}$ C. Care este forța electrică la care este supusă particula din M?

3.2.17. a) Să se calculeze capacitatea electrică C a unei sfere conductoare goale, de rază $R = 1$ m și izolată.

b) Ce rază ar trebui să aibă o sferă conductoare pentru a avea capacitatea electrică de un farad?

c) Aceeași întrebare de la b) — pentru capacitatea de 1 pF?

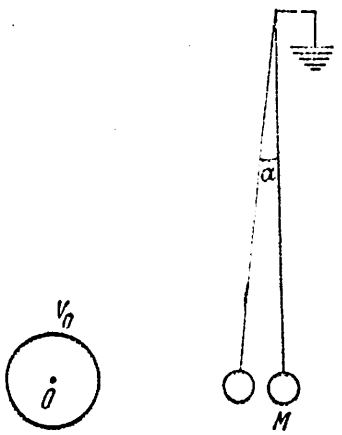


Fig. 3.71.

3.2.18. 1°. Să se calculeze intensitatea cîmpului și potențialul electric într-un punct M la distanța $OM = 50$ cm de centrul O al unei sfere conductoare de rază $R = 20$ cm, izolată și aflată la un potențial $V_0 = 45\,000$ V.

2°. Se așază în punctul M o sferă mică de rază $r = 0{,}5$ cm și izolată. Să se calculeze potențialul electric și sarcina sa.

3°. Sfera din M este pusă în legătură cu solul. Să se calculeze potențialul electric și sarcina acesteia în aceste condiții.

4°. Sfera din M, în legătură cu pămîntul, este suspendată cu un fir de lungime l; să se calculeze unghiul pe care îl face firul cu verticala. Greutatea sferei este 0,02 N, figura 3.71.

3.2.19. Platanul unei balanțe, de rază $R = 6$ cm, constituie armătura superioară a unui condensator plan, cea de-a doua armătură fiind un platan identic, paralel și la distanța $d = 1$ cm. Condensatorul este încărcat la o tensiune $V = 10^4$ V și apoi izolat. Ce masă are corpul care trebuie așezat pe al doilea platan al balanței pentru a restabili echilibrul?

3.2.20. Un condensator plan cu suprafața unei armături $S = 100$ cm^2 și distanța dintre armături $d = 1$ cm are între armături vid. Condensatorul este conectat la o sursă de tensiune constantă $U = 500$ V și după încărcare se izolează. Ce cere:

a) sarcina înmagazinată în condensator;

b) forța de atracție ce se exercită între armăturile condensatorului;

c) energia înmagazinată în cîmpul condensatorului;

d) lucrul mecanic cheltuit pentru depărtarea armăturilor de la distanța d la distanța $d' = 2d$ (condensatorul fiind încărcat și izolat);

e) forța F' exercitată între armăturile condensatorului, după depărtarea armăturilor.

f) energia înmagazinată în cîmpul condensatorului după depărtarea armăturilor.

3.2.21. Două particule încărcate electric cu sarcinile $q_1 = +2 \cdot 10^{-6}$ C și respectiv $q_2 = +2 \cdot 10^{-7}$ C se găsesc în vid la distanța $d = 2$ m una de alta. Să se calculeze:

1°. forța de respingere dintre cele două particule;

2°. lucrul necesar pentru a apropia sarcinile pînă la $d' = 1$ m;

3°. în condițiile în care cele două particule sînt niște sfere conductoare, să se determine raportul R_1/R_2 al razelor, astfel ca unind cele două sfere printr-un conductor, să nu aibă loc transfer de sarcină între ele.

3.2.22. Între un nor încărcat cu electricitate pozitivă și pămînt se stabilește un cîmp electric cu intensitatea $E = 10^6$ V/m. În acest cîmp se află o picătură de apă cu raza $r = 3 \cdot 10^{-4}$ cm. Să se determine sarcina q pe care o are picătura de apă, știind că ea se află în echilibru sub acțiunea cîmpului electric și gravitației. Se dă $\rho_a = 10^3$ kgm^{-3}.

3.2.23. Două sfere conductoare identice, de rază $R = 10$ cm, încărcate cu aceeași cantitate de sarcină electrică pozitivă sînt izolate și așezate în vid, la distanța $d = 3$ m una de alta. În felul acesta între sfere se exercită o forță de respingere $F_1 = 9 \cdot 10^{-5}$ N.

Se leagă printr-un conductor, una din sfere la pămînt. Să se calculeze sarcina q' de pe aceasta și forța F_2 de interacțiune dintre cele două sfere, după legarea la pămînt.

3.2.24. În figura 3.72 este reprezentat un condensator sferic constituit dintr-o sferă S, armătură interioară de rază $R = 20$ cm menținută la potențialul zero și o sferă S' armătură externă concentrică, cu pereții foarte subțiri, de rază $R' = 22$ cm și menținută la potențialul $V' = 9\,000$ volți.

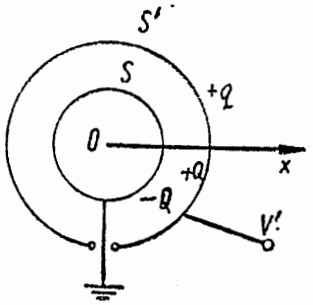


Fig. 3.72.

1°. Să se calculeze sarcinile electrice pe diferitele fețe ale sferelor.

2°. Să se calculeze valoarea intensității cîmpului electric într-un punct oarecare pe semidreapta Ox, pornind din centrul comun al celor două sfere.

3.2.25. Două sfere metalice goale, cu pereți subțiri și de raze R_1 și R_2 ($R_2 > R_1$), sînt așezate concentric, în vid. Să se determine:

1°. sarcinile q_1 și q_2 de pe fețele exterioare ale celor două sfere, acestea aflîndu-se la potențialele V_1 și respectiv V_2;

2°. densitățile superficiale de sarcină de pe cele două sfere;

3°. intensitatea cîmpului și potențialul electric într-un punct M aflat pe semiaxa Ox, la distanța $OM = x$ de centrul comun al celor două sfere.

3.2.26. O sferă metalică goală cu raza $R = 2$ cm produce, la distanța $d = 12$ cm, în vid, un cîmp electric cu intensitatea $E = 314$ V/m. Să se calculeze densitatea superficială σ a distribuției sarcinii pe sferă.

3.2.27. Un condensator cu capacitatea $C_1 = 8 \cdot 10^{-12}$ F este încărcat la o diferență de potențial $V_0 = 3\,000$ volți și apoi deconectat de la sursă și legat în paralel cu un al doilea condensator de capacitate $C_2 = 4 \cdot 10^{-12}$ F și neîncărcat.

1°. Care va fi diferența de potențial la bornele acestui sistem?

2°. Care este energia acumulată de condensatorul de capacitate C_1 de la sursa de încărcare și care este energia înmagazinată în sistem după legarea celor două condensatoare?

3.2.28. I. Două condensatoare de capacitate $C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ F și respectiv $C_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ F se încarcă, fiecare de la cîte o sursă de t.e.m. $U_1 = 1\,000$ V și respectiv $U_2 = 4\,000$ V și apoi se izolează. Să se calculeze:

a) sarcinile Q_1 și respectiv Q_2 cu care s-au încărcat condensatoarele;

b) energiile W_1 și W_2 acumulate de fiecare condensator prin încărcare.

II. Cele două condensatoare încărcate ca la I se leagă în paralel. Să se calculeze:

a) capacitatea C a sistemului; b) tensiunea U la bornele sistemului; c) energia electrostatică înmagazinată în sistem.

3.2.29. Dispozitivul reprezentat în figura 3.73 este constituit din două sfere conductoare cu centrele în A și B, de rază $R = 0{,}9$ cm suspendate de fire metalice foarte fine. $OA = OB = a = 18$ cm. Masa unei sfere este $m = 0{,}5$ g. Sistemul este legat la polul unei mașini electrostatice, în echilibru, printr-un fir metalic lung și fin. Să se calculeze potențialul electric al sursei, știind că unghiul făcut de cele două pendule este $2\alpha = 60°$.

3.2.30. Cei doi protoni din nucleul atomului de heliu se găsesc la distanța de $2 \cdot 10^{-15}$ m. Care este valoarea energiei potențiale datorate interacțiunii electrostatice dintre cei doi protoni?

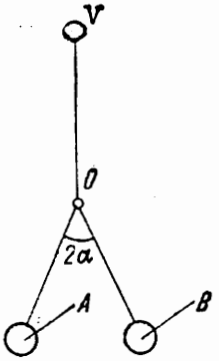


Fig. 3.73.

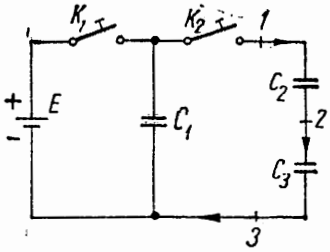


Fig. 3.74.

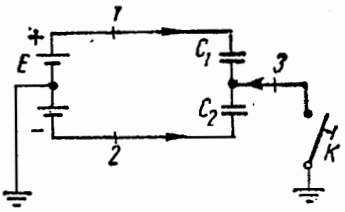


Fig. 3.75.

3.2.31. Trei sarcini electrice punctiforme $q_1 = +10^{-7}$ C, $q_2 = +2 \cdot 10^{-7}$ C și $q_3 = -4 \cdot 10^{-7}$ C se află în vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $l = 10$ cm. Să se calculeze energia datorată intersecțiunilor reciproce dintre cele trei sarcini.

3.2.32. Două condensatoare de capacitate $C_1 = 10^{-10}$ F și respectiv $C_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ F sînt legate în serie și gruparea se conectează la o sursă de t.e.m. continuă cu $U = 300$ V și după încărcare se decuplează de la sursă. Să se calculeze: a) capacitatea sistemului; b) sarcina Q de pe armăturile condensatoarelor; c) tensiunile la bornele fiecărui condensator.

3.2.33. În montajul din figura 3.74, se cunosc: $E = 100$ V, $C_1 = 10^{-6}$ F, $C_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ F, $C_3 = 3 \cdot 10^{-6}$ F. Mai întîi se închide întrerupătorul k_1, apoi se deschide k_1 și se închide întrerupătorul k_2. Să se calculeze sarcinile q_1, q_2 și q_3 care traversează secțiunile 1, 2 și 3 în direcțiile indicate de săgeți.

3.2.34. Două condensatoare cu $C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ F, respectiv $C_2 = 3 \cdot 10^{-6}$ F legate în serie sînt cuplate la o sursă de t.e.m. $E = 120$ V, al cărui punct neutru este pus la pămînt (fig. 3.75). Firul care leagă cele două condensatoare poate fi pus la pămînt cu ajutorul comutatorului k. Să se determine sarcinile q_1, q_2 și q_3 care traversează secțiunile 1, 2 și 3 în sensul indicat de săgeți pe figură, după închiderea comutatorului.

3.2.35. Se încarcă un condensator cu capacitatea $C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ F sub o tensiune $U_1 = 1\,000$ V și apoi se decuplează de la sursă și se asociază în paralel cu un al doilea condensator cu $C_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F. Să se caculeze: 1°. sarcina electrică a sistemului;

2°. diferența de potențial dintre armăturile fiecărui condensator;

3°. energia electrostatică a grupării;

4°. diminuarea energiei datorată legării condensatoarelor.

3.2.36. Capacitatea unui condensator variabil variază de la $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ F la $0{,}95 \cdot 10^{-9}$ F între cele două poziții extreme. În poziția corespunzătoare capacității maxime, condensatorul este încărcat sub o tensiune de 400 V și apoi izolat. Se rotește butonul pînă ce condensatorul se află în poziția corespunzătoare capacității minime. Să se calculeze pentru această poziție:

1°. diferența de potențial dintre armături;

2°. energia condensatorului;

3°. energia cheltuită în cursul rotirii.

3.2.37. Între armăturile orizontale ale unui condensator plan, dielectric fiind aerul, se află o picătură de ulei cu masa $m = 3 \cdot 10^{-13}$ g care se găsește în echilibru datorită diferenței de potențial aplicate armăturilor condensatorului. Picătura de ulei poartă o sarcină electrică $q = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ C. Cunoscînd aria armăturii $S = 4$ cm^2, distanța dintre armături $d = 2$ cm și luînd $g = 10$ m/s^2, să se determine:

1°. numărul de sarcini elementare conținute în sarcina picăturii;

2°. capacitatea condensatorului;

3°. diferența de potențial U ce trebuie aplicată armăturilor condensatorului, pentru ca picătura să stea în echilibru între armături;

4°. sarcina electrică cu care se va încărca condensatorul la această tensiune.

3.2.38. O sferă metalică cu pereții subțiri are raza $R = 0{,}2$ m. În interiorul acestei sfere se află o bilă metalică cu raza $r = 0{,}10$ m, așezată concentric cu prima și legată la pămînt printr-un conductor care trece printr-un orificiu al sferei exterioare (fig. 3.76). Sfera exterioară este încărcată cu sarcina $Q = 10^{-8}$ C. Să se determine:

1°. potențialul V al sferei exterioare;

2°. capacitatea electrică a sistemului format din cele două sfere concentrice de raza R și r.

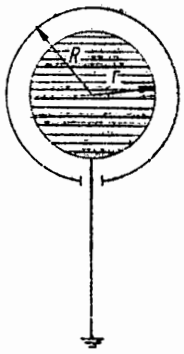


Fig. 3.76.

3.2.39. Se consideră un condensator plan cu suprafața unei armături S și distanța dintre armături d.

Să se calculeze capacitatea condensatorului pentru următoarele cazuri: a) dielectric este vidul; b) spațiul dintre armături este umplut cu două straturi de dielectric de grosimi egale și paralel cu armăturile și avînd permitivitățile relative ε_1 și respectiv ε_2; c) spațiul dintre armături este umplut cu două straturi de dielectric de grosimi egale, suprafața de separare dintre ele fiind perpendiculară pe armături și avînd permitivitățile relative ε_1 și ε_2.

3.2.40. Două sfere conductoare A și B sînt încărcate cu electricitate negativă. Sfera A are raza $R_1 = 1$ cm și sfera B, raza $R_2 = 3$ cm. Sferele se află în vid și distanța dintre centrele lor fiind $d_1 = 12$ cm, ele se resping cu o

forță $F_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ N. Sferele se pun pentru un timp scurt, în contact și apoi se depărtează din nou la distanța d_1. De data aceasta, sferele se resping cu o forță $F_2 = 6 \cdot 10^{-5}$ N.

Lăsînd liberă sfera B, aceasta se depărtează de sfera A pe o distanță $d_2 = 40$ cm, unde va avea viteza $v = 6 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1}. Se cer:

1°. cantitățile de electricitate cu care au fost încărcate inițial sferele A și B;

2°. potențialele electrice ale sferelor A și B, înainte și după ce au fost puse în contact;

3°. masa sferei B;

4°. numărul de electroni cedați de o sferă celeilalte, atunci cînd sferele A și B sînt puse în contact;

3.2.41. Să se calculeze viteza medie cu care se deplasează electronii de conducție, în mișcarea lor dirijată, într-un conductor de cupru cu secțiunea de 4 mm^2, atunci cînd prin conductor circulă un curent electric constant de 10 A. Se știe că fiecare atom de cupru dă un singur electron de conducție. Se dau: densitatea cuprului $d_{Cu} = 8{,}92 \cdot 10^3$ kgm^{-3}, masa atomică $A_{Cu} = 63{,}5$ și numărul lui Avogadro $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomi/atom gram.

3.2.42. Conform teoriei lui Bohr, în atomul de hidrogen în starea fundamentală, un electron se rotește în jurul nucleului cu o viteză $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ ms^{-1} pe o orbită circulară de rază $r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m. Să se calculeze intensitatea curentului electric transportat de electron.

3.2.43. Un conductor este parcurs de un curent electric constant cu intensitatea de 5 A. Să se calculeze numărul de electroni care traversează secțiunea normală a conductorului în unitatea de timp.

3.2.44. Un curent electric constant transportă prin secțiunea normală a conductorului o cantitate de electricitate de 72 C în timp de o oră. Conductorul din argint, cu secțiune circulară de rază 0,5 mm, conține $5{,}8 \cdot 10^{22}$ electroni de conducție într-un cm^3. Să se calculeze:

a) intensitatea curentului care trece prin conductor;

b) viteza medie a electronilor de conducție.

3.2.45. Să se determine raportul dintre secțiunile a două conductoare din materiale diferite avînd rezistivitățile ρ_1, respectiv ρ_2 și densitățile d_1 și respectiv d_2; cele două conductoare au aceeași masă și aceeași rezistență electrică.

3.2.46. Să se calculeze rezistența R_0 la 0°C, a unui fir de fier cu secțiunea circulară $S = 0{,}5$ mm^2 și lungimea $l = 1$ m. Care va fi diferența de potențial între extremitățile acestui fir atunci cînd este parcurs de un curent cu intensitatea $I = 3$A, temperatura conductorului fiind de 100° C?

Se dau: $\rho_{Fe} = 10^{-7}$ Ω m; $\alpha_{Fe} = 0{,}005$ K^{-1}.

3.2.47. Pentru executarea unei bobine s-au folosit 12,45 kg cupru cu conductivitatea $\sigma = 56 \cdot 10^6\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$ și densitatea $d = 8{,}9 \cdot 10^3$ kgm^{-3}. Bobina are rezistența $R = 6{,}25$ Ω. Să se calculeze lungimea și secțiunea conductorului folosit.

3.2.48. Valoarea rezistenței înfășurării unui electromagnet este $R_1 = 40$ Ω la temperatura mediului ambiant $\theta_1 = 15$°C. În regim de funcționare, rezistența înfășurării este $R_2 = 50$ Ω. Să se deducă temperatura conductorului în regim de funcționare știind că coeficientul de temperatură al acestuia este $\alpha = 0{,}004$ K^{-1}.

3.2.49. Două conductoare, unul de cupru cu rezistivitatea $\rho_{Cu} = 17{,}24 \cdot 10^{-9}\ \Omega$ m și densitatea $d_{Cu} = 8{,}9 \cdot 10^{3}\ kgm^{-3}$, celălalt de aluminiu cu $\rho_{Al} = 27{,}8 \cdot 10^{-9}\ \Omega$ m și $d_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^{3}\ kgm^{-3}$, au aceeași lungime l și aceeași masă m. Să se calculeze raportul rezistențelor celor două conductoare.

3.2.50. Pentru determinarea tensiunii electromotoare a unei baterii se folosește un ampermetru de rezistență interioară neglijabilă, precum și două rezistoare de rezistențe cunoscute: $R_1 = 4\ \Omega$ și $R_2 = 7\ \Omega$.

Legînd la bornele bateriei, pe rînd, cîte unul din cele două rezistoare, ampermetrul indică curenți $I_1 = 3$ A și respectiv $I_2 = 1{,}75$ A.

Să se deducă valoarea t.e.m. a bateriei și rezistența interioară a acesteia.

3.2.51. Rezistența electrică a filamentului de wolfram al unei lămpi cu incandescență este, în timpul exploatării, de nouă ori mai mare decît la rece. Să se determine temperatura filamentului în timpul exploatării, știind că temperatura mediului ambiant este 20°C și că valoarea coeficientului termic pentru wolfram este 0,004/°C.

3.2.52. La bornele unui acumulator cu t.e.m. $E = 12$ V se leagă un rezistor cu rezistența $R = 4{,}6\ \Omega$ și se măsoară o tensiune $U = 11{,}5$ V la borne. Să se calculeze intensitatea curentului debitat de acumulator și rezistența interioară a acumulatorului.

3.2.53. Un rezistor cu rezistența $R = 3{,}5\ \Omega$, legat la bornele unui generator de rezistență interioară $r = 0{,}2\ \Omega$, este parcurs de un curent cu intensitatea $I = 50$ A. Să se calculeze:

a) tensiunea electromotoare a generatorului;

b) tensiunea la borne;

c) căderea interioară de tensiune;

d) cantitatea de căldură dezvoltată în circuitul exterior în timp de 1 minut.

3.2.54. Un acumulator cu t.e.m. $E = 12$ V debitează într-un circuit exterior un curent $I = 2$ A, timp de 2 ore. Cu cît s-a micșorat energia chimică a acumulatorului?

3.2.55. Să se calculeze diferența de potențial dintre punctele c și d din figura 3.77, luînd valorile următoare: $E_1 = 4$ V, $E_2 = 1$ V, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$ și $R_3 = 5\ \Omega$.

3.2.56. a) Care este rezistența echivalentă a rețelei din figura 3.78?

b) Care sînt curenții din fiecare rezistor?

Se consideră următoarele valori: $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$ și $E = 6$ V.

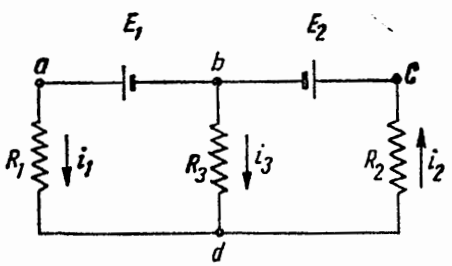


Fig. 3.77.

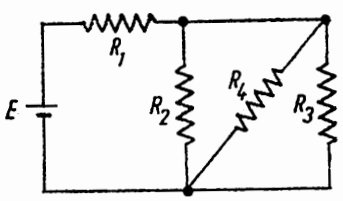


Fig. 3.78.

3.2.57. Un electromotor este alimentat la o tensiune de 220 V și ridică un corp cu masa de 500 kg cu o viteză de 0,25 m/s pe verticală. Prin circuit trecînd un curent de 10 A să se calculeze:

1°. puterea consumată de motor;

2°. puterea furnizată de motor și randamentul motorului;

3°. cantitatea de căldură disipată prin efect Joule într-o secundă.

3.2.58. Să se calculeze intensitatea curentului electric care trece prin circuitul reprezentat în figura 3.79. Se dau: $E_1 = 15$ V; $r_1 = 1{,}5\ \Omega$; $E_2 = 25$ V; $r_2 = 1\ \Omega$ și $R = 7{,}5\ \Omega$.

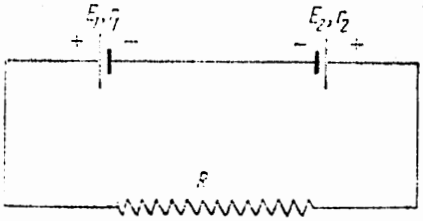


Fig. 3.79.

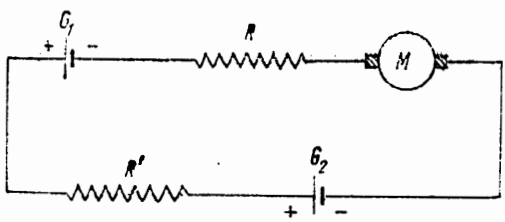


Fig. 3.80.

3.2.59. Să se calculeze intensitatea curentului electric prin circuitul reprezentat în figura 3.80, în care G_1 este un generator cu $E_1 = 55$ V și rezistență interioară $r_1 = 1{,}5\ \Omega$, legat în opoziție cu un al doilea generator G_2 de t.e.m. $E_2 = 20$ V și $r_2 = 1\Omega$, și un electromotor M de tensiune contraelectromotoare $E_c = 25$ V și rezistența $R_m = 2{,}5\ \Omega$. Rezistoarele din circuit au rezistențele $R = 5\Omega$ și respectiv $R' = 10\ \Omega$.

3.2.60. În montajul reprezentat în figura 3.81 sînt două acumulatoare cu t.e.m. $E_1 = 20$ V, respectiv $E_2 = 8$ V și rezistențele interioare $r_1 = 0{,}5\ \Omega$ și respectiv $r_2 = 0{,}2\ \Omega$ și un rezistor de rezistență $R = 5{,}3\ \Omega$. Să se calculeze:

1°. intensitatea curentului electric prin circuit;

2°. punctul a fiind pus la pămînt (potențial zero), să se calculeze potențialele punctelor b și c.

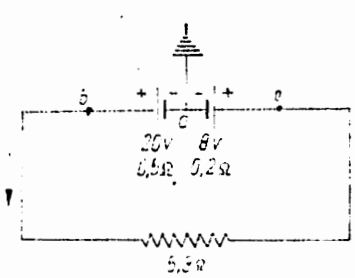


Fig. 3.81.

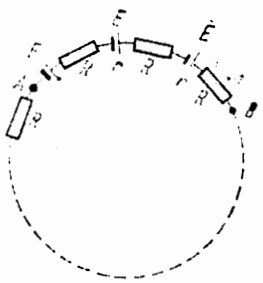


Fig. 3.82.

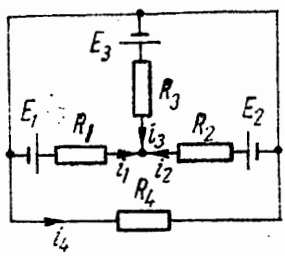


Fig. 3.83.

3.2.61. În figura 3.82 sînt reprezentate N generatoare electrice identice avînd fiecare t.e.m. E și rezistența interioară r și un același număr N de rezistoare, de asemenea identice și de rezistență R fiecare, constituind un circuit închis. Se neglijează rezistența firelor de legătură. Să se determine diferența de potențial dintre punctele A și B, între acestea fiind de o parte n și de cealaltă parte $N - n$ generatoare și rezistoare.

3.2.62. În schema reprezentată în figura 3.83 sînt cunoscute: $E_1 = 1$ V, $E_2 = 2$ V, $E_3 = 3$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$ și $R_4 = 400\ \Omega$.

Să se determine intensităţile curenţilor care trec prin rezistoare. Rezistenţele interioare ale generatoarelor şi firelor de legătură se neglijează.

3.2.63. Cu ajutorul unui conductor parcurs de un curent electric şi cufundat într-un vas cu apă se încălzeşte o jumătate litru de apă de la temperatura de 20°C pînă la temperatura de fierbere, în timp de 10 minute. Pierderile de căldură reprezintă o pătrime din căldura cedată apei. Să se calculeze:

1°. puterea electrică disipată prin efect Joule în conductor;

2°. intensitatea curentului electric ce trece prin conductor, ştiind că un curent cu intensitatea de 1 amper, produce în timp de o oră şi jumătate, în acelaşi vas, încălzirea aceleiaşi cantităţi de apă între aceleaşi temperaturi;

3°. rezistenţa conductorului.

3.2.64. Admiţînd că, cantitatea de căldură transmisă în unitatea de timp, de către un conductor, parcurs de un curent, mediului ambiant este exprimată printr-o relaţie de forma: $Q = KS(\theta_e - \theta_m)$, în care: K reprezintă un coeficient care depinde de natura conductorului; S este suprafaţa periferică a conductorului; θ_e temperatura de echilibru atinsă de conductor; θ_m temperatura mediului ambiant.

1°. să se stabilească expresia care dă temperatura de echilibru atinsă de un conductor în funcţie de diametrul secţiunii, de intensitatea curentului care îl parcurge şi de rezistivitatea materialului din care este constituit conductorul;

2°. să se calculeze temperatura de echilibru pentru un conductor cu rezistivitatea $\rho = 25 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m, diametrul secţiunii $D = 1$ mm, străbătut de un curent de 3,14 A, cunoscînd constanta $K = 50\ \frac{W}{m^2\ °C}$ şi temperatura mediului ambiant $\theta_m = 20°C$.

3.2.65. Un rezistor cu rezistenţa $R_1 = 10\ \Omega$ conectat la bornele unei surse este parcurs de un curent $I_1 = 6$ A. Un al doilea rezistor cu $R_2 = 20\ \Omega$ conectat la aceeaşi sursă este parcurs de $I_2 = 4$ A. Să se calculeze:

1°. tensiunea electromotoare E şi rezistenţa interioară r a sursei;

2°. puterea absorbită de rezistorul R_1 conectat la sursă.

3.2.66. Un conductor de cupru lung de 314 m şi cu diametrul secţiunii 2 mm este cuplat la o sursă de tensiune electrică de rezistenţă interioară $r = 0{,}25\ \Omega$ şi este parcurs de un curent cu intensitatea $I = 1$ A. Să se determine:

1°. tensiunea electromotoare a sursei;

2°. diferenţa de potenţial între capetele conductorului;

3°. cantitatea de argint ce se depune în 10 minute la catodul unui voltametru cu azotat de argint şi rezistenţă $R_v = 0{,}75\ \Omega$, voltametrul fiind cuplat la sursă în locul conductorului.

Se dau: $\rho_{Cu} = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\Omega$ m şi echivalentul electrochimic al argintului $K = 1{,}118$ mg/C. Se neglijează tensiunea contra electromotoare a voltametrului.

3.2.67. O sursă alimentează sub o tensiune constantă $U = 110$ V un circuit format din două rezistoare legate în paralel şi avînd rezistenţele R_1 şi respectiv R_2. Puterea disipată în cele două rezistoare fiind 220 W şi ştiind că o treime din aceasta este disipată în R_1 şi restul în R_2, să se calculeze:

1°. intensitatea curentului I debitat de sursă;

2°. valorile intensităților curenților I_1 și I_2 prin fiecare rezistor;
3°. valorile rezistențelor R_1 și R_2 și rezistenței echivalente R .

3.2.68. Două baterii de acumulatoare având t.e.m. $E_1 = 115$ V, respectiv $E_2 = 119$ V și rezistențele interioare $r_1 = 0{,}2\ \Omega$ și respectiv $r_2 = 0{,}3\ \Omega$ sînt legate în paralel și debitează curent într-un circuit exterior. Știind că prima baterie debitează un curent $I_1 = 25$ A, să se calculeze curentul total debitat în circuitul exterior.

3.2.69. Un generator de curent continuu cu t.e.m. $E_1 = 12$ V și rezistență interioară $r_1 = 0{,}2\ \Omega$ încarcă o baterie de acumulatoare cu t.e.m. $E_2 = 10$ V și rezistență interioară $r_2 = 0{,}6\ \Omega$. În derivație cu bateria de acumulatoare se leagă o lampă electrică de rezistență $R = 3\ \Omega$. Să se determine intensitățile curenților prin bateria de acumulatoare și prin lampă.

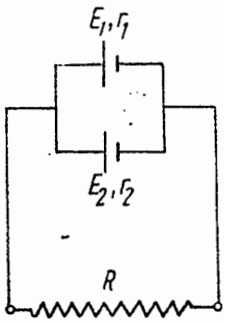


Fig. 3.84

3.2.70. În circuitul reprezentat în figura 3.84. Se cunosc: $E_1 = 1{,}9$ V, $r_1 = 0{,}1\ \Omega$, $E_2 = 1{,}1$ V, $r_2 = 0{,}8\ \Omega$ și $R = 10\ \Omega$. Să se calculeze intensitățile curenților prin elementele circuitului.

3.2.71. Un galvanometru de rezistență $R_0 = 150\ \Omega$ are o scală cu 100 diviziuni, fiecare diviziune reprezentînd 10^{-6} A. Să se calculeze valoarea rezistenței R_S cu care trebuie șuntat aparatul pentru a putea măsura cu el curenți pînă la 10^{-3} A.

3.2.72. Un voltmetru cu scală are rezistența internă $R_0 = 100\ \Omega/V$ și măsoară căderi de potențial pînă la 100 V. Ce diferență de potențial maximă se va putea măsura cu aparatul după ce i se adaugă o rezistență adițională $R_A = 9 \cdot 10^4\ \Omega$?

3.2.73. La bornele unei baterii de acumulatoare cu t.e.m. $E = 24$ V și rezistență interioară $r = 0{,}5\ \Omega$ este conectat un voltametru de rezistență $R_v = 2\ \Omega$ în serie cu un rezistor de rezistență $R = 3{,}5\ \Omega$. În voltametru se găsește soluție de azotat de argint. Pentru a măsura tensiunea la bornele voltametrului și intensitatea curentului prin circuit, se folosesc două aparate de măsură identice; unul este folosit ca ampermetru, iar celălalt ca voltmetru. Aparatele de măsură au fiecare o rezistență $r_0 = 9{,}8\ \Omega$ și permit trecerea unui curent cu o intensitate maximă $i_0 = 0{,}1$ A. Se cere:

1°. să se determine rezistența r_s a șuntului cu care trebuie protejat aparatul folosit ca ampermetru, în vederea măsurării unor curenți pînă la 5 A;

2°. să se determine rezistența adițională r_a care trebuie legată în serie cu aparatul folosit ca voltmetru, în vederea măsurării unor tensiuni pînă la 30 V;

3°. să se construiască schema electrică a circuitului în care sînt conținute și aparatele de măsură-protejate cu rezistențele calculate la punctele 1° și 2°. Să se calculeze intensitatea curentului debitat de bateria de acumulatoare în acest circuit;

4°. să se determine cantitatea de argint depusă la catodul voltametrului în timpul $t = 2$ h, în condițiile circuitului 3°.

Echivalentul electrochimic al argintului este $K = 4{,}025$ g/A · h.

3.2.74. În schema reprezentată în figura 3.85 se cunosc: $E_1 = E_2 = 2$ V și $r_1 = r_2 = 1\ \Omega$. Neglijînd rezistența firelor de legătură, să se determine intensitatea curentului care trece prin circuit și indicația voltmetrului.

3.2.75. În schema reprezentată în figura 3.86, cu valorile elementelor de circuit notate pe figură, se constată că prin bateria cu t.e.m. E_1 nu trece curent. Să se determine, în aceste condiții, tensiunea U_2 la bornele rezistorului R_2 și intensitatea curentului I_3 care circulă prin rezistorul R_3. Se neglijează rezistențele interioare ale bateriilor.

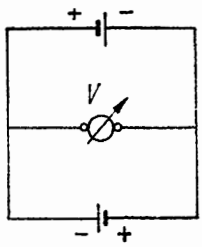


Fig. 3.85.

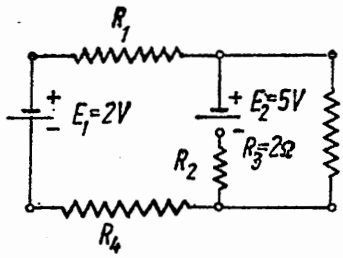


Fig. 3.86.

3.2.76. Un circuit electric conține înseriate următoarele:

a) un rezistor constituit dintr-un fir de aliaj, lung de 2 m și cu diametrul secțiunii circulare de 0,4 mm. Rezistorul este cufundat într-un calorimetru de cupru cu masa de 150 g și care conține 600 g apă;

b) un voltametru cu electrozi de argint conținînd o soluție de azotat de argint;

c) un voltametru cu electrozi de platină conținînd apă acidulată și o eprubetă în care se degajă simultan gazele obținute la cei doi electrozi.

Prin circuit trece un curent constant timp de 30 minute. După trecerea curentului, masa unuia din electrozii voltametrului cu azotat de argint a crescut cu 1,37 g și în același timp, temperatura calorimetrului și a conținutului s-a ridicat cu 6,2°C.

1°. Să se calculeze volumul, în condiții normale de temperatură și presiune, al gazului cules în eprubeta de la voltametrul cu apă acidulată;

2°. să se calculeze valoarea rezistenței introduse în calorimetru, precum și rezistivitatea aliajului.

Se dau: căldura specifică a cuprului $c = 418$ J/kg°C și masa atomică a argintului $A = 108$.

3.2.77. Un electromotor dezvoltă o putere de 1,5 kW și disipă prin efect Joule o putere de 120 W. Se cere:

1°. puterea electrică consumată de electromotor;

2°. diferența de potențial între bornele electromotorului știind că curentul de regim în timpul funcționării are intensitatea de 13,5 A;

3°. randamentul electromotorului;

4°. energia electrică consumată în 8 ore.

3.2.78. O lampă electrică cu filament la incandescență are scris pe soclu: 120 V și 1 000 W. 1°. Care este intensitatea curentului care trece prin filamentul lămpii, cînd aceasta este montată la o priză de tensiune 120 V? Care este rezistența filamentului lămpii în timpul funcționării? (Se neglijează rezistențele firelor de legătură.)

2°. Vrem să folosim această lampă la o rețea de 220 V. Ce rezistență trebuie asociată pentru ca lampa să funcționeze la parametrii indicați la punctul 1°? Să se facă schema.

3°. Se construiește rezistența calculată la punctul 2° dintr-un fir conductor cu diametrul 1 mm și a cărei rezistivitate în condiții de funcționare este $46 \cdot 10^{-8}$ Ω m. Care este lungimea firului?

3.2.79. Un curent electric de 5 A se scindează între două conductoare de rezistențe $R_1 = 2\ \Omega$ și respectiv $R_2 = 3\ \Omega$ legate în paralel. Să se calculeze intensitățile I_1 și I_2 ale curenților derivați, rezistența echivalentă a grupării celor două rezistoare și diferența de potențial între extremitățile acesteia.

3.2.80. 1°. Un ampermetru foarte sensibil are o rezistență internă $r_0 = 250\ \Omega$. Se șuntează aparatul cu $R_s = \frac{r_0}{999}$; să se calculeze rezistența echivalentă a ampermetrului astfel șuntat.

2°. Ampermetrul șuntat este montat în serie cu un voltametru cu azotat de argint, masa inițială a catodului fiind 24,473 g. Circuitul este parcurs de un curent de intensitate constantă I, astfel că acul indicator al ampermetrului se deplasează cu 10 diviziuni față de zero al scalei. După 3 ore de trecere a curentului prin circuit se constată că masa catodului a devenit 36,560 g. Să se deducă valoarea intensității I a curentului.

3°. Care este intensitatea i_0 a curentului care trece prin rezistența proprie r_0 a ampermetrului? Să se determine valoarea intensității curentului indicat de o diviziune de pe scala ampermetrului șuntat și nețuntat (A pentru argint se ia 108).

3.2.81. Circuitul reprezentat în figura 3.87 conține: o baterie B constituită din șase elemente galvanice grupate în serie, fiecare element având tensiunea electromotoare $E_1 = 2$ V și rezistența interioară $r = 0{,}15\ \Omega$; rezistențele $R_1 = 5\ \Omega$ și $R_2 = 7\Omega$; un solenoid L având lungimea $l = 20$cm, $N = 300$ spire și $R_3 = 3\ \Omega$. Să se calculeze:

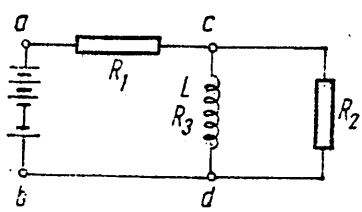


Fig. 3.87.

1°. tensiunea la bornele a, b ale bateriei; E — în circuit deschis; U — în circuit închis;

2°. intensitatea I_1 a curentului prin rezistorul R_1;

3°. intensitățile I_2 și I_3 ale curenților prin R_2 și R_3;

4°. cantitatea de căldură disipată în 2 minute prin rezistorul R_2;

5°. intensitatea H a cîmpului magnetic pe axa solenoidului;

6°. fluxul magnetic φ care străbate o spiră a solenoidului, diametrul spirei fiind $D = 4$ cm.

3.2.82. La bornele unei surse de t.e.m. $E = 16$ V și rezistență interioară $r = 1{,}22\ \Omega$ sînt cuplate două rezistoare de rezistențe R_1 și respectiv R_2, legate în paralel. Cunoscînd intensitatea curentului debitat de sursă în circuit $I = 0{,}5$ A și că $R_1 + R_2 = 200\ \Omega$, să se calculeze:

1°. valorile rezistențelor R_1 și R_2 ale celor două rezistoare;

2°. intensitățile I_1 și I_2 ale curenților prin cele două rezistoare;

3°. tensiunea la bornele sursei în circuit închis;

4°. puterile P_1 și P_2 disipate în cele două rezistoare.

3.2.83. O baterie cu tensiunea electromotoare $E = 60$ V este formată din n elemente identice legate în serie și debitează un curent $I_1 = 1{,}5$ A într-un circuit exterior de rezistență R. Dacă se scurtcircuitează jumătate din elementele bateriei, curentul scade la $I_2 = 1$ A. Înlocuind rezistorul din circuitul bateriei și cuplînd la bornele acesteia un condensator plan cu aria unei armături $S = 4 \cdot 10^{-2}$ m² și distanța între armături $d = 2{,}95 \cdot 10^{-4}$ m, între armături aflîndu-se un strat de dielectric de grosime d și arie $S/2$, restul fiind aer, condensatorul se încarcă cu o sarcină $q = 0{,}18 \cdot 10^{-6}$ C. Să se calculeze:

1°. rezistența R a rezistorului din circuitul bateriei;

2°. numărul n al elementelor care constituie bateria, știind că rezistența interioară a unui element este $r = 0{,}5$ Ω;

3°. capacitatea C a condensatorului și permitivitatea relativă ε_r a stratului de dielectric.

3.2.84. Curentul de scurtcircuit al unui acumulator (curentul debitat printr-un conductor de rezistență neglijabilă legat la borne) are valoarea $I_S = 30$ A. Legînd la bornele acumulatorului un rezistor cu rezistența $R = 2$ Ω, curentul debitat de acumulator are valoarea $I = 5$ A. Să se calculeze t.e.m. E a acumulatorului și rezistența sa interioară.

3.2.85. O baterie de acumulatoare cu t.e.m. $E_1 = 100$ V este legată în paralel cu un generator de t.e.m. continuă $E_2 = 110$ V, ambele avînd rezistențele interioare $r_1 = r_2 = 5$ Ω. În paralel atît cu bateria cît și cu generatorul se leagă un rezistor cu rezistența $R = 100$ Ω. Să se calculeze intensitățile curenților prin fiecare element al circuitului.

3.2.86. În schema reprezentată în figura 3.88 se cunosc: $R_1 = R_4 = 1$ Ω; $R_2 = R_3 = 97$ Ω; t.e.m. a unui element $e = 2{,}5$ V; rezistența interioară a unui element $r_i = 0{,}5$ Ω; bateria B fiind formată din două grupări de cîte patru elemente fiecare; aria unei armături a condensatorului este $S = 200$ cm², distanța dintre armături $d = 10^{-4}$ m și dielectricul are $\varepsilon_r = 2{,}5$. Să se calculeze:

1°. intensitatea curentului electric debitat de baterie;

2°. diferența de potențial $V_A - V_B$;

3°. sarcina electrică de pe armătura condensatorului.

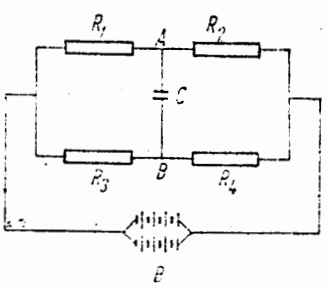


Fig. 3.88.

3.2.87. De la o sursă de tensiune 110 V trebuie transmisă la distanța de 5 km o putere de 5 000 W cu o pierdere maximă de 10% din puterea transmisă. Care este diametrul minim d al secțiunii conductorului de cupru ($\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ω m) necesar transportului energiei electrice în condițiile menționate?

3.2.88. 1°. De la o sursă cu tensiunea de 11 000 V trebuie transmisă, la distanța de 5 km, o putere de $5 \cdot 10^5$ W, cu o pierdere de tensiune de maxim 1% din tensiunea transmisă. Să se calculeze secțiunea minimă S a unui conductor de cupru ($\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ω m) folosit pentru transmiterea energiei electrice în condițiile problemei.

2°. Să se compare rezultatul cu cel de la problema precedentă.

3°. De cîte ori trebuie ridicată tensiunea sursei, pentru a reduce de 100 de ori pierderile de putere pe linie, la transportul acesteia?

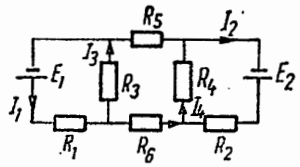


Fig. 3.89.

3.2.89. Elementele care constituie schema reprezentată în figura 3.89 au valorile: $R_1 = 2{,}5\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$; $R_5 = 3\ \Omega$, $R_6 = 5\ \Omega$; $E_1 = 120$ V și $E_2 = 40$ V. Se neglijează rezistențele interioare ale surselor și ale firelor de legătură. Să se calculeze:

1°. intensitățile curenților din fiecare ramură;

2°. bilanțul puterilor.

3.2.90. Un electromotor cu rezistență interioară $R_m = 3\ \Omega$ este alimentat de un curent electric constant de 20 A și efectuează un lucru de $19{,}6 \cdot 10^5$ J în 16 minute și 20 secunde; să se calculeze puterea mecanică, tensiunea contraelectromotoare, cantitatea de căldură disipată prin efect Joule în fiecare minut și puterea electrică consumată de electromotor.

3.2.91. Un miliampermetru a cărui rezistență este $r_0 = 100\ \Omega$ este montat într-un circuit electric și acul indicator deviază cu 100 diviziuni atunci cînd este parcurs de un curent de 10 mA. Se montează în paralel la bornele aparatului o rezistență R_S astfel încît acul indicator al aparatului deviază cu 100 diviziuni atunci cînd intensitatea curentului din circuitul principal este 1 A.

1°. Care este valoarea rezistenței R_S cu care a fost șuntat aparatul?

2°. Se montează în circuitul principal în paralel între două puncte A și B, de o parte un rezistor de rezistență $R_1 = 20\ \Omega$, de cealaltă parte un electromotor a cărui rezistență este $R_m = 4\ \Omega$ și tensiunea contraelectromotoare $E_c = 12$ V. Să se facă schema.

a) Motorul fiind blocat, deviația acului miliampermetrului șuntat cu R_s este de 200 diviziuni. Să se calculeze intensitatea curentului care traversează rezistorul de rezistență R_1 și curentul care traversează înfășurarea motorului.

b) Cînd motorul funcționează normal, diferența de potențial între punctele A și B este de 20 V. Care este în acest caz, deviația acului miliampermetrului șuntat?

3.2.92. Un electromotor alimentat de la o sursă de tensiune constantă de 110 V acționează o pompă care ridică apă dintr-o fîntînă la o înălțime de 7,5 m cu un debit de 56 litri pe minut.

1°. Să se calculeze puterea utilă a pompei.

2°. Care trebuie să fie puterea motorului dacă admitem că 10% din energia furnizată pompei se pierde prin frecări și alte cauze?

3°. Motorul fiind traversat de un curent de 0,8 A, să se calculeze rezistența interioară și tensiunea contraelectromotoare a acestuia.

4°. Care este, în aceste condiții, cantitatea de căldură degajată în înfășurarea motorului în 5 minute?

5°. Ce valoare va avea cantitatea de căldură degajată în 5 minute dacă printr-un accident, motorul este pus în imposibilitate de a se roti?

3.2.93. Un circuit serie este constituit din: un generator, o rezistență variabilă R, un întrerupător K și un ampermetru A de rezistență neglijabilă. Un voltmetru de rezistență foarte mare este conectat la bornele generatorului.

1°. Cînd întrerupătorul K este deschis, voltmetrul indică 24 V. Cînd întrerupătorul K este închis, rezistența $R = 11\ \Omega$ și ampermetrul indică 2 A. Să se calculeze tensiunea electromotoare E și rezistența interioară r a generatorului.

2°. Se intercalează în circuitul precedent în serie o cuvă cu sulfat de cupru și electrozi de cupru și ampermetrul indică 1,6 A. Se neglijează tensiunea contraelectromotoare a cuvei cu anod solubil.

a) Să se deducă rezistența cuvei cu electrolit; b) care este masa de cupru depusă pe catod în 50 minute? Masa atomică a cuprului este 63,54 cuprul fiind bivalent.

3°. Se folosește circuitul precedent pentru încărcarea unei baterii de acumulatoare; înlocuim pentru aceasta, cuva cu electrolit, cu bateria de acumulatoare montînd-o în opoziție cu generatorul.

a) Să se deseneze schema. b) Bateria de acumulatoare este formată din trei elemente de acumulator cu plumb, legate în serie; la începutul încărcării, bateria opune o tensiune contraelectromotoare $E_c = 6$ V și o rezistență interioară de 0,6 Ω. Ce valoare trebuie dată rezistenței variabile R pentru a obține la început un curent de 1,2 A? c) La finele încărcării tensiunea contraelectromotoare a bateriei $E'_c = 7{,}5$ V; rezistența totală a circuitului nu a variat, Ce intensitate va indica în aceste condiții ampermetrul din circuit?

3.2.94. În circuitul reprezentat în figura 3.90 se cunosc: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ și tensiunile la bornele celor două surse în circuit închis: $U_1 = 10$ V și $U_2 = 6$ V. Să se calculeze t.e.m. $E_1 = E_2$ și rezistențele interioare ale acestora $r_1 = r_2$.

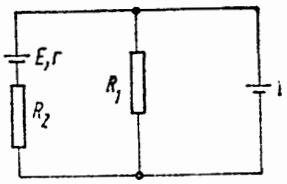


Fig. 3.90.

3.2.95. În circuitul reprezentat în figura 3.91 se cunosc: $E = 29$ V, $r = 0{,}5\ \Omega$, $R_1 = 2\ \Omega$ și $R_2 = 3\ \Omega$. Să se calculeze tensiunea la bornele sursei și intensitățile curenților.

3.2.96. În circuitul reprezentat în figura 3.92 se cunosc: $E_1 = 1$ V, $r_1 = 0{,}5\ \Omega$, $E_2 = 1{,}5$ V, $r_2 = 1\ \Omega$, $R_1 = 2{,}5\ \Omega$ și $R_2 = 2\ \Omega$.

Să se calculeze intensitățile I_1, I_2 și I_3 și diferențele de potențial $V_A - V_B$; $V_C - V_D$ și $V_G - V_H$.

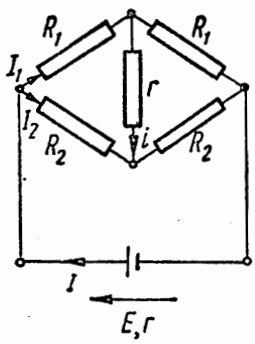


Fig. 3.91.

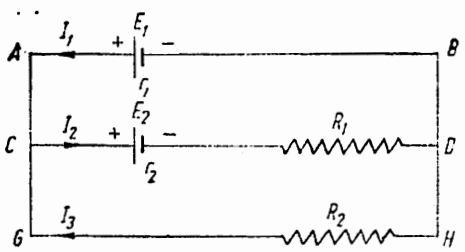


Fig. 3.92.

3.2.97. În circuitul reprezentat în figura 3.93 se cunosc: $E_1 = 20$ V, $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 1\ \Omega$, $r_3 = 1\ \Omega$, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$ și curenții $I_1 = 1$ A prin rezistorul R_1 și $I_3 = 2$ A prin rezistorul R_3. Să se calculeze: E_2, E_3 și diferența de potențial $V_A - V_B$.

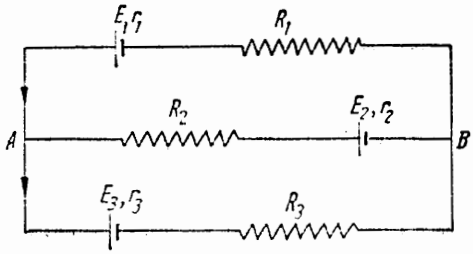


Fig. 3.93.

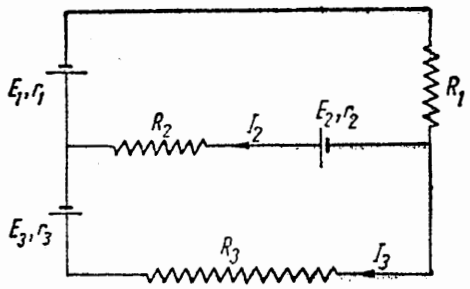


Fig. 3.94.

3.2.98. În circuitul reprezentat în figura 3.94 sînt cunoscute: $E_1 = 16$ V; $r_1 = 1\ \Omega$; $E_2 = 4$ V; $r_2 = 0{,}2\ \Omega$; $E_3 = 10$ V; $r_3 = 0{,}5\ \Omega$; $R_1 = 9\ \Omega$; $R_2 = 7{,}8\ \Omega$; $R_3 = 1{,}5\ \Omega$. Să se calculeze:

1°. curenții I_1, I_2 și I_3;

2°. tensiunea la bornele fiecăreia din cele trei surse.

3.2.99. Un acumulator prezintă în timpul încărcării o tensiune contraelectromotoare de 2,2 V; încărcarea sa necesită un curent de 2 A, timp de 20 ore. Știind că acest acumulator debitează prin curentul de descărcare 8/10 din cantitatea de electricitate pe care a absorbit-o la încărcare și că tensiunea electromotoare de descărcare este de 1,9 V, să se calculeze:

1°. capacitatea acumulatorului;

2°. energie electrică transformată în energie chimică la încărcare;

3°. energia electrică furnizată la descărcare;

4°. intensitatea curentului de descărcare (considerat constant), dacă descărcarea se produce în 10 ore.

3.2.100. 1°. O lampă electrică cu filament incandescent funcționează normal sub o tensiune de 220 V și consumă 60 W. Să se calculeze rezistența acestei lămpi și intensitatea curentului care o traversează.

2°. Se leagă această lampă în serie cu 40 elemente de acumulator identice și se cuplează la sursa de 220 V. Se lasă bateria de acumulatoare timp de 10 ore pînă ce se încarcă. Se va considera rezistența lămpii cea de la punctul 1°. Tensiunea contraelectromotoare a fiecărui element este 2,2 V și rezistența interioară 0,1 Ω. Care este cantitatea de electricitate absorbită de acumulatoare prin încărcare?

3°. Să se calculeze energia disipată prin efect Joule în lampă și în acumulatoare în timpul încărcării. Să se calculeze energia înamagazinată în bateria de acumulatoare. Să se stabilească randamentul instalației (raportul între energia înamagazinată în acumulatoare și energia totală furnizată de sursă).

3.2.101. Să se calculeze puterea unui fierbător care în timp de 5 minute aduce la fierbere 0,9 litri de apă cu temperatura inițială de 20° C. Fierbătorul are randamentul 0,8. Să se dimensioneze rezistența sa de încălzire (lungimea

și diametrul firului), știind că fierbătorul este folosit la rețeaua de 120 V și că firul este din constantan ($\rho = 5 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$), iar densitatea de curent prin fir este $i = \frac{I}{S} = 18{,}4$ A/mm².

3.2.102. În circuitul reprezentat în figura 3.95 se cunosc: $E_1 = 2$ V; $E_2 = 1{,}7$ V; $E_3 = 1{,}6$ V; $r_1 = 0{,}3$ Ω; $r_2 = r_3 = 0{,}1$ Ω. Să se determine valoarea rezistenței R și intensitățile I_1, I_2 și I_R, știind că galvanometrul G_2 indică zero.

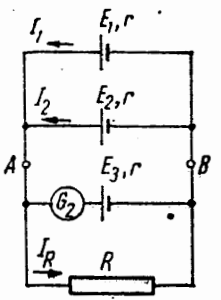


Fig. 3.95.

3.2.103. Un condensator de capacitate C în serie cu un conductor de rezistență R se cuplează la o sursă de tensiune continuă U. Să se calculeze energia disipată în conductor sub formă de căldură în timpul încărcării condensatorului.

3.2.104. O sursă de tensiunea electromotoare constantă debitează un curent electric într-un circuit ce conține un miliampermetru și un voltametru cu sulfat de cupru și electrozi din cupru.

1°. Curentul produce o deviere a acului indicator al galvanometrului cu $n_1 = 25$ diviziuni și depune $m_1 = 0{,}2965$ g de cupru într-o oră; ce curent indică o diviziune a miliampermetrului? $K_{Cu} = 0{,}33$ mg/C.

2°. Șuntînd aparatul cu $R_s = 20$ Ω, acul deviază cu $n_2 = 21{,}7$ diviziuni și se depun $m_2 = 0{,}8976$ g de cupru într-o oră. Care este rezistența proprie r_0 a miliampermetrului?

3°. Care este valoarea t.e.m. aplicată și rezistența circuitului exterior miliampermetrului?

3.2.105. 1°. Un generator de tensiune electromotoare $E = 40$ V debitează într-un circuit exterior un curent de 10 A, producînd o cădere de tensiune pe acesta de 30 V. Să se calculeze rezistența interioară a generatorului și aceea a circuitului exterior.

2°. Circuitul exterior de la punctul 1° fiind un încălzitor este introdus într-un calorimetru cu apă, capacitatea calorică a calorimetrului fiind echivalentă cu aceea a 500 g apă. Temperatura calorimetrului și conținutului se ridică cu 4°C pe minut. Să se calculeze masa apei din calorimetru, curentul care trece prin el fiind 10 A ($c_a = 4\,180$ J/kg°C).

3°. În serie cu încălzitorul se leagă o cuvă electrolitică care conține sulfat de cupru, electrozii cuvei fiind din platină. Rezistența cuvei este $R_v = 5{,}3$ Ω. În aceste condiții, temperatura apei se ridică numai cu 1°C pe minut. Să se calculeze tensiunea contraelectromotoare a cuvei.

4°. Se montează la bornele generatorului exclusiv un electromotor de putere 250 W. Diferența de potențial la bornele sale este 30 V.

Să se calculeze tensiunea contraelectromotoare a motorului și rezistența sa interioară.

3.2.106. La bornele unei baterii formate din $n = 20$ elemente, legate în serie, fiecare avînd t.e.m. $e = 1{,}5$ V și rezistența interioară $r = 0{,}15$ Ω, se conectează un rezistor cu rezistența $R = 20$ Ω în paralel cu un fir metalic de lungime $l_1 = 450$ m, secțiune $S = 3 \cdot 10^{-7}$ m² și rezistență $R_f = 30$ Ω. Să se calculeze:

1°. tensiunea U la bornele rezistorului;

2°. intensitățile I_R și I_f ale curenților prin rezistor și respectiv, prin fir;

3°. rezistivitatea ρ a firului;

4°. puterea electrică P și căldura Q degajată în rezistor în 20 minute;

5°. ce lungime l_2 ar trebui să aibă firul pentru ca tensiunea la bornele rezistorului să scadă la valoarea $U' = 0{,}9\ U$?

3.2.107. Un conductor rectiliniu, suficient de lung, cu secțiune circulară de rază $r_0 = 4$ mm este parcurs de un curent de 8 A. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în punctele A și B la distanța $r_A = 5$ cm, respectiv $r_B = 2{,}5$ mm de axa conductorului.

3.2.108. Două conductoare rectilinii, lungi și paralele aflate în vid la distanța $d = 150$ cm unul de altul sînt parcurse de curenții $I_1 = 100$ A, respectiv $I_2 = 50$ A de sensuri opuse. Să se calculeze valoarea inducției magnetice $\vec{B}$ în punctele: a) A aflat între conductoare și în planul determinat de acestea, la distanța $r_A = 100$ cm de primul conductor; b) punctul B aflat în planul conductoarelor, de partea lui I_2 și la distanța $r'_B = 50$ cm de acesta și $r'_A = 200$ cm de primul conductor.

3.2.109. 1°. O spiră de rază $r = 10$ cm este parcursă de un curent cu intensitatea de 5 A. Să se calculeze valoarea inducției magnetice în centrul spirei.

2°. Din conductorul de la punctul 1° se construiesc două spire identice și foarte apropiate și sînt parcurse de curentul $I = 5$ A; care este valoarea inducției magnetice în centrul comun al spirelor? În ambele cazuri, mediul este aerul.

3.2.110. Prin trei vîrfuri ale unui pătrat cu latura $l = 10$ cm trec trei conductoare rectilinii foarte lungi și perpendiculare pe planul figurii. Curentul $I_A = 251{,}2$ A are sensul dinspre figură spre observator, curenții $I_B = 502{,}4$ A și $I_C = 251{,}2$ A au sens opus lui I_A. Să se calculeze:

a) intensitatea cîmpului magnetic generat de cei trei curenți în vîrful D al pătratului, indicîndu-se și orientarea cîmpului în raport cu diagonala pătratului;

b) forța electromagnetică ce s-ar exercita asupra unității de lungime a unui conductor rectiliniu, paralel cu ceilalți, parcurs de un curent $I_D = 200$ A, de același sens cu I_A și care trece prin vîrful D al pătratului. Să se facă schema.

3.2.111. În atomul de hidrogen, electronul se rotește în jurul unui proton pe o orbită circulară de rază $r_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m; cu o viteză $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ ms^{-1}. Să se calculeze valoarea inducției magnetice B_0 generată în centrul orbitei.

3.2.112. Figura 3.96 reprezintă o spiră rectangulară de dimensiuni $a = 10$ cm, $b = 5$ cm, mobilă în jurul unei axe OO' într-un cîmp de inducție magnetică $B = 2$ T. Spira este parcursă de un curent de 2 A și normala la suprafața sa face cu $\vec{B}$ un unghi $\alpha = 30°$.

Să se calculeze forța la care este supusă spira.

3.2.113. O bobină cu $N = 500$ spire are lungimea $l = 50$ cm. Se așază bobina cu axa orizontală și perpendiculară pe meridianul magnetic terestru. Se plasează în regiunea centrală a bobinei un mic ac magnetic mobil în jurul

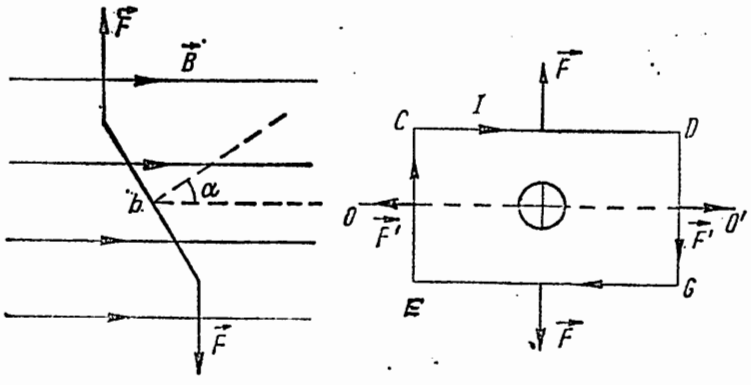


Fig. 3.96.

unui ax vertical. Ştiind că acul se roteşte cu 45° cînd prin bobină trece curent electric, să se calculeze intensitatea acestui curent. Intensitatea cîmpului magnetic terestru este $H_0 = \frac{50}{\pi}$ A/m.

3.2.114. 1°. 45 elemente avînd fiecare t.e.m. de 1,1 V şi rezistenţa interioară de 1,2 Ω sînt grupate în trei serii de cîte 15 elemente şi acestea legate în paralel. La bornele bateriei astfel formate se cuplează o bobină de rezistenţă $R = 6$ Ω. Care este intensitatea curentului care parcurge spirele bobinei? Ce se poate spune despre intensitatea debitată de bateria de elemente astfel grupate?

2°. Bobina este constituită din 240 spire, lungimea sa fiind 20 cm. Care este intensitatea inducţiei magnetice în interiorul acestei bobine? Cum se va orienta un mic ac magnetic mobil, în interiorul acestei bobine, în funcţie de axa bobinei?

3°. Se face să acţioneze, perpendicular pe axa solenoidului, un cîmp magnetic uniform produs de un magnet. Acul deviază cu un unghi de 30°. Care este valoarea inducţiei magnetice produse de magnet?

4°. Fără a înlătura magnetul, se cuplează în paralel la bornele bobinei o rezistenţă de 2 Ω. Care va fi noua deviaţie a acului?

Se neglijează rezistenţa firelor de legătură şi influenţa cîmpului magnetic terestru.

3.2.115. În puţul unei mine adînci, cabina unui ascensor lunecă pe două bare metalice verticale paralele, la distanţa de 1 m una de alta şi situate într-un plan perpendicular pe meridianul magnetic terestru. Cele două bare metalice sînt unite la capetele superioare printr-un conductor pe care este înseriat un galvanometru de rezistenţă $r_0 = 300$ Ω. Odată cu coborîrea cabinei, pe cele două bare verticale lunecă o tije metalică şi totodată galvanometrul indică un curent de $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ A. Să se deducă:

1°. tensiunea electromotoare indusă în tijă în timpul coborîrii cabinei;

2°. viteza cu care coboară cabina. Se neglijează rezistenţa barelor şi tijei; se ia $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

3.2.116. Un conductor AB, lung de 60 cm şi de masă $m = 10$ g, este suspendat de o pereche de conductoare de alimentare, sub formă de arc,

într-un cîmp magnetic de inducție $B = 0{,}4$ T (fig. 3.97). Care este mărimea și sensul curentului care trebuie să parcurgă conductorul AB pentru ca arcurile de care acesta este suspendat să nu fie tensionate (întinse sau comprimate)?

3.2.117. În interiorul unui solenoid lung constituit din $n_1 = 5\,000$ spire pe metru este plasată o mică bobină plată constituită din $N_2 = 200$ spire și fixată la extremitatea unuia din brațele unei balanțe (fig. 3.98). Axa bobinei este perpendiculară pe aceea a solenoidului, diametrul spirelor ei este $d = 10$ mm. Bobina este echilibrată de greutatea unui corp așezat pe talerul

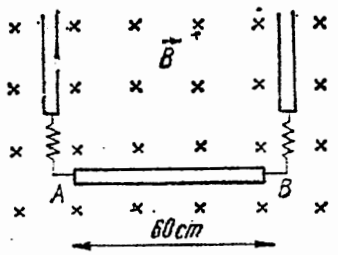


Fig. 3.97.

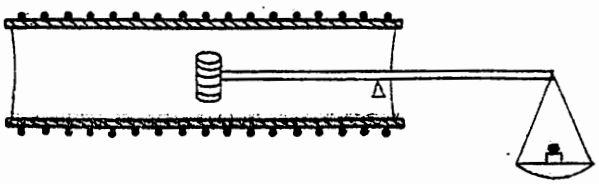


Fig. 3.98.

celuilalt braț al balanței. Ce greutate suplimentară trebuie așezată pe talerul balanței, dacă atît prin solenoid cît și prin bobină trece un curent electric $I = 20$ mA? Lungimea brațelor balanței este $l = 0{,}3$ m.

3.2.118. Un disc metalic izolat, de rază $a = 25$ cm, se rotește în jurul axei perpendiculare în centrul lui, făcînd $n = 1\,000$ ture pe minut. Să se determine d.d.p. U între centrul discului și periferia acestuia, în condițiile:

a) în absența cîmpurilor magnetice;

b) în prezența unui cîmp magnetic uniform de inducție $B = 10^{-2}$ T perpendicular pe planul discului.

3.2.119. Un fir metalic rectiliniu, de rezistență $r_0 = 0{,}1$ Ω pentru fiecare metru de lungime, este îndoit sub un unghi $2\alpha = 60°$ (fig. 3.99). Un alt fir rectiliniu, avînd aceeași rezistență pe metru, alunecă perpendicular pe bisectoarea unghiului (2α), pornind din vîrful unghiului, cu viteza constantă $v = 5$ m/s și limitînd un triunghi OMN de arie variabilă. Triunghiul OMN se află într-un cîmp magnetic uniform $B = 1{,}5$ T, perpendicular pe planul său. Să se determine intensitatea și sensul curentului care circulă prin conturul OMN.

Să se calculeze forța mecanică ce acționează asupra conductorului MN la momentul $t = 0{,}5$ s de la intrarea în mișcare a conductorului plecînd din punctul O.

3.2.120. Un fir conductor de rezistență r_0 pe fiecare metru de lungime formează un semicerc de rază a (fig. 3.100). Un conductor rectiliniu, din același fir, alunecă pe semicerc cu viteza constantă v. Conturul închis, format

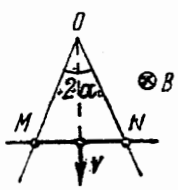


Fig. 3.99.

Fig. 3.100.

din arcul de cerc și coarda respectivă, se află într-un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ perpendicular pe planul conturului. Să se determine, în funcție de unghiul α, intensitatea curentului care parcurge conturul.

3.2.121. O bobină cu $N = 60$ spire, de secțiune $S = 3$ mm^2 și rezistența $R = 40\ \Omega$, este plasată într-un cîmp magnetic uniform, avînd axa paralelă cu liniile de forță ale cîmpului. Prin rotirea bobinei cu 180° în jurul unei axe perpendiculare pe liniile de cîmp, un galvanometru indică inducerea unei sarcini $Q = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ C. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic.

3.2.122. Un conductor cu lungimea $l = 1$ m, parcurs de un curent $I = 5$ A, se află într-un cîmp de inducție magnetică $B = 1{,}5$ T. Direcția conductorului face cu direcția cîmpului un unghi $\alpha = 30°$. Să se determine forța F la care este supus conductorul și puterea necesară pentru a deplasa conductorul în sens invers forței cu viteza $v = 8$ m/s.

3.2.123. Într-un cîmp magnetic uniform, cu inducția $B = 1$ T, sînt așezate orizontal, perpendicular pe direcția cîmpului magnetic, două bare paralele, de rezistență electrică neglijabilă, lungi de 5 m și la o distanță de 0,5 m una de alta. Perpendicular pe cele două bare se poate deplasa, fără frecare, o tijă conductoare de rezistență 1 Ω și masă 100 grame. Circuitul format din cele două bare și tija transversală este alimentat de la o sursă de curent continuu avînd tensiunea 100 V și rezistență interioară neglijabilă. Se cere:

1°. energia furnizată de sursă în timp de 0,2 secunde;

2°. care este forța electromagnetică ce acționează asupra tijei?

3°. timpul în care tija se deplasează pe cei 5 m lungime a barelor.

4°. viteza și energia cinetică a barei în momentul părăsirii șinelor. Nu se va ține seama de tensiunea electromotoare indusă în tijă.

3.2.124. În dispozitivul reprezentat în figura 3.101, AB și CD sînt două bare conductoare de rezistență neglijabilă, iar conductorul MN de rezistență egală cu 0,1 Ω și lungime $l = 1$ m, lunecă fără frecare pe cele două bare cu viteza constantă $V = 10$ m/s. Rezistorul r care închide circuitul are rezistența 0,1 Ω. Dispozitivul se află într-un cîmp de inducție $B = 0{,}6$ T, perpendicular pe planul circuitului și îndreptat dinspre observator spre figură. Să se calculeze:

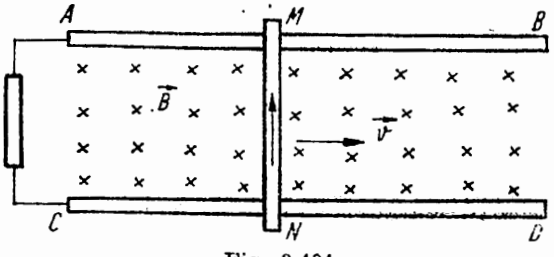


Fig. 3.101.

1°. tensiunea electromotoare indusă în circuit și curentul prin acesta;

2°. forța exercitată asupra conductorului MN;

3°. puterea mecanică necesară deplasării conductorului cu viteza V;

4°. să se arate că puterea mecanică de la punctul 3° este egală cu puterea Joule disipată în circuit.

3.2.125. Un conductor rectiliniu lung străbătut de un curent constant $I = 100$ A este așezat perpendicular pe liniile de forță ale unui cîmp magnetic uniform de inducție $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T. Să se definească locul punctelor din jurul conductorului în care cîmpul magnetic este nul.

3.2.126. O spiră dreptunghiulară de dimensiuni $a = 30$ cm și $b = 8$ cm este parcursă de un curent $I_1 = 20$ A. Paralel cu laturile a ale spirei, în afara acesteia și la distanța $d = 1$ cm de una din aceste laturi, există un conductor lung prin care trece un curent $I_2 = 30$ A. Să se calculeze forța rezultantă de interacțiune între conductor și spiră.

3.2.127. Două conductoare paralele A și B, situate în vid la 4 cm unul de altul, sînt parcurse de curenții $I_A = 40$ A și respectiv $I_B = 20$ A, de sensuri opuse. Să se calculeze:

1°. valoarea inducției magnetice $\vec{B}$ în punctele situate pe dreapta C paralelă cu conductoarele, situată în planul acestora și la egală distanță de fiecare din ele;

2°. valoarea inducției $\vec{B}$ în punctele situate pe dreapta D paralelă cu cele două conductoare și la 8 cm de A, respectiv 18 cm de B;

3°. forța ce se exercită pe unitatea de lungime din conductorul ce coincide cu dreapta C de la punctul 1°, conductor parcurs de curentul $I_G = 5$ A de același sens cu I_A.

3.2.128. O bobină circulară plată (multiplicator) cu aria 144 cm² este constituită din $n = 10$ spire. Aceasta se rotește în jurul unui diametru într-un cîmp de inducție magnetică $B = 25$ T, perpendicular pe axa de rotație. Să se calculeze viteza unghiulară cu care trebuie să se rotească bobina pentru ca t.e.m. indusă să aibă valoarea maximă $e_{max} = 20$ V.

3.2.129. Un solenoid cu lungimea $l = 8$ cm și secțiunea $S = 6$ cm² are $N = 96$ spire. În jurul solenoidului și către partea de mijloc a acestuia se înfășoară două spire ca în figura 3.102. Făcînd să treacă un curent electric de 0,25 A prin spirele solenoidului, după $t = 0{,}05$ s, cîmpul magnetic în centrul solenoidului devine nul. Să se calculeze t.e.m. indusă în cele două spire.

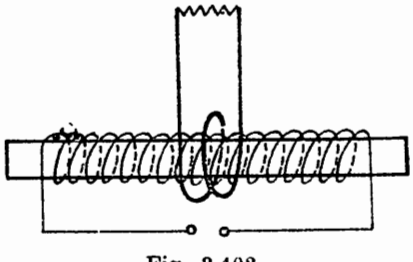


Fig. 3.102.

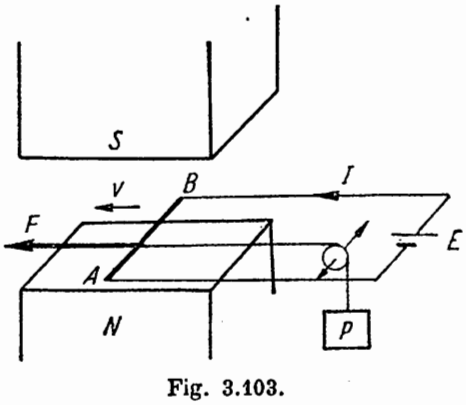


Fig. 3.103.

3.2.130. Un conductor AB, cu lungimea $l = 2$ m și rezistența electrică $R = 0{,}2\ \Omega$, așezat perpendicular pe liniile de forță ale unui cîmp magnetic de inducție $B = 1{,}5$ T și orientat vertical, este închis prin fire de rezistență neglijabilă într-un circuit care conține o sursă de t.e.m. $E = 120$ V, ca în figura 3.103. De mijlocul conductorului, cu ajutorul unui fir izolant și trecut peste un scripete fix acționează o greutate G.

1°. Sistemul fiind inițial în repaus, să se determine viteza conductorului și sensul de deplasare, după ce sistemul capătă o mișcare uniformă (se consideră cîmpul magnetic uniform și suficient de întins).

2°. Să se determine puterea electrică P_e, debitată de sursa de alimentare, puterea mecanică P_m produsă prin deplasarea greutății G și puterea disipată prin efect Joule P_J, în următoarele cazuri:

a) $G_1 = 450$ N; b) $G_2 = 1\,800$ N; c) $G_3 = 2\,250$ N.

3.2.131. Să se răspundă la aceleași întrebări puse de problema 3.2.130 pentru același sistem, cu deosebirea că scripetele și greutatea G sînt mutate în partea stîngă a conductorului AB. Se va considera numai cazul $G = 450$ N.

3.2.132. Printr-un conductor rectiliniu și orizontal, aflat la înălțimea $h_1 = 7{,}5$ m deasupra solului circulă un curent $I = 700$ A. O cale ferată trece pe sub conductor pe o direcție perpendiculară pe direcția acestuia. Să se studieze variația t.e.m. indusă în osia unui vagon care circulă pe calea ferată cu viteza constantă $v = 25$ ms^{-1}, considerînd lungimea osiei $l = 2$ m și aflată la $h_2 = 0{,}5$ m deasupra solului. Să se determine valoarea maximă a t.e.m. induse.

3.2.133. Un electron cu o energie cinetică de 10 eV se rotește într-un plan perpendicular pe un cîmp uniform de inducție magnetică $B = 10^{-4}$ T.

1°. Care este diferența de potențial cu care a fost accelerat electronul?

2°. Care este raza traiectoriei descrisă de electron în cîmp?

3°. Care este frecvența și perioada electronului în mișcarea în cîmp?

4°. Care este sensul de parcurgere a traiectoriei?

3.2.134. O particulă α parcurge o traiectorie circulară de rază $r = 0{,}45$ m într-un cîmp magnetic de inducție $B = 1{,}2$ T. Să se calculeze: a) viteza particulei; b) perioada sa de rotație; c) energia sa cinetică; d) diferența de potențial cu care a fost accelerată pentru a primi această energie.

3.2.135. Un electron intră cu viteza $v_0 = 10^6$ m/s într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 10^{-4}$ T, viteza electronului făcînd un unghi $\alpha = 45°$ cu direcția liniilor de forță ale cîmpului. Să se arate că electronul va descrie o elicoidă cilindrică și să se determine raza cilindrului, perioada de rotație a electronului și pasul elicoidei.

3.2.136. Într-un tub de raze catodice se obține un fascicul de electroni cu o viteză $v = 4 \cdot 10^7$ ms^{-1}, constituind un curent cu intensitatea de 10^{-3} A.

1°. Care este energia cinetică a unui electron din fascicul?

2°. Care este diferența de potențial între electrozii tubului?

3°. Fasciculul de electroni cade integral pe o plăcuță de platină de masă $m = 50$ g. Considerînd că întreaga energie cinetică a electronilor este absorbită de plăcuță sub formă de căldură, să se spună cu cîte grade se ridică temperatura plăcuței într-un minut. Căldura specifică a platinei este $c = 147$ J/kg · K.

4°. Fasciculul de electroni de la punctul 1° traversează în vid, cîmpul electric uniform al unui condensator plan, ale cărei armături au lungimea $l = 5$ cm și sînt depărtate cu $d = 2$ cm și paralele cu direcția inițială a fasciculului de electroni. Între armăturile condensatorului fiind o diferență de potențial $U = 500$ V, să se studieze traiectoria unui electron și deviația acestuia în cîmp.

3.2.137. Considerăm un fascicul de electroni emiși de un catod c, accelerați în direcția OX de un anod A care limitează fasciculul cu o diafragmă D': fasciculul accelerat întîlnește un ecran fluorescent. Diferența de potențial între catod și anod este $U_1 = 10^4$ V. Să se determine:

1°. viteza v_0 și energia cinetică a unui electron accelerat de cîmp;

2°. fasciculul de electroni este supus apoi pe o distanță $l = 6$ cm acțiunii unui cîmp electric uniform, creat între armăturile unui condensator plan, paralele cu planul XOZ și depărtate la $d = 2$ cm. Diferența de potențial între armături este $U_2 = 1\,200$ V. Să se studieze mișcarea unui electron. Dîndu-se, conform figurii 3.104: $IO' = D = 30$ cm, să se calculeze deviația y a unui electron pe ecranul fluorescent;

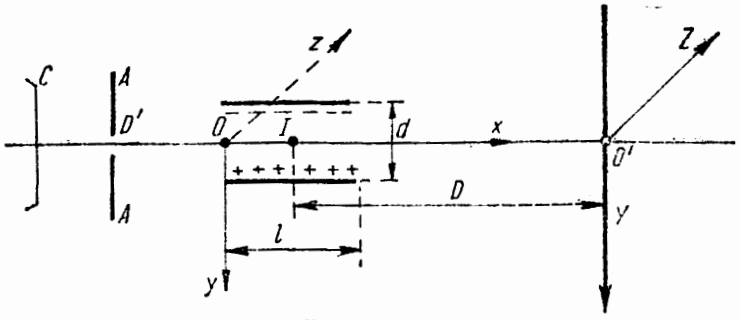


Fig. 3.104.

3°. electronii sînt supuși pe aceeași distanță $l = 6$ cm exclusiv acțiunii unui cîmp de inducție magnetică uniform $B = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ T, paralel la OY și îndreptat în sus. Să se studieze mișcarea unui electron în cîmpul magnetic și să se calculeze raza arcului de cerc descris și deviația Z a electronului pe ecran;

4°. facem să acționeze simultan, atît cîmpul electric de la punctul 2° cît și cîmpului magnetic de la punctul 3°. Fie punctul M în care un electron ciocnește ecranul. Să se determine locul geometric al punctelor de impact ale electronilor cu ecranul, în condițiile în care nu toți electronii au aceeași viteză.

3.2.138. O picătură de ulei de masă $m = 6{,}40 \cdot 10^{-16}$ kg se află între armăturile orizontale ale unui condensator plan cu distanța între armături $d = 10$ mm. În absența cîmpului electric, picătura coboară uniform cu viteza $v_1 = 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ m/s. Cînd se aplică condensatorului o diferență de potențial $U = 90$ V, picătura urcă uniform cu viteza $v_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ m/s. Să se deducă sarcina electrică cu care este încărcată picătura de ulei.

3.2.139. Diametrul interior al duanților unui ciclotron este $D = 1$ m. Inducția magnetică deviatoare este $B = 1{,}2$ T, iar diferența de potențial acceleratoare, între duanți, este $U = 10^5$ V. Să se determine:

1°. energia maximă și respectiv viteza corespunzătoare cu care părăsesc protonii ciclotronul;

2°. timpul cît durează accelerarea protonilor pînă la viteza maximă. Se dau: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

3.2.140. Un fascicul orizontal de electroni se mișcă după direcția XX'. Electronii din fascicul nu au toți aceeași viteză. Fasciculul traversează simultan un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$, orizontal și perpendicular pe XX' și un

cîmp electric uniform $\vec{E}$ vertical, ca în figura 3.105. Să se dea expresia vitezei v_0 a electronilor care vor trece prin orificiul O din paravanul P.

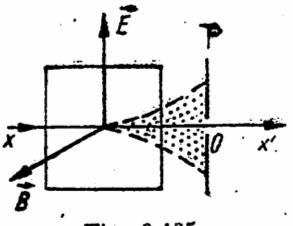


Fig. 3.105.

3.2.141. Care este viteza pe care trebuie să o aibă un electron, pentru ca mișcîndu-se orizontal, perpendicular pe direcția cîmpului magnetic terestru să se mențină la aceeași înălțime? Componenta orizontală a intensității cîmpului magnetic terestru este $H_0 = 16$ A/m.

3.2.142. Un cadru dreptunghiular de dimensiuni 20 cm × 10 cm și constituit din 500 spire (bobină plată) se rotește cu viteza unghiulară constantă $\omega = 20\ \pi$ radiani pe secundă în jurul unei axe orizontale într-un cîmp magnetic uniform cu $B = 0{,}5$ T, cîmpul fiind perpendicular pe axa de rotație a cadrului.

1°. Să se exprime în funcție de timp t.e.m. indusă în cadru și să se calculeze valoarea maximă a acesteia.

2°. Să se exprime intensitatea curentului debitat de t.e.m. de la punctul 1°, într-un circuit de rezistență $R = 50\ \Omega$. Să se reprezinte într-o aceeași diagramă, dependența de timp a t.e.m. indusă și curentului debitat.

3°. Să se calculeze cantitatea de căldură degajată, pe minut, în circuit.

3.2.143. Un cadru pătrat, cu latura $l = 20$ cm și avînd $N = 10$ spire, are extremitățile spirelor legate la două inele conductoare și izolate între ele. Sistemul format din cadru și inele se rotește în jurul unei axe din planul cadrului și trecînd prin centrul acestuia. Cadrul se rotește uniform cu o frecvență $\nu = 50$ ture pe secundă, într-un cîmp uniform de inducție $B = 0{,}2$ T și orientat perpendicular pe axa de rotație a cadrului. Pe cele două inele, care reprezintă terminațiile cadrului, apasă două contacte, unite printr-un rezistor cu $R = 4\ \Omega$; cadrul are rezistența $r = 1\ \Omega$. Se cer:

1°. expresia t.e.m. indusă în cadru și reprezentarea grafică a acesteia;

2°. expresia intensității curentului prin rezistorul R.

3.2.144. Un curent alternativ are pulsația $\omega = 314\ s^{-1}$, faza inițială $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ radiani și valoarea maximă a intensității $I_m = 10$ A. Se cer:

1°. perioada și frecvența curentului alternativ;

2°. expresia dependenței de timp a intensității curentului;

3°. reprezentarea grafică a dependenței de timp a intensității curentului;

4°. valorile momentane ale intensității i la momentele $t = 0;\ \frac{T}{12};\ \frac{T}{6};\ \frac{2}{3}\ T$.

3.2.145. O bobină cu inductanța $L = 0{,}5$ H este parcursă de un curent alternativ cu $I_{ef} = 0{,}5$ A și frecvența $\nu = 50$ Hz. Care este tensiunea la bornele bobinei?

3.2.146. Un generator furnizează o tensiune alternativă $u = 141{,}4 \sin 100\ \pi t$ volți. Care este frecvența acestei tensiuni și tensiunea efectivă U?

3.2.147. a) La bornele generatorului din problema 3.2.146 se cuplează un încălzitor cu rezistență pură R și este străbătut de un curent cu intensitatea efectivă $I = 5$ A. Să se calculeze R.

b) La bornele aceluiași generator se cuplează o bobină de inductanță $L = 0{,}1$ H și rezistență $R = 20\ \Omega$. Să se calculeze intensitatea efectivă.

3.2.148. La bornele generatorului de la problema 3.2.146 se cuplează un condensator cu capacitatea $C = 10^{-4}$ F. Să se calculeze intensitatea efectivă.

3.2.149. La bornele unui generator de tensiune alternativă $u = 141{,}4 \sin 100\ \pi t$ volți se conectează o bobină de inductanță $L = 0{,}1$ H și rezistență activă $R = 20\ \Omega$ și un condensator cu $C = 10^{-4}$ F legate în serie. Să se calculeze impedanța Z a circuitului și intensitatea efectivă I care parcurge circuitul. Ce se poate spune despre circuit?

3.2.150. Se cuplează la bornele unui generator de tensiune alternativă, o bobină de inductanță $L = 10^{-3}$ H și un condensator de capacitate $C = 10^{-6}$ F. Pentru ce frecvență circuitul intră în rezonanță?

3.2.151. O bobină conectată la tensiunea continuă $U_c = 20$ V lasă să treacă prin ea un curent $I_c = 2{,}5$ A. Aceeași bobină conectată la bornele unui generator de tensiune alternativă de valoare efectivă $U_{ef} = 17{,}8$ V și frecvență $\nu = 50$ Hz este parcursă de un curent de intensitate efectivă $I_{ef} = 2$ A.

a) Să se calculeze rezistența R și inductanța L a bobinei.

b) Care este defazajul φ între curent și tensiunea sinusoidală? Să se traseze diagrama.

c) Care este puterea electrică dezvoltată în bobină în cele două cazuri? În ce formă de energie se transformă energia electrică?

d) Bobina are un miez de fier care multiplică inductanța bobinei de 100 ori. Cît devine intensitatea efectivă și defazajul φ?

3.2.152. La o sursă de tensiune alternativă $U = 50\sqrt{2} \sin 1\,000\ t$ volți este cuplată o bobină de rezistență activă $R = 10\ \Omega$ și este parcursă de un curent efectiv $I = 0{,}1$ A.

1°. Să se calculeze inductanța bobinei și defazajul între tensiune și intensitate. Să se scrie expresia intensității instantanee.

2°. Ce capacitate trebuie să aibă un condensator care legat în serie cu bobina face ca, curentul și tensiunea alternativă să fie în fază?

3°. Să se determine, în condițiile de la punctul 2°: a) intensitatea efectivă și tensiunea efectivă la bornele bobinei (U_b) și respectiv la bornele condensatorului (U_c), precum și raportul U_b/U.

3.2.153. La o rețea de tensiune alternativă cu $U_{ef} = 120$ V sînt cuplate în serie două bobine avînd parametrii: $R_1 = 15\ \Omega$ și $X_1 = 8\ \Omega$ și respectiv, $R_2 = 33\ \Omega$ și $X_2 = 56\ \Omega$. Să se traseze diagrama vectorială și să se calculeze:

1°. intensitatea efectivă a curentului în circuit;

2°. tensiunile efective U_1 și U_2 la bornele celor două bobine;

3°. factorii de putere ai bobinelor (φ_1 și φ_2) și al circuitului (φ);

4°. puterile în circuit.

3.2.154. La o rețea de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 120$ V sînt cuplate în paralel: un rezistor cu rezistența pură $R = 2{,}5\ \Omega$, o bobină fără rezistență și avînd reactanța $X_L = 4\ \Omega$ și un condensator cu reactanța capacitivă $X_c = 7{,}5\ \Omega$. Să se calculeze intensitățile curenților prin fiecare din aceste elemente, curentul total și factorul de putere. Să se traseze diagrama.

3.2.155. În circuitul unei surse de curent alternativ $i = 10 \sin (1\,000\ \pi t)$ A se cuplează în paralel, un condensator cu $C = \frac{10^{-4}}{\pi}$ F și un rezistor fără reactanță, având rezistența R. Să se determine valoarea rezistenței R, pentru care circuitul absoarbe o putere activă maximă. Care este valoarea acestei puteri și cît este factorul de putere?

3.2.156. O bobină de rezistență neglijabilă, de inductanță $L = 2{,}10^{-2}$ H este conectată la un generator de tensiune alternativă $U_{ef} = 100$ V și frecvență $\nu = 5 \cdot 10^3$ Hz.

1°. Să se calculeze intensitatea eficace a curentului ce trece prin bobină.

2°. Cum variază această intensitate în bobină pentru diferite frecvențe ale tensiunii aplicate?

3.2.157. La bornele unui generator de tensiune alternativă cu $U_{ef} = 100$ V și frecvență $\nu = 5 \cdot 10^3$ Hz se cuplează un circuit conținînd, în serie, o bobină de rezistență neglijabilă și inductanță $L = 2 \cdot 10^{-2}$ H, un condensator de capacitate $C = 8 \cdot 10^{-8}$ F și un rezistor de rezistență pură $R = 236\ \Omega$.

1°. Să se calculeze intensitatea efectivă prin circuit.

2°. Să se calculeze tensiunile efective la bornele fiecărui element de circuit și să se facă diagrama Fresnel.

3°. Să se calculeze defazajul între intensitatea instantanee și tensiunea la bornele circuitului.

4°. Să se reprezinte grafic variația intensității efective în funcție de inductanța L și să se interpreteze acest grafic.

5°. Să se determine valoarea L_0 a inductanței bobinei pentru care curentul are valoarea maximă; să se calculeze valoarea acestui curent, precum și diferența de potențial la bornele bobinei, condensatorului și rezistorului.

3.2.158. Un generator de curent alternativ menține la borne o tensiune sinusoidală a cărei valoare maximă este $U_m = 282{,}2$ V și la o frecvență $\nu = 60$ Hz.

Între bornele generatorului se cuplează, legate în serie, un condensator de capacitate $C = 13{,}25 \cdot 10^{-6}$ F și o bobină a cărei rezistență este $R = 15\ \Omega$ și inductanță $L = 0{,}797$ H. Se cer:

1°. diferența de potențial efectivă U la bornele generatorului;

2°. impedanța circuitului;

3°. intensitatea efectivă a curentului debitat;

4°. tensiunile efective U_b și U_c la bornele bobinei și respectiv, condensatorului și să se construiască diagrama Fresnel pentru circuit;

5°. energia disipată în 10 minute în circuit;

6°. factorul de putere al circuitului;

7°. ce valoare L_0 ar trebui să aibă inductanța bobinei pentru ca impedanța circuitului să se reducă la rezistența R a bobinei? În aceste condiții, să se calculeze: intensitatea efectivă, U'_b și U'_c;

8°. să se calculeze energia dezvoltată în circuitul din condițiile de la punctul 7° în timp de 10 minute.

3.2.159. Alimentată la o tensiune continuă de 100 V, o bobină este parcursă de un curent de 2,5 A, iar la o tensiune alternativă cu $U_{ef} = 100$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz este străbătută de un curent de 2 A.

În serie cu bobina se conectează un condensator cu $C = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{3\pi}$ F și circuitul format este alimentat la tensiunea alternativă $U_{ef} = 100$ V.

Se cer:

1°. rezistența și inductanța bobinei;

2°. intensitatea prin circuitul cu condensator;

3°. tensiunea la bornele bobinei și condensatorului, precum și diagrama Fresnel pentru circuit;

4°. defazajul la bornele bobinei și respectiv la bornele circuitului și interpretarea rezultatelor;

5°. valoarea capacității condensatorului care ar produce rezonanța și valoarea intensității curentului în acest caz;

6°. puterile în circuit.

3.2.160. Un circuit este format dintr-un condensator de capacitate $C = \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-3}$ F, legat în serie cu o bobină, care are rezistența activă $R_a = 4\,\Omega$ și inductanța $L = \frac{0.02}{\pi}$ H. Circuitul este alimentat de la un generator de tensiune alternativă $u = 20\sqrt{2}\sin 100\,\pi t$ volți. Bobina are $N_1 = 200$ spire și servește ca primar unui transformator cu $N_2 = 25$ spire în secundar. Se cer:

a) frecvența și perioada curentului de alimentare;

b) diagrama Fresnel a tensiunilor și intensitatea în circuit;

c) tensiunea la bornele bobinei și condensatorului;

d) defazajul între I și U la bornele bobinei și la bornele circuitului;

e) tensiunea la bornele secundarului.

3.2.161. La bornele unui generator de tensiune alternativă cu $U_{ef} = 20$ V și frecvența $\nu = \frac{5 \cdot 10^3}{2\pi}$ Hz sînt conectate, în paralel, un rezistor cu rezistența $R = 400\ \Omega$ și o bobină cu inductanța $L = 2 \cdot 10^{-2}$ H și rezistența neglijabilă.

1°. Să se calculeze intensitățile curenților prin fiecare derivație și curentul total.

2°. Să se facă diagrama și să se deducă defazajul între I și U.

3.2.162. La o sursă de tensiune alternativă cu $U_{ef} = 120$ V sînt cuplate, în serie, o bobină cu rezistența activă $R = 16\ \Omega$ și reactanța inductivă $X_L = 30\ \Omega$ și un condensator cu reactanța capacitivă $X_c = 18\ \Omega$. Să se determine:

1°. impedanța circuitului Z, intensitatea efectivă a curentului I și factorul de putere; să se execute diagrama;

2°. tensiunile efective U_b și U_c la bornele bobinei și respectiv condensatorului;

3°. puterile în circuit.

3.2.163. O rețea electrică de rezistență $R = 2\ \Omega$ transportă un curent alternativ de frecvență $\nu = 50$ Hz la un contor. Tensiunea efectivă la bornele contorului, considerată constantă, este $U = 120$ V.

1°. Un încălzitor, lipsit de inductanță, montat la contor, funcționează timp de 5 ore. Contorul indică un consum de 6 kWh. Să se calculeze intensitatea efectivă a curentului. Care este pierderea de energie pe linie?

2°. Înlocuim încălzitorul de la punctul 1° cu un motor care funcționează cu un factor de putere $\cos \varphi = 0{,}8$. Știind că contorul indică un consum de 6 kWh în 5 ore, să se calculeze noua valoare efectivă a curentului și pierderile pe linie.

3°. La bornele contorului se cuplează numai un condensator cu capacitatea $C = 10^{-3}$ F. Să se calculeze intensitatea curentului, pierderile pe linie în 5 ore și consumul indicat de contor pentru 5 ore.

3.2.164. La bornele unui generator de tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 50$ Hz se cuplează un rezistor de rezistență $R = 15\ \Omega$, o bobină cu rezistența activă $R_a = 1\ \Omega$ și inductanța $L = 5 \cdot 10^{-2}$ H și un condensator cu capacitatea $C = 10^{-3}$ F, toate acestea legate în serie. Se cer:

1°. impedanța Z a circuitului și diferența de fază φ între intensitate și tensiunea alternativă, la bornele circuitului; să se traseze diagrama;

2°. care este, în funcție de L și C, frecvența tensiunii alternative pentru care se poate realiza rezonanța în circuit?

3.2.165. Într-un circuit de curent alternativ de frecvență $\nu = 50$ Hz sînt conținute, în serie, o bobină cu inductanța $L = 0{,}1$ H și un rezistor de rezistență R. Se constată o defazare $\varphi = 30°$ între tensiune și intensitatea curentului la bornele circuitului.

1°. Să se deducă valoarea rezistenței R a rezistorului.

2°. Să se calculeze capacitatea C a unui condensator care introdus în circuit înlătură defazajul.

3.2.166. La bornele unui generator de curent alternativ cu frecvența $\nu = 50$ Hz și amplitudinea tensiunii $E_0 = 100$ V se leagă, în serie, o bobină cu rezistența activă $R_a = 10\ \Omega$ și inductanța $L = 0{,}2$ H și un condensator de capacitate C. Să se calculeze valoarea capacității C pentru care tensiunea la bornele bobinei este maximă și să se calculeze valoarea efectivă a acesteia.

3.2.167. Care este valoarea inductanței L a bobinei care trebuie conectată în paralel cu un condensator de capacitate $C = 10^{-5}$ F pentru ca circuitul obținut să aibă frecvența de rezonanță $\nu_0 = 50$ Hz?

3.2.168. Un circuit oscilant constă dintr-o bobină, de lungime $l = 40$ cm și diametru $D = 4$ cm, înfășurată spiră lîngă spiră cu un fir conductor a cărui secțiune are diametrul $d = 1$ mm și o baterie de 10 condensatoare plane, legate în paralel, avînd fiecare plăcile de dimensiuni 20 cm × 15 cm și separate cu strat de dielectric de grosime 0,1 mm și permitivitate relativă $\varepsilon_r = 5$.

Să se calculeze perioada proprie de oscilație a circuitului.

3.2.169. Între bornele A și C ale unui generator de tensiune alternativă de frecvență ν se leagă, în serie, o bobină AB avînd rezistența R și inductanța L, și un condensator D (fig. 3.106).

1°. Intensitatea efectivă a curentului în circuit fiind $I = 0{,}2$ A și tensiunile efective $U_{AC} = 120$ V, $U_{AB} = 160$ V și $U_{BC} = 56$ V, să se calculeze: R, X_L și X_C.

2°. Să se traseze diagrama tensiunilor și curenților și să se calculeze defazajul curentului față de tensiune la bornele circuitului.

3°. Știind că dacă un curent de frecvență $\nu' = \frac{125}{\pi}$ Hz ar traversa același circuit, ar fi în fază cu tensiunea la bornele circuitului, să se determine valorile inductanței L și capacității C.

Să se deducă valoarea frecvenței ν.

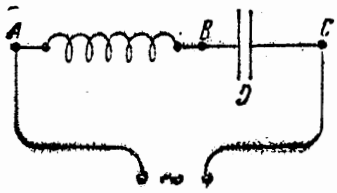


Fig. 3.106.

3.2.170. Un circuit serie, alimentat la o sursă de tensiune alternativă $u = 120\sqrt{2}\sin 100\,\pi t$ volți, conține o bobină și o coardă vibrantă (AB) întinsă cu ajutorul unei greutăți G, ca în figura 3.107, punctul B fiind fix, iar în A un scripete fix. Bobina și coarda sînt construite dintr-un același fir de cupru cu diametrul secțiunii 0,2 mm, densitatea 8 800 kg/m³ și rezistivitatea $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ω m.

Partea vibrantă a coardei, AB, are o lungime $l = 1$ m și se află între polii N și S ai unui magnet. Bobina constituită din $N = 200$ spire de diametru 10 cm este cufundată într-un calorimetru a cărui capacitate calorică este echivalentă cu aceea a 6 kg apă și se constată că acesta se încălzește cu 3°C în 10 minute.

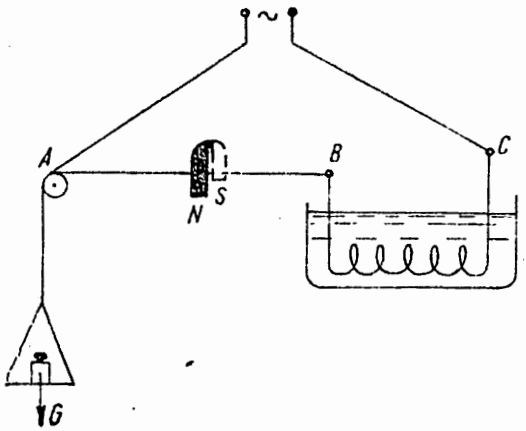


Fig. 3.107.

1°. Să se studieze mișcarea coardei și să se calculeze valoarea greutății G pentru care vibrează cu amplitudinea maximă, avînd un singur ventru (frecvență fundamentală).

2°. Să se calculeze: a) rezistența R_{AB} a coardei și R_b a bobinei; b) intensitatea efectivă a curentului; c) inductanța L a bobinei.

3°. Care este valoarea C a capacității unui condensator, care, plasat în serie în circuitul din problemă, să provoace trecerea unui curent de intensitate maximă și care va fi în aceste condiții, tensiunea la bornele condensatorului?

3.2.171. Se construiește un încălzitor electric de putere $P = 600$ W care va fi alimentat la o rețea de tensiune alternativă cu $U_{ef} = 120$ V.

1°. Să se calculeze rezistența firului folosit pentru încălzire.

2°. Să se determine intensitatea efectivă a curentului în regim de funcționare.

3°. Să se calculeze cantitatea de căldură furnizată de încălzitor într-o oră.

3.2.172. Un wattmetru indică 220 W într-o porțiune de circuit sub o tensiune alternativă de valoare efectivă $U = 110$ V; dacă un ampermetru montat în circuit indică 2,5 A, care este factorul de putere? Ce va indica ampermetrul pentru o aceeași valoare a puterii dată de wattmetru, dacă tensiunea este continuă, $U_c = 110$ volți?

3.2.173. Înfășurarea unui transformator conține $N_1 = 125$ spire în primar și $N_2 = 375$ spire în secundar. Diferența de potențial efectivă la bornele primarului este $U_1 = 10$ V și frecvența tensiunii alternative este $\nu = 50$ Hz. La bornele secundarului este cuplat un rezistor cu rezistența pură R și cufundat într-un calorimetru al cărui echivalent în apă este 0,6 kg apă. Temperatura calorimetrului se ridică cu $\Delta\theta = 2{,}16$°C într-un minut. Să se calculeze valoarea rezistenței R și intensitatea efectivă a curentului

prin fiecare din cele două înfășurări ale transformatorului. Se admite că factorii de putere sînt aceeași în ambele circuite și că randamentul transformatorului este 1.

3.2.174. 1°. O cădere de apă alimentează un generator de curent alternativ; instalația are un randament 0,80 și generatorul furnizează o tensiune efectivă de 4 000 V. Tensiunea furnizată de alternator este ridicată cu ajutorul unui transformator al cărui secundar are de 40 ori mai multe spire decît primarul. Puterea furnizată de secundar este de $4 \cdot 10^7$ W. Știind că debitul mediu al căderii de apă este de 10 m³/s și că randamentul alternatorului este egal cu acela al transformatorului și egal cu 0,90, să se calculeze înălțimea de la care cade apa.

2°. Puterea furnizată de instalație este transportată la o distanță de 200 km printr-o linie constituită din două fire de cupru cu secțiunea de 100 mm². Să se calculeze: a) tensiunea efectivă la plecare; b) tensiunea efectivă la consumator și puterea disponibilă. Factorul de putere al rețelei este 0,8; rezistivitatea cuprului este $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ω m.

3°. Ce secțiune trebuie să aibă firul dacă dorim să transportăm aceeași putere, cu aceleași pierderi, tensiunea efectivă la plecare fiind 10^4 V?

3.2.175. Pentru măsurarea capacității unui condensator, se realizează montajul reprezentat în figura 3.108. Între bornele M și N se aplică o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență $\nu = 50$ Hz. Intensitatea efectivă a curentului prin ampermetru este $I = 288$ mA și tensiunea efectivă la bornele condensatorului este $U_c = 52$ V.

a) Rezistența voltmetrului este considerat suficient de mare încît curentul ce trece prin el este neglijabil. Să se calculeze C.

b) Voltmetrul se consideră că are o rezistență pur ohmică $R = 4\,000\ \Omega$; rezultă că valoarea capacității găsite în condițiile de la punctul (a) diferă de valoarea reală C_0. Să se calculeze eroarea relativă $\frac{\Delta C}{C_0}$.

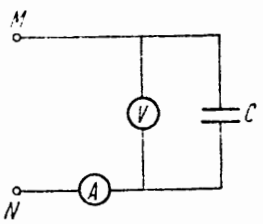


Fig. 3.108.

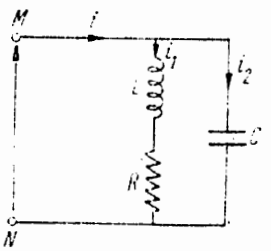


Fig. 3.109.

3.2.176. Se realizează montajul din figura 3.109. Capacitatea condensatorului este variabilă; bobina are o rezistență activă $R = 6{,}7\ \Omega$ și o inductanță $L = 0{,}95$ H. Se aplică între punctele M și N o tensiune alternativă cu valoarea efectivă $U = 120$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz.

a) Pentru ce valoare a capacității C, curentul i este în fază cu tensiunea u?

b) Să se calculeze, în acest caz, valorile efective I_1, I_2 și I.

3.2.177. Un electromotor, alimentat la curent alternativ sub o tensiune efectivă $U = 220$ V, furnizează o putere $P = 3$ kW. Știind că randamentul motorului este $\eta = 0{,}92$ și factorul de putere este 0,80, să se calculeze intensitatea efectivă a curentului care străbate motorul.

3.2.178. Un circuit, cuplat la bornele unui generator de tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 50$ Hz, are o rezistență $R = 120\ \Omega$ și inductanța $L = 0{,}288$ H.

a) Să se calculeze capacitatea condensatorului care, cuplat în serie cu circuitul de mai sus, face ca intensitatea i a curentului să fie în fază cu tensiunea u.

b) Aceeași întrebare, pentru cazul condensatorului cuplat în derivație cu circuitul inițial.

3.2.179. La bornele unei surse de tensiune alternativă sinusoidală, de frecvență $\nu = 50$ Hz și tensiune efectivă $U = 220$ V, sînt cuplate în paralel un rezistor cu rezistență pură care consumă o putere $P_R = 1\,000$ W și un electromotor care consumă o putere $P_M = 2\,000$ W; factorul de putere al motorului este 0,60.

a) Să se calculeze factorul de putere al instalației, precum și valoarea intensității efective a curentului care circulă pe linie.

b) Să se calculeze capacitatea condensatorului care ar trebui cuplat în derivație pentru ca factorul de putere al instalației să devină 0,90.

3.2.180. Se consideră circuitul reprezentat în figura 3.111, alimentat de la o rețea de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 120$ V. Se dau valorile: $R_1 = 5{,}6\ \Omega$, $X_L = 3{,}3\ \Omega$, $R_2 = 4{,}2\ \Omega$, $X_C = 4\ \Omega$. Să se calculeze curenții I_1, I_2 și curentul total și bilanțul puterilor.

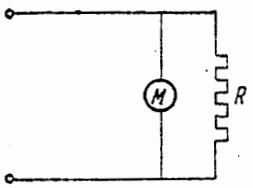


Fig. 3.110.

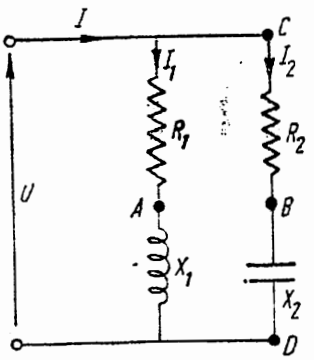


Fig. 3.111.

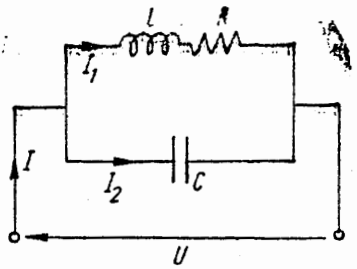


Fig. 3.112.

3.2.181. La o sursă de curent alternativ cu frecvența $\nu = 50$ Hz și tensiunea efectivă $U = 120$ V, se montează, ca în figura 3.112, o bobină cu rezistența $R = 15\ \Omega$ și inductanța $L = 0{,}1$ H în paralel cu un condensator cu capacitatea $C = 10^{-5}$ F.

Să se calculeze curenții și factorul de putere al circuitului.

3.2.182. La o rețea de curent alternativ cu pulsație $\omega = 1\,000\ s^{-1}$ în derivație cu un reostat de rezistență $R_1 = 10\ \Omega$ și inductanță $L_1 = 0{,}03$ H este cuplat un rezistor de rezistență ohmică $R_2 = 20\ \Omega$ și tot în paralel, un condensator de capacitate $C = 4 \cdot 10^{-5}$ F. Curentul în rezistorul R_2 are valoarea $I_2 = 6$ A. Să se calculeze curentul: prin reostat, I_R; prin condensator, I_C; curentul total și factorul de putere al circuitului.

3.2.183. Un dinam cu excitație serie are următoarele caracteristici ale indusului: $R_r = 1{,}5\ \Omega$, raza secțiunii $r = 10$ cm, lungimea $l = 25$ cm și $N = 90$ spire. Indusul se rotește cu $n = 10$ rotații pe secundă în cîmpul

magnetic al inductorului. Rezistența inductorului este $R_i = 0{,}5\ \Omega$; inducția magnetică are valoarea $B = 3$ T. Să se calculeze:

1°. t.e.m. produsă de dinam;

2°. curentul și tensiunea de utilizare dacă dinamul alimentează un circuit exterior cu rezistența $R_e = 16\ \Omega$;

3°. numărul de becuri cu rezistența $R = 240\ \Omega$ fiecare, montate în derivație pe care poate să le alimenteze dinamul;

4°. puterea unui bec;

5°. randamentul electric al dinamului.

3.2.184. Un dinam șunt este folosit pentru încărcarea unei baterii de acumulatoare cu o intensitate $I = 15$ A. Bateria are t.e.m. de 50 V și rezistența interioară 0,5 Ω. Rezistențele dinamului sînt de 160 Ω pentru înfășurarea de excitație și 0,5 Ω, aceea a rotorului. Conductoarele de legătură de la dinam la baterie au o rezistență de 0,6 Ω.

1°. Să se calculeze intensitatea curentului de excitație și intensitatea curentului din rotor.

2°. Să se calculeze t.e.m. a dinamului.

3.2.185. În schema reprezentată în figura 3.113 sînt alimentate de la o sursă de tensiune alternativă de frecvență $\nu = 50$ Hz și tensiune efectivă $U = 100$ V următoarele elemente, cuplate în paralel: un rezistor cu rezistența $R = 20\ \Omega$, o bobină cu rezistența activă $R_L = 15\ \Omega$ și inductanța $L = 50$ mH și un condensator cu capacitatea $C = 5 \cdot 10^{-3}$ F.

Să se deducă intensitățile curenților prin fiecare element și curentul total, precum și puterile. Să se traseze diagramele tensiunilor și curenților.

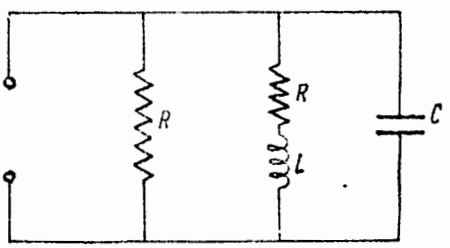


Fig. 3.113.

3.2.186. Un conductor vertical, cu un capăt pus la pămînt (antenă), are lungimea $l = 30$ m și capacitatea proprie $C = 10^{-10}$ F. Se cer:

1°. să se calculeze inductanța proprie a antenei;

2°. sub acțiunea unei descărcări electrice atmosferice, antena este străbătută de un curent constant cu intensitatea $I = 100$ A. Cunoscînd rezistența $R = 1\ \Omega$ a antenei și capacitatea sa calorică $K = 120$ J/grad, să se calculeze timpul în care temperatura antenei crește cu $\Delta\theta = 100$°C;

3°. cu cît variază lungimea de undă proprie a antenei după dilatare prin încălzirea corespunzătoare? Coeficientul de dilatare liniară al antenei este $\alpha = 10^{-5}$ grad^{-1};

4°. să se calculeze intensitatea cîmpului electric uniform din conductor în timpul descărcării electrice;

5°. la ce distanță r_0 de conductor și spre ce punct cardinal, cîmpul magnetic creat de curentul ce trece prin antenă în timpul descărcării anulează componenta orizontală a cîmpului magnetic terestru, care are valoarea $H_0 = 16$ A/m?

3.2.187. Un acumulator de 2 V este conectat în serie într-un circuit constituit din două receptoare electrice necunoscute. Curentul debitat de acumulator prin circuit este de 200 mA. Dacă în locul acumulatorului se

conectează un generator de curent alternativ avînd tensiunea efectivă 2V și frecvența 50 Hz, curentul în circuit devine 100 mA.

1°. Care este natura elementelor electrice din circuit și valoarea mărimilor caracteristice ale acestora?

2°. Presupunînd că frecvența tensiunii alternative aplicată la bornele circuitului ar fi $\nu' = 10^3$ Hz, să se calculeze noua valoare a intensității curentului alternativ prin circuit.

3.2.188. Într-un circuit electric sînt legate în serie: un dinam care are t.e.m. $E = 120$ V și rezistența interioară $R_D = 3\ \Omega$; un solenoid cu lungimea $l = 20$ cm, $N = 200$ și rezistența electrică $R_S = 4\ \Omega$; un voltametru cu $CuSO_4$ de rezistență $R_V = 5\ \Omega$ și tensiune contraelectromotoare neglijabilă; un rezistor de rezistență R.

Știind că în timp de 15 minute în voltametru se depun 2 g cupru la catod, să se calculeze:

1°. intensitatea I a curentului electric din circuit, echivalentul electrochimic al cuprului fiind $k = 0{,}33$ mg/coulomb;

2°. intensitatea H a cîmpului magnetic pe axa solenoidului;

3°. fluxul magnetic φ care străbate o spiră a solenoidului, diametrul spirei fiind $D = 6$ cm;

4°. valoarea rezistenței R;

5°. randamentul electric al dinamului.

3.2.189. Un dinam cu excitație în derivație alimentează un circuit derivație format dintr-o lampă cu incandescență și respectiv un rezistor cu rezistența $R = 15{,}9\ \Omega$. Tensiunea electromotoare a dinamului este de 110 V, rezistența indusului 0,5 Ω și aceea a inductorului de 30 Ω, iar intensitatea curentului în indus 12 A. Să se calculeze:

1°. puterea absorbită de lampă;

2°. cantitatea de căldură disipată în rezistor în timp de o oră.

3.2.190. Dispunem de: un condensator de capacitate $C = 2 \cdot 10^{-5}$ F; o bobină cu rezistența ohmică $R_L = 10\ \Omega$ și inductanța $L = 0{,}3$ H și de o sursă de tensiune alternativă sinusoidală a cărei valoare efectivă este $U = 100$ V și a cărei frecvență ν poate fi variată.

1°. Frecvența tensiunii fiind $\nu = 50$ Hz, să se calculeze valoarea efectivă și defazarea curent-tensiune pentru curentul obținut prin cuplarea la sursa de tensiune alternativă, succesiv, a elementelor de circuit menționate: condensatorul, bobina, apoi ansamblul condensator și bobină legate în paralel și în fine, condensatorul și bobina legate în serie. În ultimele două cazuri, să se indice și tensiunea efectivă la bornele condensatorului și respectiv bobinei.

2°. Menținînd valoarea tensiunii efective $U = 100$ V, să se determine frecvența pentru care valoarea intensității curentului este maximă și în acest caz, să se calculeze valoarea efectivă și defazarea tensiunii la bornele condensatorului și la bornele bobinei.

3.2.191. Un generator de curent alternativ monofazat debitează un curent de 40 A la o tensiune de 6 000 V. Energia electrică este transmisă printr-un transformator ridicător de tensiune cu raportul de transformare $K_1 = 20$ și randamentul în sarcină $\eta_1 = 0{,}95$, unei linii electrice bifilare, lungă de 150 km. La capătul liniei este conectat un transformator coborîtor de tensiune cu $K_2 = \frac{1}{40}$ și $\eta_2 = 0{,}95$. Să se determine:

1°. tensiunea la bornele secundare ale transformatorului coborîtor, la mersul în gol;

2°. știind că secțiunea firului din care este confecționată linia electrică de transport este $S = 5$ mm^2 și rezistivitatea materialului este $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ω m, să se calculeze puterea debitată de secundarul transformatorului coborîtor;

3°. considerînd că generatorul este instalat într-o termocentrală și că aburii turbinei au o temperatură maximă de 540°C, condensînd la 100°C, presupunînd că mașina termică este ideală, iar generatorul electric are randamentul în sarcină $\eta_e = 0{,}94$, să se calculeze randamentul global al termocentralei și al sistemului electric atașat.

3.2.192. O coardă de oțel cu lungimea $l = 1$ m, diametrul secțiunii 0,5 mm și densitatea $8 \cdot 10^3$ kg/m^3 este fixată la cele două extremități ale sale și se află între piesele polare ale unui electromagnet alimentat cu curent alternativ de frecvență $\nu = 50$ Hz.

1°. Care este forța cu care trebuie să fie întinsă coarda pentru ca aceasta să vibreze sub acțiunea forței magnetice, avînd un singur ventru, cu amplitudinea maximă?

2°. Cum trebuie modificată această forță de întindere, pentru ca, coarda să vibreze astfel ca de-a lungul ei să se formeze 3 și respectiv, 5 ventre?

3.2.193. La bornele unui generator de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 120$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz sînt cuplate, în serie, un rezistor cu $R = 300$ Ω și un condensator. Să se calculeze capacitatea condensatorului pentru care intensitatea efectivă în circuit are valoarea $I = 0{,}24$ A și să se scrie expresia intensității curentului în funcție de timp.

3.2.194. Un circuit conectat la un generator de curent alternativ de frecvență $\nu = 50$ Hz se scindează între două puncte ale sale, M și N, în două derivații. Una dintre derivații este constituită dintr-un rezistor de rezistență pură $R = 200$ Ω, cealaltă are o bobină cu rezistența activă R_a și inductanță L. Știind că intensitățile efective în cele două derivații sînt egale și că intensitatea efectivă în circuitul principal este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decît cel din derivații, se cere:

1°. să se reprezinte diagrama curenților;

2°. să se deducă defazajul curentului în raport cu tensiunea la bornele bobinei;

3°. să se arate că impedanța bobinei este egală cu $R = 200$ Ω;

4°. să se deducă valorile rezistenței R_a și inductanței L ale bobinei.

3.2.195. Un circuit oscilant este constituit dintr-un solenoid de lungime $l = 20$ cm, avînd $N = 100$ spire și secțiunea $S = 25$ cm^2, și un condensator format din două plăci metalice, plane și paralele, cu suprafața $S' = 2$ dm^2 fiecare, separate de un strat de aer de grosime $d = 2$ mm. Să se calculeze frecvența proprie ν_0 a oscilațiilor curentului.

3.2.196. Un disc metalic de rază $a = 0{,}2$ m se poate roti în jurul axei perpendiculare în centrul său într-un cîmp de inducție magnetică $B = 0{,}2$ T, orizontal și paralel cu axa discului. Pe periferia discului este înfășurat un fir izolator, de masă neglijabilă care susține un corp de masă $m = 20$ g

(fig. 3.114). Discul este cuplat prin axa sa O și un punct M, lunecător pe circumferință, în circuitul unui generator de t.e.m. $E = 10$ V și rezistență interioară neglijabilă; un reostat este înseriat în circuit.

1°. Care este valoarea rezistenței R a reostatului pentru care sistemul este în echilibru? Se neglijează rezistența electrică a discului.

2°. Se variază cu ΔR rezistența reostatului din circuit astfel ca, corpul suspendat să urce cu viteza constantă $v = 2\ \text{ms}^{-1}$. Să se calculeze tensiunea contraelectromotoare a acestui „motor" și variația ΔR a rezistenței.

3.2.197. Un cadru pătrat *abcd* de suprafață $s = l^2 = 20\ \text{cm}^2$, format dintr-un fir conductor, are masa $m = 0{,}1$ g și rezistența electrică $R = 0{,}05\ \Omega$. Cadrul alunecă într-un plan vertical cu viteza constantă $v = \sqrt{5}\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ îndreptată în jos. La momentul inițial, latura orizontală inferioară *cd* pătrunde într-un cîmp de inducție $B = 0{,}5$ T ale cărui linii de forță sînt perpendiculare pe planul cadrului și sînt limitate în interiorul unui dreptunghi lat de

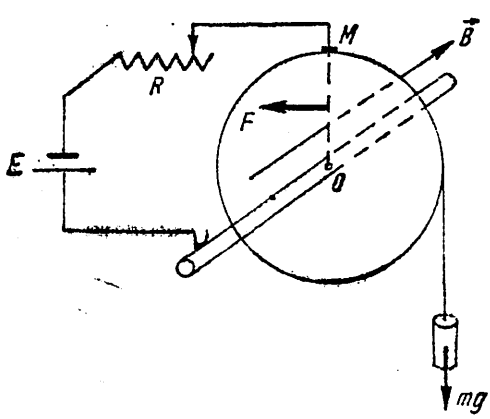


Fig. 3.114.

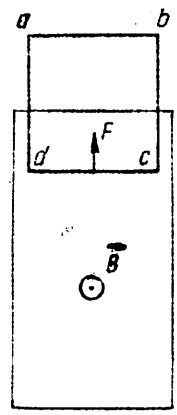


Fig. 3.115.

5 cm și înalt de 10 cm.

1°. Să se studieze forța electromagnetică care acționează asupra cadrului.

2°. Care trebuie să fie viteza de translație v a cadrului pentru ca forța electromagnetică să echilibreze greutatea cadrului? Se ia $g = 10\ \text{ms}^{-2}$.

3.2.198. Un electron se deplasează într-un cîmp magnetic uniform de inducție B. La momentul inițial, viteza electronului este v_0 și face un unghi α cu direcția cîmpului.

a) Să se stabilească ecuația traiectoriei electronului sub formă parametrică (x, y și z ca funcții de timp) luînd ca origine a referențialului, punctul unde se află electronul la momentul inițial. Cîmpul $\vec{B}$ este orientat după axa Z; axele X și Y sînt astfel orientate încît vectorul $\vec{v}_0$ se află în planul XOZ.

b) Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție ale traiectoriei electronului cu planul YOZ.

3.2.199. La bornele circuitului reprezentat în figura 3.116 se aplică o tensiune alternativă sinusoidală de valoare efectivă $U = 220$ V și frecvență $\nu = 50$ Hz. Rezistorul din circuit are rezistența pură $R = 22\ \Omega$, iar bobina

are o inductanță $L = 318$ mH. Capacitatea C a condensatorului din circuit este astfel aleasă încît voltmetrul montat în paralel cu bobina să indice o valoare maximă a tensiunii U_L. Să se determine, în aceste condiții, indicațiile voltmetrului, U_L și ampermetrului, I. Se neglijează rezistența interioară a ampermetrului și curentul ce trece prin derivația care conține voltmetrul.

3.2.200. Un generator de curent continuu, cu excitație separată, are la turația nominală n_N tensiunea de mers în gol $U_0 = 120$ V. Rezistența rotorului este $R_r = 0{,}1$ Ω. Sarcina generatorului este reprezentată de 120 becuri identice cu tensiunea nominală $U_{bec} = 120$ V și puterea nominală $P_{bec} = 100$ W. Cu cît trebuie crescută procentual turația generatorului pentru ca becurile să funcționeze în regimul nominal, excitația rămînînd constantă?

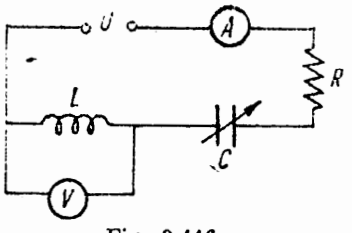


Fig. 3.116.

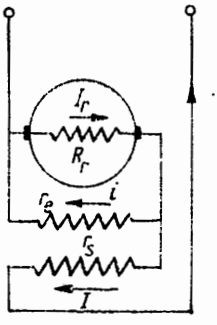


Fig. 3.117.

3.2.201. Un generator de curent continuu, cu excitație în derivație, debitează un curent de sarcină $I_S = 48$ A sub tensiunea $U = 115$ V. Rezistența indusului este $R_r = 0{,}16$ Ω, curentul de excitație $I_{ex} = 2$ A. Să se calculeze t.e.m. E a generatorului și rezistența înfășurării de excitație.

3.2.202. Un generator cu excitație separată alimentează o instalație compusă din 100 lămpi cu incandescență de 60 W la 220 V și două electromotoare: primul are puterea de 8,5 kW și randamentul de 85%, iar al doilea are puterea de 4,5 kW și randamentul de 75%, ambele funcționînd la 220 V. Fiecare din cele două conductoare folosite pentru alimentarea instalației are o rezistență de 0,05 Ω. Înfășurarea indusului generatorului are rezistența de 0,115 Ω. Să se determine tensiunea la bornele generatorului și puterea furnizată de generator în rețea.

3.2.203. Un generator cu excitație separată funcționează în gol, producînd la borne o tensiune de 230 V. Rezistența înfășurării rotorului este de 0,5 Ω. Să se determine tensiunea la bornele generatorului, atunci cînd acesta este cuplat cu o rețea a cărei rezistență echivalentă este 11 Ω, curentul de excitație rămînînd neschimbat.

3.2.204. Un generator cu excitație mixtă (fig. 3.117) produce o t.e.m. $E = 125$ V. Rezistența rotorului este $R_r = 0{,}176$ Ω, rezistența înfășurării excitației serie $r_s = 0{,}02$ Ω, curentul de sarcină $I = 50$ A, curentul în excitația derivație este $i = 1{,}1$ A.

Să se calculeze: a) tensiunea și valoarea rezistenței înfășurării de excitație în derivație și b) valoarea tensiunii la bornele AB ale generatorului.

3.2.205. Un motor cu excitație derivație, cu puterea de 7 kW, tensiunea 220 V, randamentul $\eta = 0{,}82$, rezistența rotorului $R_r = 0{,}284$ Ω, funcționează la sarcina nominală cu turația $n = 1\,000$ rotații pe minut. Să se calcu-

leze turația motorului la 3/4, 2/4 și 1/4 din sarcina nominală, cît și turația la mers în gol. Se va neglija curentul de excitație cît și curentul prin rotor de mers în gol și se va presupune că randamentul are valoarea 0,82 atît pentru sarcina nominală, cît și pentru sarcinile reduse.

3.2.206. Să se rezolve problema 3.2.205, în condițiile în care același motor are excitația serie.

3.2.207. Un motor cu excitație serie are următoarele caracteristici: tensiunea nominală 110 V; puterea nominală 7 kW; turația 1 200 rotații pe minut; randamentul 85%; rezistența rotorului, polilor auxiliari și a înfășurării de excitație 0,6 Ω.

Să se determine curentul absorbit de la rețea, tensiunea contraelectromotoare, cuplul util, pierderile mecanice și în fier.

3.2.208. Un transformator monofazat are raportul de transformare $U_1/U_2 = 10\,000/220$. Pe cadrul circuitului magnetic al transformatorului se înfășoară un număr $N = 12$ spire în care se obține o tensiune $U = 40$ V. Să se calculeze numărul de spire ale înfășurărilor primarului și secundarului transformatorului.

3.2.209. Un aparat electric, al cărui factor de putere este cos φ, consumă o putere P sub o tensiune efectivă U. La plecare, pe linia de alimentare, tensiunea efectivă este U_0 și puterea disponibilă P_0. Să se exprime R, rezistența liniei și U_0, în funcție de P, U, cos φ și $\eta = P/P_0$, randamentul liniei.

Se va lua $P = 2{,}3$ kW, $U = 600$ V și $\eta = 0{,}80$. Se vor face calculele pentru cos $\varphi = 0{,}8$ și cos $\varphi = 1$.

3.2.210. Se montează, în serie, un condensator de capacitate $C = 4 \cdot 10^{-6}$ F și o bobină, de rezistență $R = 500$ Ω și inductanță $L = 1$ H. La bornele porțiunii de circuit, astfel constituit, se aplică o tensiune alternativă sinusoidală, de valoare efectivă $U = 220$ V și pulsație ω variabilă.

a) Pentru ce valoare ω_0 a pulsației, puterea disipată în circuit este maximă? Care sînt valorile puterii maxime și defazajului tensiune-curent corespunzătoare?

b) Pentru ce valori ω_1 și ω_2 ale pulsației, puterea disipată în porțiunea de circuit este jumătate din puterea maximă? Să se calculeze defazajul tensiune-curent corespunzător.

c) Notăm cu $Q = Q_m/\sqrt{2}$ valoarea efectivă a sarcinii de pe armătura condensatorului. Să se exprime Q în funcție de U, R, L, C și ω. Pentru ce valoare ω_3 a pulsației, Q trece printr-un maxim?

3.2.211. a) Să se afle inductanța primarului unui transformator care la o tensiune alternativă de 220 V și frecvența 50 Hz și avînd o rezistență ohmică $R = 100$ Ω lasă să treacă un curent de 0,2 A.

b) Care este defazajul tensiune-curent în primar?

c) Ce măsuri se pot lua pentru a diminua pierderile în gol?

3.2.212. Un dinam cu excitație în derivație alimentează un circuit exterior de rezistență ohmică $R = 1\,000$ Ω. Să se calculeze intensitatea curentului din rotor dacă înfășurarea inductorului are rezistența $R_i = 100$ Ω, iar aceea a rotorului este $R_r = 10$ Ω.

Cum trebuie plasat un circuit oscilant cu $L = 10^{-3}$ H și ce valoare trebuie să aibă capacitatea condensatorului pentru a se obține oscilații electrice cu frecvența $\nu = 50$ Hz egală cu aceea de rotație a dinamului? Se dă tensiunea la borne de 100 V.

3.2.213. Un circuit oscilant acordat pentru $\lambda_1 = 10$ m este constituit dintr-un condensator plan cu aer avînd aria unei armături 100 cm² și o bobină de inductanță L_1. Dacă se conectează în serie cu prima bobină o a doua cu inductanța $L_2 = 3 \cdot 10^{-6}$ H, circuitul este acordat pe $\lambda_2 = 20$ m.

Să se calculeze: a) inductanța L_1 a primei bobine; b) distanța dintre armăturile condensatorului; c) frecvențele oscilațiilor în cele două cazuri.

3.2.214. 1°. Un circuit oscilant este constituit dintr-o bobină de inductanța $L = 5 \cdot 10^{-5}$ H și un condensator variabil. Dorim să obținem oscilații de frecvență $\nu = 5 \cdot 10^6$ Hz. Ce valoare trebuie să-i dăm capacității condensatorului?

2°. Condensatorul este format din 5 lame mobile formînd una din armături, intercalate între 6 lame fixe care constituie cea de-a doua armătură. Distanța între o lamă fixă și una mobilă este de 0,5 mm. Dielectric este aerul. Care este suprafața fiecărei lame, opusă celor vecine?

3°. Oscilațiile obținute sînt transmise unei antene și radiate în spațiu. Antena este o tijă metalică verticală, a cărei extremitate superioară este izolată, iar cea inferioară este legată la pămînt. În antenă se formează unde staționare. Ce înălțime trebuie să aibă tija pentru a se obține un singur maxim de intensitate a curentului la extremitatea inferioară și un minim la extremitatea superioară?

3.2.215. Două emițătoare de unde electromagnetice acordate pe frecvența $\nu = 5 \cdot 10^6$ Hz se află în punctele A și respectiv, B la o distanță $AB = 10^3$ m, după ce au fost sincronizate. Un observator purtînd un receptor acordat de asemenea pe frecvența de $5 \cdot 10^6$ Hz se deplasează pe dreapta AB cu viteză constantă. Se va constata o variație în intensitatea receptorului trecînd prin puncte unde aceasta este maximă și prin puncte unde intensitatea este minimă. Să se precizeze pozițiile acestor puncte în funcție de A și B.

REZOLVĂRI ȘI SOLUȚII

3.1.1. a) $\frac{F_c}{F_{a\text{-}u}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}}{6{,}67\ 10^{-11} \cdot 9{,}1^2 \cdot 10^{-62}} = 4{,}1 \cdot 10^{42}$.

b) $9 \cdot 10^9 q^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} M^2$; $q/M = 10^{-10} \sqrt{\frac{6{,}67}{9}} = 8{,}6 \cdot 10^{-11}$ C/kg.

3.1.2. Asupra fiecărei sarcini electrice q acționează patru forțe (fig. 3.30):

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{l^2}\ ;\quad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{2l^2}\ ,$$

$$F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qQ}{l^2}\ .$$

Din echilibrul acestor forțe ajungem la relația:

$$q\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 2Q;\quad Q/q = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2}).$$

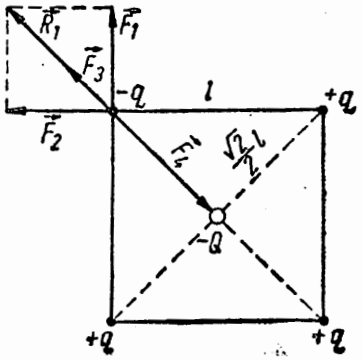


Fig. 3.30.

3.1.3. a) $F = -9 \cdot 10^9 \dfrac{1{,}6^2 10^{-38}}{25 \cdot 10^{-22}} = -9{,}2 \cdot 10^{-6}$ N,

b) $F = F_{cf} = \dfrac{mv^2}{r}$; $v = \sqrt{\dfrac{Fr}{m}} = 2{,}26 \cdot 10^6$ ms^{-1}.

3.1.4. $\vec{F} = q_3(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = 0$; $q_1/x^2 = q_2/(r - x)^2$;

$$(q_1 - q_2)x^2 - 2q_1 r x + q_1 r^2 = 0; \quad x_{1,2} = r\,\frac{q_1 \pm \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2}.$$

$x_1 = -20$ cm; $x_2 = 6{,}67$ cm (se verifică numai soluția x_2).

3.1.5. În punctul O: a) zero, b) $2{,}55 \cdot 10^{10}$ V/m (orizontal de la stînga la dreapta, c) $2{,}55 \cdot 10^{10}$ V/m (vertical în jos).

În punctul O_1: a) și b) $6{,}45 \cdot 10^{10}$ V/m (orizontal de la stînga la dreapta), c) $3{,}93 \cdot 10^{10}$ V/m (vertical în sus).

3.1.6. În punctele A, B și D, potențialul este zero. În punctul C, este $-2 \cdot 10^{10}$ V, iar în punctul E, este $+2{,}10^{10}$ V.

3.1.7. $T = \dfrac{mg + Eq}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mv^2}{l \sin\alpha(mg + qE)}$; $E_c = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{(mg + qE)l \sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

3.1.8. $\operatorname{tg}\alpha/2 = \dfrac{d}{\sqrt{4l^2 - d^2}} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot q^2}{\varepsilon_r \cdot d^2 G}$;

$$q = \frac{d}{3 \cdot 10^4}\sqrt{\frac{1}{10}\,\frac{G \cdot d}{\sqrt{4l^2 - d^2}}} \simeq 1{,}42 \cdot 10^{-8}\ \text{C},$$

α fiind unghiul dintre fire.

3.1.9. $E_C = 9 \cdot 10^9\left(\dfrac{q_1}{(AC)^2} + \dfrac{q_2}{(BC)^2}\right) = 9{,}72 \cdot 10^4$ V/m.

$$E_D = 9 \cdot 10^9\left(\frac{q_1}{(AD)^2} - \frac{q_2}{(BD)^2}\right) = 6{,}2 \cdot 10^4\ \text{V/m}.$$

În punctul E se compun doi vectori de mărime $E = 1{,}08 \cdot 10^4$ V/m, ce fac unghiul $\beta = 120°$. Se obține $E_E = 1{,}08 \cdot 10^4$ V/m, orientat orizontal de la punctul E spre dreapta.

3.1.10. $E = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q}{(R + r)^2} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{4\pi\sigma r^2}{(R + r)^2}$.

Se obține ecuația

$$-0{,}9r^2 + 2r + 2 = 0; \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1{,}8}}{0{,}9}; \quad r = 3\ \text{m}.$$

3.1.11. $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g + E(q_1 - q_2)}{m_1 + m_2}$; $T = \dfrac{2m_1 m_2 + E(m_2 q_1 + m_1 q_2)}{m_1 + m_2}$.

Pentru $q_1 = q_2 = 0$ se obțin formule cunoscute din mecanică.

3.1.12. $9 \cdot 10^9 \dfrac{q^2}{l^2}\sqrt{1 + 1 + 2\cos\alpha} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q_1 q}{l_1^2}$;

$$q_1 = \frac{q l_1^2}{l^2}\sqrt{2(1 + \cos\alpha)};$$

$$\alpha = 60°; \quad l_1 = \frac{l}{2\cos 30°} = \frac{l}{\sqrt{3}}; \quad q_1 = \frac{q}{\sqrt{3}} = 5{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{C}.$$

Echilibrul este nestabil. O deplasare elementară a sarcinii electrice q_1 conduce la stricarea echilibrului.

3.1.13. $\frac{9qq_1}{(l+x)^2} = \frac{qq_1}{x^2}$; $l + x = \pm 3x$; $x_1 = l/2$; $x_2 = -l/4$.

Soluția x_2 nu satisface condiția problemei. Echilibrul este stabil, dacă q_1 este negativă. Valoarea Q_1 nu este esențială.

3.1.14. Fie d distanța dintre sfere, care din condițiile problemei este aceeași în ambele cazuri.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9 \cdot 10^9 q^2}{d^2 V \rho g}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{9 \cdot 10^9 q^2}{d^2 \varepsilon_r V g(\rho - \rho_0)}.$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \rho = \varepsilon_r(\rho - \rho_0); \quad \varepsilon_r = \frac{\rho}{\rho - \rho_0} = \frac{1{,}6}{1{,}6 - 0{,}8} = 2.$$

3.1.15. Punctele în care se află sarcinile electrice q_1, q_2 și q formează un triunghi dreptunghic:

$$F = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}} = 287 \text{ mN}.$$

3.1.16. Intensitatea cîmpului electric în centrul hexagonului este rezultanta a trei vectori de valoare $3q/4\pi\varepsilon_0 l^2$ fiecare și orientați sub unghiul $\alpha = 60°$ unul față de altul. Rezultanta acestor vectori are valoarea:

$$E = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \text{ iar } F = qE = \frac{6q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

3.1.17. După punerea sferelor în contact, fiecare va avea sarcina electrică $(q_1 + q_2)/2$, deci

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}; \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2)^2}{4d^2}.$$

De unde

$$q_1 = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0}\,(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_2 - F_1}) = 0{,}14 \ \mu\text{C};$$

$$q_2 = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0}\,(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_2 - F_1}) = 20 \text{ nC}.$$

3.1.18. $C = \frac{q}{U}$; $q = 4\pi r^2\sigma$, capacitatea unei sfere este $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r$, deci

$$r = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U}{\sigma} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1\,200}{4{,}6 \cdot 10^{-7}} \simeq 2{,}3 \text{ cm}.$$

3.1.19. Fie q_0 sarcina electrică a corpului, iar q_0/m sarcina lui specifică:

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{q_0}{m}} = 1 \text{ ms}^{-1}.$$

3.1.20. Pentru deplasarea sarcinilor electrice q_1 și q_2 de la distanța l_0 la distanța l se cheltuiește energia:

$$\Delta E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l}\right) = 108 \cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

Sistemul fiind închis:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2; \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \Delta E;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta E \cdot m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} = 0{,}18 \text{ ms}^{-1}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta E \cdot m_1}{m_2(m_1 + m_2)}} = 0{,}06 \text{ ms}^{-1}.$$

3.1.21. $\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{l}{v}\right)^2 \leqslant d$; $v \geqslant l\sqrt{\frac{eE}{2dm}} = 5 \cdot 10^6$ ms^{-1}.

3.1.22. $v_0 = v_x$, $v_y = \frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eE}{m}\frac{l}{v_0^2}$;

$$E = mv_0^2 \operatorname{tg}\alpha / el = 147 \text{ V/m}.$$

3.1.23. $T = 10\,mg = mg - qE + \frac{mv_1^2}{l}$;

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2\left(g - \frac{qE}{m}\right)2l};$$

$$10\,mg = mg - gE + \frac{mv^2}{l} + 4mg - 4qE;$$

$$v = \sqrt{\frac{5(mg + qE)\,l}{m}}.$$

3.1.24. În absența sarcinii electrice q din punctul O, $v = \sqrt{5gl}$, iar în prezența sarcinii q va exista o forță de respingere $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q^2/l^2$, deci $v = \sqrt{5gl - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml}}$.

3.1.25. $m\omega^2 l \sin\alpha + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot mg$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{ml^3\sin^3\alpha}}$;

$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$.

3.1.26. $G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = E \cdot q$; $r = \sqrt[3]{\frac{3Eq}{4\pi\rho g}} = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$ m.

3.1.27. $U_1 = \frac{q}{C_1}$; $U_2 = \frac{q}{C_2}$; $q_1 = q_2 = q$; $U_1 + U_2 = U$; $U = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$;

$$q = \frac{U}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ C}; \; U_1 = 100 \text{ V}, \; U_2 = 40 \text{ V}.$$

3.1.28. a) $U = U_1 = U_2$; $q = q_1 + q_2$; $U_1 = \frac{q_1'}{C_1}$; $U_2 = \frac{q_2'}{C} = \frac{q - q_1'}{C_2}$.

$$q_1' = \frac{qC_1}{C_1 + C_2} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ C}, \; q_2' = q - q_1' = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C}.$$

b) $U = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} = 40$ V.

3.1.29. $C_1 = \frac{\varepsilon S}{d}$; $C = nC_1 = \frac{n\varepsilon S}{d}$; $n = \frac{dC}{\varepsilon S} = 157$.

Avem nevoie de $n' = n + 1 = 158$ foi pentru a face n condensatoare.

3.1.30. a) $\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2d_1}$; $d_1 = \frac{d(\varepsilon_r + 1)}{2} = 9$ mm;

b) $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 1{,}5 \cdot 10^{-11}$ F, $q = CU = 9 \cdot 10^{-9}$ C.

3.1.31. În sistemul centrului de masă, cu originea în fiecare moment la jumătatea distanței dintre protoni, fiecare proton va avea aceeași viteză inițială

$$v_1 = v_2 = v_0/2.$$

$$E_c + E_p = E = \text{const.}\quad E_i = E_{c\max} = \frac{mv_0^2}{8} + \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv_0^2}{4}.$$

$$E_f = E_{p\max} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}};\quad E_i = E_f;\quad v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}} = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}.$$

3.1.32. $U_{AK} = U_0 = 10$ kV; $BC = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{e\Delta U}{md}$; $t = \frac{l_1}{v_0}$.

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0;\ v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}};\quad BC = \frac{1}{2}\frac{e\Delta U}{md}\left(\frac{l_1}{v_0}\right)^2 = \frac{\Delta U \cdot l_1^2}{4dU_0};$$

$$CD = v_1\frac{l_2}{v_0};\quad v_1 = \frac{e}{m}\frac{\Delta U}{d}\frac{l_1}{v_0};\quad CD = \frac{\Delta U \cdot l_1 \cdot l_2}{2dU_0};$$

$$BD = BC + CD = \frac{\Delta U\, l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) = 5{,}5 \text{ cm}.$$

3.1.33. $eU + \frac{mv^2}{2} = E_i$; $U = \frac{2E_i - mv^2}{2e} = 4{,}15$ V;

$$E_i = 13{,}6 \text{ eV} = 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

3.1.34. $v_x = v_0$; $v_y = at = \frac{eE}{m}\frac{l}{v_0} = 2{,}4 \cdot 10^6$ ms^{-1};

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2{,}68 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1},\ v/v_0 = 2{,}23.$$

3.1.35. $\frac{1}{C_1'} = \frac{2}{C_2} + \frac{1}{C_1} = \frac{5}{6}$; $C_1' = \frac{6}{5}$ μF.

$$C_2' = C_3 + C_1' = \frac{16}{5}\ \mu\text{F};\quad \frac{1}{C_3'} = \frac{2}{C_2} + \frac{1}{C_2'} = \frac{47}{48}.$$

$$C_3' = \frac{48}{47}\ \mu\text{F}.\quad C_4' = C_1 + C_3' = \frac{142}{47}\ \mu\text{F}.$$

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_4'} = \frac{2}{3} + \frac{47}{142} = \frac{425}{426};\quad C_{AB} = \frac{426}{425} \simeq 1\ \mu\text{F}.$$

3.1.36. a) $C_{KD} = 12$ μF; $\frac{1}{C_{KB}} = \frac{1}{C_{KD}} + \frac{1}{C_4}$; $C_{FG} = 6$ μF;

$$\frac{1}{C_{AF}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{FG}};\quad C_{AF} = 2\ \mu\text{F}.\quad C_{AB} = C_{KB} + C_{AB} = 5\ \mu\text{F}.$$

b) $U_{KD} = \frac{q_2}{C_2} = 24$ V; $q_1 = 24 \cdot 3 = 72$ μC; $q_3 = 24 \cdot 4 = 96$ μC.

$$q_{KD} = q_1 + q_2 + q_3 = 288\ \mu\text{C},\ q_4 = q_{KD};\ U_{DB} = \frac{q_4}{C_4} = 72 \text{ V}.$$

$$U_{AB} = 24 + 72 = 96 \text{ V};\quad U_{AF} + U_{FG} = 96 \text{ V}.$$

$$\frac{U_{AF}}{U_{FG}} = \frac{C_{FG}}{C_{AF}} = 2;\ U_{AF} = \frac{96 \cdot 2}{3} = 64 \text{ V}.$$

3.1.37. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(r-l/2)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(r+l/2)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$; $r^2 - rl - \frac{l^2}{4} = 0$;

$$r = \frac{l}{2}(l + \sqrt{2}) = 1{,}207\ l.$$

3.1.38. $C_1 = \frac{\varepsilon S}{d_1}$; $C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_1 + x}$; $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1 + x}{d_1}$; $C_2 = C_1 \frac{d_1}{d_1 + x}$.

$$q_1 = C_1 U_1,\quad q_2 = C_2 U_2;\quad q_1 = q_2;\quad C_1 U_1 = C_2 U_2;$$

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = U_1 \frac{d_1 + x}{d_1};\quad E_2 = \frac{U_2}{d_1 + x} = \frac{U_1}{d_1} = E_1.$$

3.1.39. a) Considerînd distanța inițială dintre ion și electron suficient de mare pentru a putea neglija energia potențială de interacțiune:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 9 \cdot 10^9 \frac{e \cdot 3e}{r_{min}};\quad r_{min} = \frac{3e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

b) $\frac{mv_0^2}{2} = eU$; $U = \frac{mv_0^2}{2e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{10}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3 \cdot 10^{-2}$ V.

3.1.40. Capacitatea sferei fiind $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r$:

$$q = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r \cdot U;\quad q_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r U_1;\quad \frac{q}{q_1} = \frac{r \cdot U}{r_1 U_1}.$$

$$q = nq_1;\quad n = \frac{q}{q_1} = \frac{Ur}{U_1 r_1};\quad U_1 = \frac{U}{n}\frac{r}{r_1};\quad \frac{4\pi}{3} r^3 = n \frac{4\pi}{3} r_1^3.$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{n};\quad U_1 = \frac{U}{n}\sqrt[3]{n} = \frac{2{,}5}{125}\sqrt[3]{125} = \frac{12{,}5}{125} = 0{,}1\ \text{V}.$$

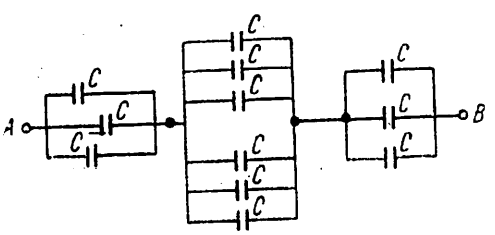


Fig. 3.43.

3.1.41. Deoarece punctele *1*, *2*, *3* se află la același potențial, acestea pot fi conectate împreună. La fel pot fi conectate punctele *4*, *5* și *6*. Schema echivalentă este indicată în figura 3.43. Din această schemă rezultă:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{2}{3C} + \frac{1}{6C} = \frac{1}{C} \cdot \frac{15}{18};$$

$$C_{AB} = \frac{6}{5} C = 1{,}2\ C.$$

3.1.42. a) $R_s = R_{01} + R_{02} + (\alpha_1 R_{01} + \alpha_2 R_{02})t$ în serie

$$R_p = \frac{R_{01}R_{02}(1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)}{R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t)} \text{ în paralel.}$$

b) $R_s = R_{03}(1 + \alpha' t)$ $R_{03} = R_{01} + R_{02} \Rightarrow \alpha' = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}$.

$$R_p = R_{0p}(1 + \alpha'' t);\quad R_{0p} = \frac{R_{01}R_{02}}{R_{01} + R_{02}}.$$

Neglijînd termenii care conțin produsul $\alpha_1\alpha_2$ avem:

$$R_p = \frac{R_{01}R_{02}}{R_{01}+R_{02}} \cdot \frac{1+(\alpha_1+\alpha_2)t}{1+\dfrac{R_{01}\alpha_1+R_{02}\alpha_2}{R_{01}+R_{02}}t} = R_{0p}[1+(\alpha_1+\alpha_2)t]\cdot\left(1-\frac{R_{01}\alpha_1+R_{02}\alpha_2}{R_{01}+R_{02}}t\right) =$$

$$= R_{0p}\left(1+\frac{R_{02}\alpha_1+R_{01}\cdot\alpha_2}{R_{01}+R_{02}}t\right); \quad \alpha' = \frac{R_{02}\alpha_1+R_{01}\alpha_2}{R_{01}+R_{02}}.$$

3.1.43. $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$; $I_2 = \dfrac{U}{R_2}$; $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_0(1+\alpha t_2)}{R_0(1+\alpha t_1)} = n$.

$$t_2 = \frac{n(1+\alpha t_1)-1}{\alpha} = 2\,500^\circ\ \text{C}.$$

3.1.44. Din simetria circuitului rezultă că intensitățile curentului $I_{17} = I_{74}$, $I_{27} = I_{73}$, iar $I_{67} = I_{75}$. Aceasta ne permite să deconectăm la centru conductoarele *2—7*, *7—3*, *6—7* și *5—7*. Obținem astfel circuitul din figura 3.45, echivalent cu cel indicat în figura 3.44. Obținem astfel trei rezistențe legate în paralel. Două au rezistențe egale cu $8R/3$, iar alta $2R$. Deci

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{6}{8R} = \frac{10}{8R}; \quad R_{AB} = \frac{4}{5}R.$$

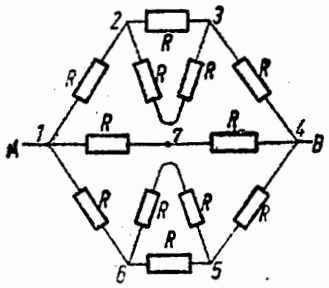


Fig. 3.45.

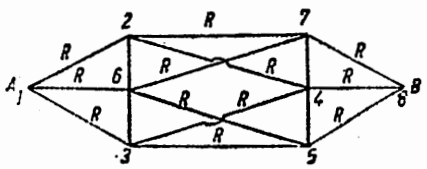


Fig. 3.47.

3.1.45. Din simetria circuitului rezultă că potențialul nodurilor *2*, *3* și *6* este același cu *4*, *5* și *6*. Aceste noduri pot fi deci unite într-un singur nod. Se obține astfel un circuit echivalent cu cel din figura 3.47 și $R_{AB} = \dfrac{R}{3}+\dfrac{R}{6}+\dfrac{R}{3} = \dfrac{5}{6}R$ (barele *2—6—3* și *7—4—5* au rezistența zero).

3.1.46. a) $I = nI_1 = 50\dfrac{220}{100} = 110$ A; $U_2 = IR_1 = 55$ V; $U = U_1 + U_2 = 275$ V.

b) $E = U + Ir = 330$ V.

3.1.47. $Q = mc\Delta\theta$, $W = \dfrac{U^2S}{\rho l}$; $\eta = \dfrac{mc\Delta\theta\cdot\rho\cdot l}{U^2tS}$;

$$l = \frac{\eta U^2tS}{mc\cdot\Delta\theta\cdot\rho} = \frac{0{,}8\cdot 484\cdot 10^2\cdot 300\cdot 5\cdot 10^{-7}}{4{,}2\cdot 10^3\cdot 1{,}5\cdot 90\cdot 1{,}1} = 93\ \text{m}.$$

3.1.48. $I = \dfrac{E_1-E_2}{r_1+r_2}$; $U_{AB} = E_1 - Ir_1 = E_2 + Ir_2 = \dfrac{E_1r_2+E_2r_1}{r_1+r_2}$.

3.1.49. Din figura 3.49 rezultă că cele trei rezistențe sînt legate în paralel:

$$I = \frac{E}{r+R/3} = \frac{3E}{R+3r}; \quad U = \frac{I}{3}R = \frac{E\cdot R}{R+3r}.$$

3.1.50. a) $R_e = \frac{3}{5} R$; $\eta = \frac{R_e}{R_e + r}$; $R_e = \frac{r \cdot \eta}{1 - \eta}$; $R = \frac{5}{3} \frac{r\eta}{1 - \eta}$.

b) $I = \frac{E}{R_e + r} = \frac{E(1 - \eta)}{r}$; $P = I^2 R_e = \frac{E^2(1 - \eta)\eta}{r}$.

3.1.51. a) $I_s = \frac{E}{r}$; $I_1 = \frac{E}{R_1 + r} = \frac{1}{n_1 + 1} I_s$;

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{n_1 n_2 r^2}{r(n_1 + n_2)} = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} r;$$

$$I_2 = \frac{E}{R_e + r} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + n_1 n_2} I_s.$$

b) $\eta_1 = \frac{n_1}{n_1 + 1}$; $\eta_2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 + n_1 n_2}$;

$$\eta_2/\eta_1 = \frac{n_2(n_1 + 1)}{n_1 + n_2 + n_1 n_2} < 1.$$

3.1.52. a) $Mgv = \eta UI$; $I = \frac{Mgv}{\eta U} = 21{,}9$ A.

b) $P = UI \simeq 7{,}33$ kW.

3.1.53. $I_1 = \frac{E}{R_1 + r}$; $I_2 = \frac{E}{R_2 + r}$; $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}$; $r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}$.

$$E = I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}.$$

3.1.54. $I = \frac{E}{R + R_A + r}$; $R = \frac{E - I(R_A + r)}{I}$.

$$\frac{dR}{dI} = \frac{(R + R_A + r)^2}{E}; \quad \Delta R = -\frac{(R + R_A + r)^2}{E} \Delta I.$$

La o eroare dată ΔI, ΔR va fi cu atît mai mare cu cît R și R_A sînt mai mari.

3.1.55. $R_{tot} = \frac{R(R_1 + R_2 + r) + R_2(R_1 + r)}{R_2 + R}$;

$$I = \frac{E(R_2 + R)}{R_2(R_1 + r) + R(R_1 + R_2 + r)}; \quad R = 0; \quad I_0 = \frac{E}{R_1 + r};$$

$$R \to \infty \quad I_\infty \to \frac{E}{R_1 + R_2 + r}.$$

3.1.56. $I_p = \frac{E_1}{R + \frac{r_1}{n}}$; $I_s = \frac{nE_1}{R + nr_1}$; $\frac{E_1}{R + \frac{r_1}{n}} > \frac{nE_1}{R + nr_1}$; $\frac{nE_1}{nR + r_1} > \frac{nE_1}{R + nr_1}$;

$$R + nr_1 > nR + r_1; \; r_1(n - 1) > R(n - 1) \text{ sau } r_1 > R.$$

Deci $I_p > I_s$ dacă $r_1 > R$.
Analog, $I_p = I_s$ dacă $r_1 = R$; $I_p < I_s$ dacă $r_1 < R$.

3.1.57. $R_1 = R_0(1 + \alpha\theta_1)$; $R_2 = R_0(1 + \alpha\theta_2)$; $R_1 = R_2 \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta_2}$;

$$R_2 = \frac{U^2}{P}; \quad R_1 = \frac{U^2}{P} \cdot \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta_2} = \frac{(220)^2}{450} \cdot \frac{1 + 5{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 20}{1 + 5{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 2\,500} = 25\ \Omega.$$

3.1.58. a) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$; $r = \dfrac{E - I_1 R}{I_1} = \dfrac{12 - 5 \cdot 2}{5} = 0{,}4\ \Omega$; $I_s = \dfrac{E}{r} = 30\ \text{A}$.

b) Puterea maximă este **pentru** $R = r$;

$$I = \frac{E}{2r} = \frac{12}{0{,}8} = 15\ \text{A}. \quad P_{max} = I^2 r = 90\ \text{W}.$$

3.1.59. $E = I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r)$; $U_1 = R_1 I_1$; $kU_1 = nR_1 I_2$.

$$\frac{U_1}{R_1}(R_1 + r) = \frac{kU_1}{nR_1}(nR + r); \quad U_1\left(1 + \frac{r}{R_1}\right) = kU_1\left(1 + \frac{r}{nR_1}\right)$$

$$\frac{r}{R_1} = \frac{E - U_1}{U_1}; \quad E = kU_1\left(1 + \frac{1}{n}\frac{E - U_1}{U_1}\right) = kU_1 + \frac{k}{n}(E - U_1).$$

$$E = U_1 \frac{kn - k}{n - k}; \quad E = 5 \cdot \frac{12 - 2}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5\ \text{V}.$$

3.1.60. $I_1(R + r) = I_2(2R + r)$; $2I_2 R = I_1 R + 0{,}1\, I_1 R_1 = 1{,}1\, I_1 R_1$.

$$I_2 = \frac{1{,}1\, I_1 R}{2R} = 0{,}55\, I_1; \quad I_1(R + r) = 0{,}55\, I_1(2R + r); \quad 0{,}45r = 0{,}1\, R.$$

$$r = \frac{0{,}1}{0{,}45} R; \quad \eta = \frac{R}{R + r} = \frac{R}{R + \dfrac{0{,}1}{0{,}45} R} = \frac{0{,}45}{0{,}55} = 0{,}82.$$

3.1.61. a) Rezistența echivalentă R_{AB} în triunghi este:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23} + R_{31}}; \quad R_{AB} = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}.$$

Pentru stea: $R_{AB} = R_1 + R_2$. Se obțin relațiile:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{31} + R_{23}};$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{31} + R_{23}};$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}.$$

De unde:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}.$$

b) Rezolvînd ultimele relații avem:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

3.1.62. Se transformă triunghiul ABC într-o stea echivalentă ABC în care $R_A = R_B = R_C = R/3$. După această transformare se obține:

$$R_e = R + R_A + \frac{(R_B + R)(R_C + R)}{2R + R_B + R_C} = 2R; \quad I = \frac{E}{2R}.$$

3.1.63. $m_1c_1\Delta\theta = I^2R_1t$; $I^2 = \dfrac{m_1c_1\Delta\theta}{R_1t}$.

$$Q_2 = I^2R_2t = \frac{m_1c_1\Delta\theta}{R_1}R_2 = m_2[c_2(\theta - \theta_1) + \lambda].$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1c_1\Delta\theta}{m_2[c_2(\theta - \theta_1) + \lambda]}; \quad R_1 = \rho_1\frac{l_1}{S_1}; \quad R_2 = \rho_2\frac{l_2}{S_2}; \quad m_1 = d_1S_1l_1; \quad m_2 = d_2S_2l_2.$$

$$\frac{\rho_1\dfrac{l_1}{S_1}}{\rho_2\dfrac{l_2}{S_2}} = \frac{d_1S_1l_1}{d_2S_2l_2}\cdot\frac{c_1\Delta\theta}{c_2(\theta - \theta_1) + \lambda}; \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{c_1d_1\rho_2\Delta\theta}{d_2\rho_1(c_2(\theta - \theta_1) + \lambda)}.$$

$$S_2 = S_1\sqrt{\frac{c_1d_1\rho_2\Delta\theta}{d_2\rho_1(c_2(\theta - \theta_1) + \lambda)}}.$$

3.1.64. $\dfrac{E^2}{(R_1 + r)^2}R_1t = \dfrac{E^2}{(R_2 + r)^2}R_2t$; $\dfrac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \dfrac{R_2}{(R_2 + r)^2}$; $r = \sqrt{R_1R_2}$.

3.1.65. $RI^2 + UI = P$; $10I^2 + 40I - 120 = 0$.

$$I_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}; \quad I = 2\text{ A}.$$

3.1.66. $I = \dfrac{n_1P_1 + n_2P_2}{U_2}$; $IR = U_1 - U_2$; $R = \dfrac{\rho l}{S} = \dfrac{\rho 2d}{S}$.

$$\frac{2\rho d}{S}\cdot\frac{n_1P_1 + n_2P_2}{U_2} = U_1 - U_2; \quad S = \frac{2\rho d(n_1P_1 + n_2P_2)}{U_2(U_1 - U_2)} \simeq 7\text{ mm}^2.$$

3.1.67. P_p — puterea pierdută în conductoare.

$$R = \frac{0{,}1P}{I^2} = \frac{0{,}1U_1^2}{P} = \frac{\rho 2d}{S}; \quad S = \frac{\rho^2dP}{0{,}1U^2} \simeq 106\text{ mm}^2.$$

3.1.68. $R_{DF} = \dfrac{(R_4 + R_5)R_6}{R_6 + R_4 + R_5} + R_7 = 6\ \Omega$;

$$R_{LEFD} = R_3 + R_{EF} + R_6 = 12\ \Omega; \quad R_{CE} = \frac{24}{14} = 1{,}7\ \Omega.$$

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_{CE} = 6{,}7\ \Omega. \quad I = \frac{U}{R_{AB}} = 2\text{ A}.$$

3.1.69. $U_C = U_D$; $U_A - U_C = U_A - U_D$; $U_C - U_B = U_D - U_B$.

Notăm cu I_1 intensitatea curentului prin ramura ACB și cu I_2 intensitatea curentului prin ramura ADB.

$$U_A - U_C = I_1R_x; \quad U_A - U_D = I_2\rho\frac{l_1}{S}; \quad U_C - U_B = I_1R_0;$$

$$U_D - U_B = I_2\rho\frac{l_2}{S}.$$

$$I_1R_x = I_2\rho\frac{l_1}{S}; \quad I_1R_0 = I_2\rho\frac{l_2}{S}; \quad \frac{R_x}{R_0} = \frac{l_1}{l_2}.$$

3.1.70. $I_1 + I_2 = I_3$; $E_1 - I_1r_1 = I_3R$; $E_2 - I_2r_2 = I_3R$.

De unde

$$I_1 = \frac{E_1(R + r_1) - E_2R}{r_1r_2 + r_2R + Rr_1}\ ;\ I_2 = \frac{-E_1R + E_2(R + r_1)}{r_1r_2 + r_2R + Rr_1}\ ;\ I_3 = \frac{E_2r_1 + E_1r_2}{r_1r_2 + r_2R + Rr_1};$$

$$I_1 = 1{,}5\text{ A};\quad I_1 = 0{,}5\text{ A};\quad I_3 = 2\text{ A}.$$

3.1.71. $E_1 = I_1r_1 + IR$; $E_2 = I_2r_2 + IR$; $E_3 = I_3r_3 + IR$.

$$I_1 = \frac{E_1 - IR}{r_1}\ ;\ I_2 = \frac{E_2 - IR}{r_2}\ ;\ I_3 = \frac{E_3 - IR}{r_3}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{E_1r_2r_3 + E_2r_1r_2 + E_3r_1r_2}{R(r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2) + r_1r_2r_3} = 0{,}57\text{ A}.$$

$$I_1 = 0{,}6\text{ A};\quad I_2 = -0{,}2\text{ A};\quad I_3 = 0{,}53\text{ A}.$$

Deci I_2 trebuie luat de sens contrar celui din figura 3.57.

3.1.72. a) $U = \frac{E}{R_v + r}R_v = \frac{E}{1 + r/R_v}\ ;\ I = \frac{E}{R + r} = \frac{U}{R + r}\cdot\frac{R_v + r}{R_v}.$

$$r = \frac{U - IR}{I - U/R_v} = \frac{U - IR}{I\left(1 - \frac{U}{IR_v}\right)}.$$

b) $\frac{1}{1 - \frac{U}{IR_v}} = 1 + 0{,}005;\quad R_v = \frac{U}{I}\ \frac{0{,}995}{5\cdot 10^{-3}} = 500\ \Omega.$

3.1.73. a) $kn = N$: $I = \frac{nE}{R + \frac{nr}{k}} = \frac{nE}{R + \frac{n^2r}{N}} = \frac{NnE}{NR + n^2r}.$

$$\frac{dI}{dn} = \frac{E}{N}(RN - n^2r) = 0,\ n = \sqrt{\frac{N\cdot R}{r}} = 50;\ k = \sqrt{\frac{rN}{R}} = 2.$$

$$I = \frac{50\cdot 4}{10 + \frac{50\cdot 0{,}4}{2}} = \frac{200}{10 + 10} = 10\text{ A}.$$

b) $I_s = \frac{NE}{R + Nr} = \frac{100\cdot 4}{10 + 40} = 8\text{ A};\ I_p = \frac{E}{R + \frac{r}{N}} = 0{,}4\text{A}.$

3.1.74. a) $R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 6\ \Omega;\ I = \frac{E}{R_e + r} = 15\text{ A};\ U = E - Ir = 90\text{ V}.$

b) $I_2 = \frac{E}{R_2} = 6\text{ A};\quad m = kI_2t;\quad t = \frac{m}{kI_2} = 10^3\text{ s}.$

c) $\eta = \frac{R_e}{R_e + r} = 0{,}75.$

3.1.75. a) $R_e = \frac{R_xR_y}{R_x + R_y}\ ;\ I = \frac{R}{R_e + r} = \frac{E}{\frac{R_xR_y}{R_x + R_y} + r}\ ;\ R_xR_y = 100.$

$$R^2 = 25R + 100 = 0;\ R_{x,y} = \frac{25 \pm 15}{2}\ ;\ R_x = 20\ \Omega,\ R_y = 5\ \Omega.$$

b) $U = E - Ir = 8$ V; $I_x = \frac{U}{R_x} = 0{,}4$ A; $I_y = \frac{U}{R_y} = 1{,}6$ A.

c) $\eta = \frac{R_e}{R_e + r} = 0{,}80.$

3.1.76. a) $P_{max} = \frac{E^2}{(2r)^2} r = \frac{E^2}{4r}$; $P = \frac{E^2}{(R + r)^2} R = \frac{1}{n} \frac{E^2}{4r}$;

$$R^2 - 50\ Rr + r^2 = 0,$$

$$R_{1,2} = \frac{50\ r \pm r\sqrt{2\,496}}{2} = \frac{r(50 \pm 49{,}9)}{2} \qquad R_1 \simeq 50\ r; \quad R_2 \simeq 0{,}05\ r.$$

R_2 nu se ia în considerare datorită randamentului mic al bateriei în acest caz.

b) $I = \frac{E}{R_1 + r} = \frac{10{,}2}{51} = 0{,}2$ A. $\qquad U = E - Ir = 10$ V.

c) $C = \frac{q}{U} = 5 \cdot 10^{-10}$ F $= 50$ nF.

3.1.77. a) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{nE}{R + nr} \cdot \frac{R + (n - \Delta n)r}{E(n - \Delta n)} = p;$

$$\Delta n = \frac{n(R + nr)(p - 1)}{pR + nr(p - 1)},$$

$$\Delta n = 32.$$

b) $E = I_1(R + nr)/n = 1{,}5$ V; c) $C = \frac{q}{U} = 6$ nF.

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(1 + \varepsilon_r) = 6 \text{ nF}; \qquad \varepsilon_r = \frac{2dC}{\varepsilon_0 S} - 1 = 9.$$

3.1.78. a) $I = \frac{m}{kt} = \frac{2{,}178 \cdot 10^{-3}}{0{,}33 \cdot 10^{-6} \cdot 600} = 1$ A;

$$I_2 = \frac{IR_3}{R_2 + R_3} = 0{,}2 \text{ A}; \qquad I_3 = 0{,}8 \text{ A}.$$

b) $P_3 = 25 \cdot 0{,}64 = 16$ W. $\qquad Q_3 = R_3 I_2^2\ t = 24$ kJ.

3.1.79. $\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{2\rho lI}{S}$; $\qquad \Delta U\% = \frac{\Delta U}{U_n} 100$; $\qquad \frac{\Delta U}{100} = \frac{2\rho lI}{S}$;

$$S = \frac{2\rho lI \cdot 100}{\gamma \Delta U\% \cdot U_n} = \frac{2\rho lIU_n \cdot 100}{\Delta U\% \cdot U_n^2} = \frac{2\rho l\ P \cdot 100}{\Delta U\% \cdot U_n^2}$$

pentru $U_n = 220$ V, $S = 2{,}06$ mm², iar pentru $U_n = 120$ V, $S = 7$ mm².

Deci pentru aceleași pierderi $\Delta U\%$, odată cu mărirea tensiunii rețelei, secțiunea conductoarelor de legătură scade.

3.1.80. $\Delta U_1 = \frac{2l\rho_1}{S_1} I \simeq 25$ V; $\qquad \Delta U_1\% = 11{,}4\ \%.$

$$\Delta U_2 = \frac{2l\ \rho_2}{S_2} I \simeq 53 \text{ V}; \quad \Delta U_2\% = 24\%.$$

$$\frac{\rho_1}{S_1} = \frac{\rho_2}{S_2}; \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0{,}13 \cdot 10^{-6}}{1{,}76 \cdot 10^{-8}} = \frac{13}{1{,}76} = 7{,}4 \text{ ori}.$$

3.1.81. a) $R_L = \frac{2l\rho}{S} = \frac{2 \cdot 171 \cdot 1{,}86 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5\ \Omega;$

$$I_1 = \frac{E}{r + R_L + R} = \frac{120}{12{,}5} = 9{,}6\ \text{A}.$$

$U_1 = E - I_1 r = 110{,}4$ V, $U_2 = I_1 R = 96$ V; $\Delta U = I_1 R_L = 14{,}4$ V.

b) $I_2 = \frac{E}{r + R_L} = \frac{120}{2{,}5} = 48$ A. $U_1 = E - I_2 r = 72$ V;

$$\Delta U = I_2 R_L = 72\ \text{V}.$$

$$E = I_2 r + I_2 R_L = 120\ \text{V}.$$

c) $R = \infty$; $U_1 = U_2 = 120$ V; $\Delta U = 0$.

3.1.82. a) Intensitatea reală a curentului prin circuit este $I_r = \frac{E}{R + r}$, iar cea măsurată $I_m = \frac{E}{R + R_A + r}$.

Eroarea absolută este

$$\Delta I = I_r - I_m = \frac{E R_A}{(R + R_A + r)(R + r)},$$

iar eroarea relativă

$$\frac{\Delta I}{I_m} = \frac{R_A}{R + r}; \text{ de regulă, } R \gg r, \text{ deci } \frac{\Delta I}{I_m} = \frac{R_A}{R}.$$

Dacă $R > 100\ R_A$, atunci $\frac{\Delta I}{I_m} < 1\%$.

b) $U_r = E$; $U_m = I_v R_v = \frac{E R_v}{R_v + r}$; $\Delta U = U_r - U_m = \frac{Er}{R_v + r}$.

$\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{r}{R_v}$ — dacă rezistența de sarcină se deconectează.

Dacă rezistența R este conectată, putem considera că voltmetrul este conectat la un generator cu rezistența echivalentă

$$r_0 = \frac{r(R_A + R)}{r + R_A + R} \text{ pentru } R_A \ll R; \quad r_0 = \frac{rR}{R + r}$$

Deci

$$\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{r_0}{R_v} = \frac{rR}{(R + r)R_v}.$$

3.1.83. a) $E_1 = I_1 r_1 + IR$; $E_2 = I_2 R_2 + IR$; $I_1 + I_2 = I$.

Rezolvînd sistemul acestor trei ecuații cu trei necunoscute, avem:

$$I_1 = 24\ \text{A}, \quad I_2 = 35\ \text{A} \quad \text{și} \quad I = 59\ \text{A}.$$

$$U = IR = 118\ \text{V}.$$

$$P_1 = E_1 I_1 = 3\,120\ \text{W}; \quad P_2 = E_2 I_2 = 4\,375\ \text{W}.$$

$P_{01} = r_1 I_1^2 = 288$ W; $P_{02} = r_2 I_2^2 = 245$ W; $P = UI = 6\,962$ W.

$$P_1 + P_2 = P_{01} + P_{02} + P.$$

b) $E_2 = I_2 r_2 + IR; \qquad I_1 = I_2 = \frac{I}{2}; \qquad E_2 = \frac{I}{2} r_2 + IR.$

$$I = \frac{E_2}{R + \frac{r_2}{2}} = \frac{125}{2 + 0{,}1} = \frac{125}{2{,}1} \simeq 59{,}5 \text{ A}; \qquad I_1 = I_2 = 29{,}75 \text{ A}.$$

$$E_1 = I_1 r_1 + IR = I\left(\frac{r_1}{2} + R\right) = 59{,}5(2 + 0{,}25) = 133{,}875 \text{ V}.$$

c) $I_2 = I; \qquad I_1 = 0; \qquad E_2 = I_2(r_2 + R); \qquad I_2 = \frac{E_2}{R + r_2} = 56{,}8 \text{ A}.$

$$E_1 = IR = 113{,}6 \text{ V}.$$

d) $I_1 = I; \; I_2 = 0; \qquad E_2 = IR; \qquad I = \frac{E_2}{R} = 62{,}5 \text{ A}.$

$$E_1 = I(R + r_1) = 62{,}5 \cdot 2{,}5 = 156{,}25 \text{ V}.$$

3.1.84. $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0; \qquad I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \qquad I_1 R_1 - I_3 R_3 = E_1$ și $I_3 R_3 + I_4 R_4 = 0.$

Scriem sistemul sub forma mai comodă:

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,, \\ &2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6 \\ &2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10, \\ &0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0, \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Rezultă $I_2 = 0; \qquad I_3 = -1$ A.

Deci sensul pentru I_3 trebuie luat invers decît cel din figura 3.62.

3.1.85. Din figura 3.63 obținem ecuațiile:

$$I_3 = I_1 + I_2; \qquad I_3 R_3 + I_1 R_1 = E_1; \qquad I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_2.$$

Înlocuind:

$$I_3 = I_1 + I_2; \qquad 10\, I_3 + 45\, I_1 = 2{,}1; \qquad 45\, I_1 - 10\, I_2 = 1{,}4.$$

Se obține $I_1 = 0{,}04$ A; $\quad I_2 = -0{,}01$ A $\quad$ și $\quad I_3 = 0{,}03$ A.

Deci I_2 trebuie luat de sens opus.

3.1.86. $Q_1 = m_1 c_1 \, \Delta\theta = d_1 S_1 l_1 c_1 \, \Delta\theta =$ căldura degajată în conductoarele de cupru.

$Q_2 = m_2[c_2(\theta_t - \theta_0) + \lambda_t] = d_2 l_2 S_2[c_2(\theta_t - \theta_0) + \lambda_t]$ — căldura necesară pentru topirea siguranței.

Cum $I_1 = I_2; \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1 S_2 \rho_1}{l_2 S_1 \rho_2}.$

Se obține:

$$\Delta\theta = \frac{\rho_1 d_2 S_2^2 [c_2(\theta_t - \theta_0) + \lambda_t]}{\rho_2 d_1 S_1^2 c_1}.$$

Se vede că $\Delta\theta$ este proporțional cu pătratul secțiunii firului de siguranță. Utilizînd constantele date în tabele aflăm $\Delta\theta = 1{,}8°$.

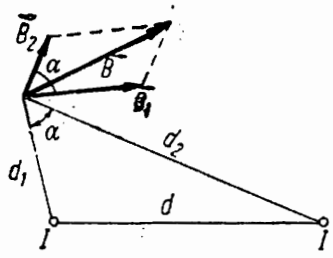


Fig. 3.64.

3.1.87. a) $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$;

$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}$ (vezi fig. 3.64)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1};$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{2}{d_1 d_2}\cos\alpha}; \qquad \cos\alpha = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2} = 0{,}576;$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{5^2 \cdot 10^4} + \frac{1}{10^2 \cdot 10^4} + \frac{1}{5 \cdot 12 \cdot 10^4}\,0 \cdot 576} = 2{,}86 \cdot 10^{-4}\ \text{T};$$

b) $v = \sqrt{\frac{2e\,\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^7\ \text{ms}^{-1}$;

$$F_{max} = evB = 4{,}576 \cdot 10^{-16}\ \text{N}.$$

3.1.88. a) $R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 2{,}1\ \Omega; \qquad I = \frac{E}{R_e + r} = 4\ \text{A}.$

$$U = E - Ir = 12 - 3{,}6 = 8{,}4\ \text{V}.$$

$$\eta = \frac{R_e}{R_e + r} = \frac{2{,}1}{2{,}1 + 0{,}9} = 0{,}7; \qquad \eta = 70\%.$$

b) $I_1 = 2{,}8\ \text{A}; \qquad I_2 = 1{,}2\ \text{A}; \qquad H = \frac{nI_1}{l} = \frac{300 \cdot 2{,}8}{0{,}2} = 4\,200\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

c) $\Phi = B \cdot S = \mu_0 H\,\frac{\pi D^2}{4} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\,200 \cdot \frac{\pi \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{4} = 6{,}72 \cdot 10^{-6}\ \text{Wb}$.

3.1.89. a) $B_1 = \mu_r\mu_0 nI = \mu_r\mu_0 \frac{NI}{l} = 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{100 \cdot 4}{0{,}4} = 0{,}628\ \text{T}.$

$$\Phi_1 = NBS = 100 \cdot \frac{0{,}628 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}06)^2}{4} = 0{,}177\ \text{Wb}.$$

b) $E_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot N; \qquad \Delta\Phi = B\frac{\pi D^2}{4}$.

$$E_i = \frac{B\pi \cdot D^2 N}{2\,\Delta t} = \frac{5 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}06)^2\,100}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 56{,}5\ \text{V}.$$

3.1.90. a) $X_L = \omega L = \frac{1}{10\pi}\,100\pi = 10\ \Omega; \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = 20\ \Omega.$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{200} = 14{,}1\ \Omega.$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{14{,}1} = 15{,}5\ \text{A}.$$

b) $U_R = RI = 155\ \text{V}; \qquad U_L = X_LI = 155\ \text{V}; \qquad U_C = X_CI = 310\ \text{V}.$

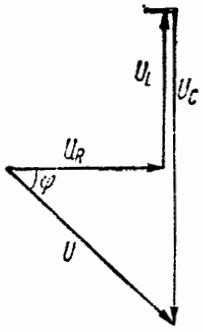


Fig. 3.66.

Din figura 3.66

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = -1; \quad \varphi = -45^\circ \text{ (defazaj capacitiv)}.$$

c) $P = UI\cos\varphi = 220 \cdot 15{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}42$ kW.

$$P_r = UI\sin\varphi = 2\,420 \text{ var}.$$

$$P_a = UI = 3\,410 \text{ VA}.$$

d) Prin eliminarea condensatorului, intensitatea curentului rămîne aceeași, iar defazajul φ devine $+45^\circ$ (defazaj inductiv).

3.1.91. a) $E - rI_r = R_i I_i = RI; \quad I_r = I_i + I.$

$$I_r = \frac{E - RI}{r}; \quad I_i = \frac{RI}{R_i} \to \frac{RI}{R_i} + I = \frac{E - RI}{r}.$$

De unde $R = \dfrac{R_i(E - rI)}{(r + R_i)I}$.

Randamentul electric al dinamului este:

$$\eta_i = \frac{RI^2}{EI_r} = \frac{R_i I(E - rI)}{E_i(E + R_i I)}; \quad \frac{d\eta}{dI} = \frac{ER_i(rR_i I^2 + 2rEI - E^2)}{E^2(E + R_i I)^2};$$

$$I = I_{max}; \quad \frac{d\eta}{dI} = 0.$$

$$rR_i I^2 + 2rEI - E^2 = 0 \to I_{1,2} = \frac{E}{R_i}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{R_i}{r}}\right).$$

Este valabilă soluția:

$$I = \frac{E}{R_i}\left(\sqrt{1 + \frac{R_i}{r}} - 1\right) = \frac{120}{12}\left(\sqrt{1 + \frac{12}{0{,}5}} - 1\right) = 40 \text{ A}.$$

b) $R = \dfrac{R_i(E - rI)}{(r + R_i)I} = \dfrac{12(120 - 0{,}5 \cdot 40)}{12{,}5 \cdot 40} = \dfrac{1\,200}{500} = 2{,}4\ \Omega.$

c) $I_i = \dfrac{RI}{R_i} = \dfrac{2{,}4 \cdot 40}{12} = 8$ A; $\quad I_r = 48$ A.

3.1.92. a) $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}; \quad d = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{C}; \quad T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L};$

$$T = \frac{\lambda}{c} \to d = c^2\frac{4\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r S L}{\lambda^2};$$

pentru aer, $\varepsilon_r = 1$.

$$d = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \frac{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot \dfrac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^9} 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

b) $d_1 = \varepsilon_r d = 15{,}7$ mm.

3.1.93. a) $Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = 1/R\omega C.$

b) $Z = R/\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = -R\omega C.$

c) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$.

d) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$; $\operatorname{tg} \varphi = R/\omega L$.

e) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$.

3.1.94. a) $I_R = \dfrac{U}{R} = 22$ A; $I_C = \dfrac{U}{X_C} = UC\omega = 11$ A; $I_L = \dfrac{U}{X_L} = 22$ A.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 20\ \Omega; \quad X_L = \omega L = 10\ \Omega.$$

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{L\omega} - UC\omega\right)^2.$$

$$I = 24{,}6 \text{ A}.$$

b) $$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} = \frac{U}{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}} = \frac{U}{Z};$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{X_L} - \dfrac{1}{X_C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{400}}} = \sqrt{80} = 8{,}94\ \Omega;$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{8{,}94} = 24{,}6 \text{ A}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = R\left(\frac{1}{\omega_L} - \omega C\right) = 0{,}5.$$

$\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}25}} = \dfrac{10}{11{,}18} \approx 0{,}9$. $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 0{,}44$.

c) $P = UI \cos \varphi = 4870$ W; $P_r = 2\,381$ var; $P = 5\,412$ VA.

3.1.95. a) $E = -N\dfrac{d\Phi}{dt}$; $E = -N_2\Phi_m\omega \cos(\omega t + 90) = N_2\Phi_m\omega \sin \omega t$;

$$E = -N_2\Phi_m\omega \cos \omega t = N_2\Phi_m\omega \sin(\omega t - 90^\circ);$$

$$E = -N_2\Phi_m\omega \cos(\omega t + 180^\circ) = N_2\Phi_m\omega \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Deci dacă printr-o bobină oarecare avem un flux magnetic sinusoidal, tensiunea electromotoare indusă este întîrziată cu un sfert de perioadă față de fluxul magnetic respectiv.

b) $E_{m_2} = N_2\Phi_m\omega = 200 \cdot 27 \cdot 10^{-4} \cdot 314 = 170$ V;

$$U_2 = \frac{E_{m_2}}{\sqrt{2}} = 170 \cdot 0{,}707 = 120 \text{ V}.$$

3.1.96. a) $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{5{,}64}{\sqrt{2}} = 4$ A, $U_1 = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{169}{\sqrt{2}} = 120$ V.

$U_2 = U_1 \cos \varphi = 60$ V; $U_3 = U \sin \varphi = 104$ V.

b) $Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{4} = 30\ \Omega$; $R = Z\cos\varphi = 15\ \Omega$; $X_C = Z\sin\varphi = 26\ \Omega$;

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \cdot 26} = 122\ \mu F.$$

3.1.97. a) Fie U_a tensiunea la bornele bobinei și ale condensatorului.

$$I_L = \frac{U_a}{X_L}; \quad I_C = \frac{U_a}{X_C}; \quad I_L \text{ și } I_C \text{ sînt defazați cu } 180°.$$

Intensitatea curentului în circuit este $I = I_L - I_C$.

$$I = U_a\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right) = U_a\frac{X_C - X_L}{X_C X_L} = \frac{U_a}{X} \text{ pentru } I_L > I_C.$$

Dacă $I_C > I_L$

$$I = U_a\frac{X_L - X_C}{X_L X_C} = \frac{U_a}{X}.$$

Deci condensatorul și bobina legate în paralel pot fi asimilate cu o rezistență reactivă inductivă.

$X = \frac{X_L X_C}{X_C - X_L}$ (dacă $X_C > X_L$) sau cu o rezistență reactivă capacitivă.

$$X = \frac{X_L X_C}{X_L - X_C} \text{ (dacă } X_L > X_C).$$

Impedanța $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $I = \frac{U}{Z}$; $U_A = IX = \frac{U}{Z} \cdot X$;

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$; φ – defazajul între curentul prin circuit și tensiune.

La rezonanță, $X_C = X_L$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 4\,10^{-4}}} = 500\,\frac{1}{s}$; $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 79{,}5$ Hz.

$$X_L = \omega_0 L = 5\ \Omega; \quad X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = 5\ \Omega.$$

În acest caz, $X = \infty$; și $Z = \infty$; $I = 0$; $U_a = U$.

b) $\nu \to 0$ $X_L \to 0$, $X_C \to \infty$, circuitul este scurtcircuitat prin bobină și avem numai rezistența activă.

$$I = \frac{U}{R} = 12\ \text{A}.$$

$\nu \to \infty$; $X_L \to \infty$ și $X_C = 0$ – circuitul este scurtcircuitat prin condensator ($I = 12$ A).

3.1.98. $I_{f\curlyvee} = I_{l\curlyvee} = \frac{U_{f\curlyvee}}{Z_f} = \frac{U_l}{\sqrt{3}Z_f}$; $U_{f\curlyvee} = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$;

$$P = \sqrt{3}\,U_l \cdot I_{l\curlyvee}\cos\varphi$$

$$I_{f\Delta} = \frac{U_{f\Delta}}{Z_f} = \frac{U_l}{Z_f}; \quad I_{l\Delta} = \sqrt{3}\ I_{f\Delta} = \frac{\sqrt{3}\,U_l}{Z_f}.$$

$$\frac{I_{l\Delta}}{I_{l\curlyvee}} = \frac{3U_l}{Z_f} : \frac{U_l}{3Z_f} = 3 \text{ – curentul de linie crește de trei ori.}$$

Ca urmare, și puterea circuitului trifazic va crește de trei ori; $P = \sqrt{3}\,U_l I_{l\Delta}\cos\varphi$.

Pentru ca curentul de linie și puterea la trecerea din stea în triunghi să rămînă aceleași trebuie ca rezistențele de fază ale consumatorului să se mărească de trei ori: $Z_{f\Delta} = 3Z_{f\curlyvee}$.

3.1.99. a) $I = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{10\,000}{380 \cdot 0{,}8} = 33$ A; $R_L = \frac{\rho l}{S} = 0{,}7\ \Omega$ (pentru un fir);

$$\Delta U = 2(IR_L \cos \varphi_2 + IX \sin \varphi_2) = 70 \text{ V};$$

$$U_1 = U_2 + \Delta U = 450 \text{ V}.$$

b) $I = \frac{P_2}{\sqrt{3}\, U_2 \cos \varphi_2} = 19$ A. $\Delta U = \sqrt{3}\ (IR_L \cos \varphi_2 + IX \sin \varphi_2) = 34$ V.

$$U_1 = U_2 + \Delta U = 414 \text{ V}.$$

3.1.100. Puterea unei faze este: $P_1 = \frac{P}{3} = 15$ kW.

Tensiunea de fază secundară: $U_{2f} = \frac{U_2}{\sqrt{3}} = 127$ V.

Intensitatea curentului în bobina secundară este:

$$I_2 = \frac{P_1}{U_{2f}} = \frac{P}{3} \frac{\sqrt{3}}{U_2} = 118 \text{ A}.$$

Puterea utilizată de la rețea pentru o singură fază este:

$$P_{1c} = \frac{P_1}{\eta}; \quad I_1 = \frac{P_{1c}}{U_{1f}} = \frac{P\sqrt{3}}{3\eta U_1} = 4{,}82 \text{ A}.$$

3.2.1. $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 9 \cdot 10^5$ N.

Observație. Se poate deduce din valoarea forței că sarcina electrică de 1 C este o cantitate foarte mare.

3.2.2. $q_1 = 3{,}8 \cdot 10^{-5}$ C, $q_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ C.

3.2.3. 1°. $F_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ N. (forță de atracție);

2°. $F_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ N. (forță de respingere).

3.2.4. $F_3 = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ N.

3.2.5. $q_1 = 22{,}5 \cdot 10^{-9}$ C, $q_2 = 10{,}8 \cdot 10^{-9}$ C, $q_3 = 40 \cdot 10^{-9}$ C.

3.2.6. $q_1 = q_2 = q_3 = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$ C.

3.2.7. 1°. $F_1 = 21{,}6 \cdot 10^{-8}$ N; 2°. $F_2 = 22{,}5 \cdot 10^{-8}$ N.

3.2.8. $q = 278{,}7 \cdot 10^{-6}$ C.

3.2.9. 1°. $E_M = \frac{72}{25} \cdot 10^7$ V/m orientat paralel cu dreapta care unește cele două sarcini și în sensul de la q_1 spre q_2: $V_M = 0$. 2°. $L = q_3(V_N - V_M) = 36$ J.

3.2.10. $F = 14$ N.

3.2.11. $V = 81$ V.

3.2.12. Într-un punct oarecare: $V = k\frac{q}{r} - k\frac{q'}{r}$ și dacă M este pe o suprafață de potențial zero, rezultă:

$$\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \text{const.}$$

Locul geometric al punctelor de potențial zero este un cerc și respectiv, în spațiu, o sferă.

3.2.13. a) $h_B = \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{mgh_A} = 3{,}24$ m; b) $E = \frac{1}{6} \cdot 10^6$ V/m; $V = 6 \cdot 10^5$ V.

c) Sfera execută o mișcare periodică, fără a fi armonică.

3.2.14. $a = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_e} = 2{,}5 \cdot 10^5$ ms^{-2}.

3.2.15. Prezența sarcinii electrice punctiforme q în apropierea planului conductor are ca efect o încărcare prin influență a acestuia, efectul fiind același ca în cazul existenței unei sarcini punctiforme $-q$, simetrică cu q în raport cu planul (fig. 3.118). Sarcina $-q$ se numește sarcina „imagine".

a) Sarcinile polarizate, prin influență, exercită forțe atractive asupra sarcinii $+q$, forțe a căror rezultantă, datorită simetriei este normală pe planul P și dată de expresia:

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}.$$

b) Cîmpul electric în punctul M infinit apropiat de planul P se obține compunînd cîmpurile produse de sarcina q și sarcina „imagine" $-q$ (figura 3.118):

$$(E_+) = (E_-) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)}$$ și cîmpul rezultant:

$$(E) = 2(E_+)\cos\alpha = 2(E_+)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

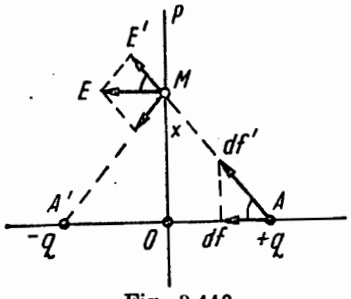


Fig. 3.118.

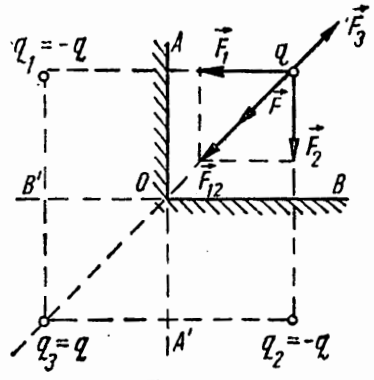


Fig. 3.119.

Se observă că E este maxim în O și descrește constant cînd y crește.

3.2.16. Ținînd seama de indicațiile date la rezolvarea problemei 3.2.15 și observînd figura 3.119 trebuie să luăm în considerare sarcinile „imagine": q_1, q_2 și q_3($q_1 = -q$, simetricul lui q față de planul AA'; $q_2 = -q$ simetricul lui q față de planul BB'; $q_3 = q$, simetricul sarcinii q_2 față de planul AA' și al sarcinii q_1 față de planul BB').

Forța rezultantă este:

$$F = \frac{q^2}{16 \cdot \pi\varepsilon_0 h^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ N}.$$

3.2.17. a) Potențialul la suprafața unei sfere conductoare purtînd sarcina q este: $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ și pentru că prin definiție $C = \frac{q}{V}$ rezultă: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.

b) O sferă de capacitate $C = 1$ F ar trebui să aibă $R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ m.

c) Sfera cu capacitatea $C = 1$ pF are raza $R = 9$ mm.

3.2.18. 1°. $E_M = 3{,}6 \cdot 10^4$ Vm^{-1}; $V_M = 1{,}8 \cdot 10^4$ volți.

2°. Sfera din punctul M nu se încarcă electric, are loc numai o deplasare a sarcinilor electrice pe suprafața sa iar potențialul este cel creat de sarcina de pe sfera mare:

$$q_M = 0, \quad V_M = 1{,}8 \cdot 10^4 \text{ volți.}$$

3°. Sfera din M, legată la pământ, ia potențialul zero și se încarcă cu sarcina q' de semn opus celei de pe sfera mare, astfel ca:

$$\frac{q'}{4\pi\varepsilon r} + V_M = 0 \Rightarrow q' = -4\pi\varepsilon_0 \cdot r_e \cdot V_M = -10^{-8} \text{ C.}$$

$$4°. \quad \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \cdot \frac{1}{G} = 1°3'.$$

3.2.19. $mg = F_e$; $m = \dfrac{F_e}{g} = \dfrac{1}{g} \dfrac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\dfrac{U}{d}\right)^2 = 5{,}1$ g.

3.2.20. a) $Q = CU = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot U = 4{,}42 \cdot 10^{-9}$ C;

b) $F = \dfrac{1}{2} QE = \dfrac{1}{2} Q \dfrac{U}{d} = 11{,}05 \cdot 10^{-9}$ N;

c) $W = \dfrac{1}{2} CU^2 = 11{,}05 \cdot 10^{-7}$ J;

d) $L = F(d' - d) = \dfrac{1}{2} QE = 11{,}05 \cdot 10^{-7}$ J;

e) $F' = \dfrac{1}{2} QE = \dfrac{1}{2} Q \dfrac{U'}{d'} = 11{,}05 \cdot 10^{-9}$ N;

f) $W' = \dfrac{1}{2} C'U'^2 = 2W = 22{,}1 \cdot 10^{-7}$ J.

Se observă că energia electrostatică din cîmpul condensatorului a crescut, prin depărtarea armăturilor, cu o cantitate numeric egală cu lucrul cheltuit pentru depărtarea armăturilor.

3.2.21. 1°. $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 9 \cdot 10^{-4}$ N;

$$2°. \quad L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d}\right) = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ J;}$$

$$3°. \quad V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = 10.$$

3.2.22. $mg = Eq$; $q = 11{,}2 \cdot 10^{-19}$ C.

3.2.23. Din $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ rezultă $q = 3 \cdot 10^{-7}$ C.

Prin legarea la pământ, potențialul sferei devine zero, dar sfera se încarcă prin influență sub acțiunea cîmpului electric creat de cealaltă sferă. Potențialul zero rezultă din potențialul propriu și potențialul creat de sfera cu sarcina q la distanța d:

$$\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = 0, \text{ rezultă}$$

$$q' = -q \frac{r}{d} = 10^{-8} \text{ C} \quad \text{și} \quad F' = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ N.}$$

3.2.24. 1°. Sfera interioară S poartă o sarcină electrică exclusiv pe faţa exterioară, pe care o vom nota cu $-Q$ şi care se datorează influenţei exercitate de sarcina $+Q$ de pe faţa interioară a sferei exterioare S'. Notăm cu q sarcina de pe faţa exterioară a sferei S'. Capacitatea condensatorului este $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{RR'}{R' - R}$ şi sarcina sa este Q (sarcina de pe feţele opuse) şi prin definiţie: $Q = CV'$ (1)

În interiorul sferei S, cîmpul este zero, de asemenea potenţialul:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{R} + \frac{Q+q}{R'}\right) = 0. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR'V'}{R' - R'} = 2{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

şi

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R'V' = 2{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}.$$

De remarcat că sarcina de pe faţa exterioară a sferei S' nu depinde decît de R' şi V', ca şi cînd sfera S' ar fi singură, izolată în spaţiu.

2°. Fie M un punct oarecare pe semidreapta Ox; notăm $OM = x$.

Dacă $0 < x < R$, cîmpul este nul.

Dacă $R < x < R'$, cîmpul E are valoarea datorată unei sarcini $-Q$ concentrate în centrul sferei S:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-Q)}{x^2} = -\frac{RR'V'}{R' - R} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Dacă $x > R'$, cîmpul are valoarea pe care ar crea-o toate sarcinile concentrate în O : $(-Q + Q + q = q)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2} = \frac{R'V'}{x^2}.$$

3.2.25. 1°. Din expresiile potenţialelor:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \text{ şi } V_2 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \text{ rezultă:}$$

$$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 (V_1 - V_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1};\quad q_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{V_2 R_2 - V_1 R_1}{R_2 - R_1} R_2.$$

2°. $\sigma_1 = \dfrac{q_1}{S_1} = \dfrac{\varepsilon_0 (V_1 - V_2) R_2}{R_1 (R_2 - R_1)}$, $\sigma_2 = \dfrac{q_2}{S_2} = \dfrac{\varepsilon_0 (V_2 R_2 - V_1 R_1}{R_2 (R_2 - R_1)}$.

3°. Dacă $x < R_1$: $E = 0$, $V = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$;

$$R_1 < x < R_2 : E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2},\ V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2};$$

$$x > R_2 : E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2},\ V = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

3.2.26. $\sigma = 0{,}25 \cdot 10^{-9}\ \text{C/m}^2$.

3.2.27. Condensatoarele fiind legate în paralel, rezultă:

1°. $Q_0 = Q_1 + Q_2 = C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V \to V = V_0 \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} = 2 \cdot 10^3$ volţi.

2°. Energia acumulată inițial de primul condensator este $W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = 36 \cdot 10^{-2}$ J, iar energia înmagazinată în sistem

$$W = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(\frac{V_0 C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) W_1 = 24 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

Diminuarea energiei din sistemul de condensatoare se datorește disipării sub formă de căldură prin trecerea unei părți din sarcina de pe primul condensator pe cel de-al doilea prin conductoarele de legătură.

3.2.28. *I* — a) $Q_1 = C_1 U_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ C; $Q_2 = C_2 U_2 = 16 \cdot 10^{-3}$ C.

b) $W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = 1$ J; $W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 32$ J.

II a) $C = C_1 + C_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ F; b) $U = \frac{Q}{C} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 3 \cdot 10^3$ V.

c) $W = \frac{1}{2} C U^2 = 27$ J.

3.2.29. Sferele, conductoarele și sursa se află la același potențial V dat de:

$$V = V_A = V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \frac{Q}{AB}\right). \quad (Q \text{ fiind sarcina unei sfere}) \qquad (1)$$

Din condiția de echilibru a sferelor rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{mg} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 AB^2} \cdot \frac{1}{mg}. \qquad (2)$$

Din cele două relații rezultă:

$$V = \left(1 + \frac{2a \sin \alpha}{R}\right) \sqrt{\frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{4\pi\varepsilon_0}} = 106\,000 \text{ V}.$$

3.2.30. $W = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 3{,}8 \cdot 10^{-14}$ J $= 2{,}4 \cdot 10^5$ eV.

3.2.31. $W = W_{1-2} + W_{1-3} + W_{2-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3}{l} = -9 \cdot 10^{-3}$ J.

3.2.32. a) $C = 66 \cdot 10^{-12}$ F; b) $Q = 2 \cdot 10^{-8}$ C; c) $U_1 = 200$ V, $U_2 = 100$ V.

3.2.33. $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} E = 55 \cdot 10^{-6}$ C.

3.2.34. $q_1 = \frac{C_1}{2} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \cdot E = -24 \cdot 10^{-6}$ C;

$q_2 = \frac{C_2}{2} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \cdot E = -36 \cdot 10^{-6}$ C;

$q_3 = \frac{C_2 - C_1}{2} E = +60 \cdot 10^{-6}$ C.

3.2.35. 1°. $Q = 2 \cdot 10^{-3}$ C; 2°. $U = 800$ V; 3°. $W = 0{,}8$ J; 4°. $\Delta W = 0{,}2$ J.

3.2.36. 1°. $U = 7600$ V; 2°. $W = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$ J; 3°. $\Delta W = 1{,}37 \cdot 10^{-3}$ J.

3.2.37. 1°. $n = \frac{q}{e} = 100$ sarcini elementare;

2°. $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = 0{,}1768 \cdot 10^{-12}$ F.

3°. Din : $q\frac{U}{d} = mg$, rezultă $U = 3{,}75$ V;

4°. $Q = 6{,}63 \cdot 10^{-13}$ C.

3.2.38. 1°. Bila din interior fiind legată la pământ, va avea potențialul acestuia: $V_1 = 0$. Acest potențial, nul, este în același timp rezultat din potențialul creat de sarcina q_1, cu care se încarcă bila prin inducție sub influența potențialului sferei exterioare și potențialul creat de sarcina Q de pe sferă, la nivelul bilei:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0.$$

Rezultă că bila se încarcă prin inducție cu sarcina

$$q_1 = -Q\frac{r}{R} \text{ (de semn opus sarcinii } Q).$$

În același timp, sarcina Q de pe sfera exterioară se distribuie, datorită fenomenului de inducție, o parte q_1, pe fața interioară și restul $Q - q_1$, pe fața exterioară.

Potențialul sferei exterioare va fi:

$$V = \frac{-Q\frac{r}{R}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 225 \text{ V}.$$

2°. I. Dacă vom considera numai sfera exterioară, capacitatea acesteia este dată de: $C = \frac{Q}{V}$ și luînd expresia potențialului: $V = \frac{Q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, rezultă: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{R-r} = 44 \cdot 10^{-12}$ F.

II. Dacă considerăm sistemul sferă-bilă, îl putem trata ca un sistem de două condensatoare legate în paralel. Unul dintre condensatoare este constituit din bilă și suprafața interioară a sferei, celălalt condensator este constituit din suprafața exterioară a sferei și pământ (sferă de rază infinită).

Capacitatea echivalentă este:

$$C = C_1 + C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{Rr}{R-r} + 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R^2}{R-r} = 44 \cdot 10^{-12} \text{ F}.$$

3.2.39. a) $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$; b) $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{d/2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$;

c) $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S/2}{d} + \frac{\varepsilon_2 S/2}{d} = \frac{S}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

3.2.40. 1°. Din $F_1 = K\frac{Q_A Q_B}{d_1^2}$; $F_2 = K\frac{Q'_A Q'_B}{d_1^2}$ și $Q'_A + Q'_B = Q_A + Q_B$; rezultă:

$$Q_A \cdot Q_B = 64 \cdot 10^{-16} \text{ C}^2 \text{ și } Q_A + Q_B = 16\sqrt{2} \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$\text{și } Q_A = 3{,}28 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad Q_B = 19{,}28 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

2°. $V_A = \frac{Q_A}{C_A} = 2\,952$ V; $V_B = \frac{Q_B}{C_B} = 5\,784$ V; $V = \frac{Q_A + Q_B}{C_A + C_B} = 5\,076$ V.

3°. $Q_B(V - V_B) = KQ_A \cdot Q_B \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow m = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg.

4°. $n_A = \frac{Q_A}{e}$; $n_B = \frac{Q_A}{e}$; $n'_A = \frac{Q'_A}{e}$; $n'_B = \frac{Q'_B}{e}$; $n = n_B - n'_B = 1\,475 \cdot 10^7$ electroni au trecut de pe sfera B pe sfera A.

3.2.41. Din $I = \frac{Q}{t} = n_0 SVe$, rezultă: $v_c = \frac{I}{n_0 Se}$ unde n_0 este numărul de electroni de conducție din unitatea de volum.

$$n_0 = \frac{d_{Cu}}{M_{Cu}} N; \quad v_c = 1{,}84 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

3.2.42. $I = n \cdot e = \frac{v}{2\pi r} \cdot e = 1{,}06 \cdot 10^{-9}$ A.

3.2.43. $I = n \cdot e$; $n = 31{,}2 \cdot 10^{18}$ electroni/secundă.

3.2.44. a) $I = 20$ mA; b) $v_c = 2{,}75 \cdot 10^{-6}$ m/s.

3.2.45. Din: $l_1 s_1 d_1 = l_2 s_2 d_2$ și $\rho_1 \frac{l_1}{S_1} = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}$ rezultă $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{\rho_1 d_2}{\rho_2 d_1}}$.

3.2.46. $R = \rho \frac{l}{S} = 0{,}2\ \Omega$;

$$V_{AB} = RI = R \cdot I(1 + \alpha\theta) = 0{,}9 \text{ V}.$$

3.2.47. $l = 700$ m; $S = 2$ mm^2.

3.2.48. $\theta = \theta_1 + \frac{R_2 - R_1}{\alpha R_1} = 77{,}5°$ C.

3.2.49. Din $S_{Al} \cdot l \cdot d_{Al} = S_{Cu} l d_{Cu}$ rezultă $\frac{S_{Al}}{S_{Cu}} = \frac{d_{Cu}}{d_{Al}}$;

$$\frac{R_{Cu}}{R_{Al}} = \frac{\rho_{Cu} \cdot S_{Al}}{\rho_{Al} \cdot S_{Cu}} = 2{,}04.$$

3.2.50. $E = 12{,}6$ V; $r = 0{,}2\ \Omega$.

3.2.51. Din $R_\theta = R_{20}[1 + \alpha(\theta - 20°)]$ și $R_\theta = 9R_{20}$ rezultă $\theta = 2\,020°$ C.

3.2.52. $I = \frac{U}{R} = 2{,}5$ A; $r = \frac{E - U}{I} = 0{,}2\ \Omega$.

3.2.53. a) $E = (R + r)I = 185$ V; b) $U = RI = E - rI = 175$ V; c) $rI = 10$ V; d) $Q = RI^2 t = 525 \cdot 10^3$ J.

3.2.54. $\Delta W = E \cdot I \cdot t = 17{,}28 \cdot 10^4$ J.

3.2.55. $V_d - V_c = 1{,}3$ V.

3.2.56. a) $R = 118{,}75\ \Omega$; b) $I_1 = 0{,}051$ A; $I_2 = I_3 = 0{,}019$ A; $I_4 = 0{,}013$ A.

3.2.57. 1°. $P_c = UI = 2\,200$ W; 2°. $P_u = mgv = 1\,225$ W.
3°. $Q = 975$ J/s $= 233{,}5$ calorii/secundă.

3.2.58. $I = 1$ A — generatorul G_2 debitează curent, în timp ce generatorul G_1 se comportă ca un receptor.

3.2.59. $I = 0{,}5$ A debitat de generatorul G_1.

3.2.60. $I = 2$ A; $V_b = 19$ V; $V_c = 8{,}4$ V.

3.2.61. $V_A - V_B = nE - nIR = nE - n\dfrac{NE}{NR}R = 0.$

3.2.62. $I_1 = \dfrac{R_2(E_1 - E_3) + R_3(E_1 - E_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = -6{,}36 \cdot 10^{-3}$ A;

$$I_2 = \frac{R_1(E_2 - E_3) + R_3(E_2 - E_1)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 1{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{R_1(E_3 - E_2) + R_2(E_3 - E_1)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ A}; \quad I_4 = 0.$$

3.2.63. 1°. $P_J = 318{,}75$ W; 2°. $I = 3$ A; 3°. $R = 38{,}75$ Ω.

3.2.64. 1°. La echilibru: $P_J = RI^2 = \dfrac{4\rho l}{\pi D^2} I^2 = K \cdot \pi Dl(\theta_e - \theta_m)$;

$$\theta_e - \theta_m = \frac{4\rho I^2}{K\pi^2 D^3}.$$

2°. $\theta_e = \theta_m + \dfrac{4\rho I^2}{K\pi^2 D^3} = 40°$ C.

3.2.65. 1°. $E = 120$ V; $r = 10$ Ω; 2°. $P_1 = 360$ W (P_{max}).

3.2.66. 1°. $E = 2$ V; 2° $U = 1{,}75$ V; 3°. $m = 1{,}3416$ g.

3.2.67. 1°. $I = 2$A; 2°. $I_1 = 0{,}66$ A; $I_2 = 1{,}33$ A;
3°. $R_1 = 165\,\Omega$; $R_2 = 82{,}5$ Ω; $R_3 = 55$ Ω.

3.2.68. La bornele grupării formată din cele două baterii, diferența de potențial este: $U = E_1 - r_1I_1 = E_2 - r_2I_2$; $I_2 = \dfrac{E_2 - E_1 + r_1I_1}{r_2} = 30$ A; $I = I_1 + I_2 = 55$ A.

3.2.69. Aplicînd legile lui Kirchhoff trebuie să ținem seama că bateria de acumulatoare se comportă ca un receptor:

$$I_{ac} = \frac{E_1R - E_2(r_1 + R)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} = 1{,}58 \text{ A}; \quad I_{\text{lampă}} = \frac{E_1r_2 + E_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} = 3{,}65 \text{ A}.$$

3.2.70. $I_1 = 1{,}05$ A (debitat de E_1); $I_2 = 0{,}87$ A (în sens opus t.e.m. E_2); $I_R = 0{,}18$A; montajul este greșit, deoarece elementul de t.e.m. E_2 nu debitează, ci joacă rol de receptor.

3.2.71. $R_S = 16{,}7$ Ω.

3.2.72. $V_{Max} = 1\,000$ V.

3.2.73. 1°. $r_S = 0{,}2$ Ω; 2°. $r_a = 290{,}2$ Ω; 3°. $I = 3{,}88$ A; 4°. $m = 18{,}23$ g.

3.2.74. $I = 2$ A; $U = 0$.

3.2.75. $U_2 = 3$ V, $I_3 = 1$ A.

3.2.76. 1°. $V_0 = 213$ cm³; 2°. $R = 19$ Ω; $\rho = 12 \cdot 10^{-7}$ Ω m.

3.2.77. 1°. $1{,}62 \cdot 10^3$ W; 2°. 120 V; 3°. $\eta = 0{,}93$; 4°. $W = 46{,}656 \cdot 10^6$ J = = 12,96 kW/h.

3.2.78. 1°. $I = 8{,}33$ A; $R = 14{,}4$ Ω; 2°. $R_a = 12$ Ω; 3°. $l = 20{,}5$ m.

3.2.79. $I_1 = 3$ A; $I_2 = 2$ A; $R_e = 1{,}2$ Ω; $V_A - V_B = 6$ V.

3.2.80. 1°. $R = \dfrac{r_0R_S}{r_0 + R_S} = 0{,}25$ Ω; 2°. $I = 1$ A; 3°. $i_0 = 10^{-3}$ A; $i_1 = 0{,}1$ A; $i_1' = 10^{-4}$ A.

3.2.81. 1°. $E = 6 \times 2 = 12$ V; $U = E - 6rI_1 = 10{,}65$ V. 2°. $I_1 = 1{,}5$ A; 3°. $I_2 = 0{,}45$ A; $I_3 = 1{,}05$ A;

4°. $Q = R_2 I_2^2 t = 170$ J; 5°. $H = \frac{NI_3}{l} = 1\,575$ A/m. 6°. $\varphi = B \cdot S = 2{,}49 \cdot 10^{-9}$ Wb.

3.2.82. 1°. $R_1 = 162\ \Omega$; $R_2 = 38\ \Omega$; 2°. $I_1 = 0{,}095$ A; $I_2 = 0{,}405$ A; 3°. $U_b = 15{,}39$ V; 4°. $P_1 = 1{,}46205$ W; $P_2 = 6{,}23295$ W; $P = P_1 + P_2 = 7{,}695$ W.

3.2.83. 1°. $R = 20\ \Omega$; 2°. $n = 40$ elemente;

3°. $C = \frac{q}{E} = 3 \cdot 10^{-9}$ F; $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(1 + \varepsilon_r)$; $\varepsilon_r = 4$.

3.2.84. $E = 12$ V; $r = 0{,}4\ \Omega$.

3.2.85. Aplicînd legile lui Kirchhoff se obține:
$I_2 = 1{,}51$ A, debitat de generator; $I_1 = 0{,}49$ A absorbit de bateria de acumulatoare care se încarcă și $I_R = 1{,}02$ A prin rezistor.

3.2.86. 1°. $I = 0{,}2$ A; 2°. $V_A - V_B = 9{,}8$ V; $Q = 4{,}34 \cdot 10^{-8}$ C.

3.2.87. $d \approx 3$ cm.

3.2.88. 1°. $S = \frac{2\rho l P}{kE^2} = 70$ mm^2; 2°. ~ de 10 ori.

3.2.89. 1°. $I_1 = 16$ A; $I_2 = 2$ A; $I_3 = 10$ A; $I_4 = 8$ A; $I_5 = 6$ A; $I_6 = 6$ A.

2°. $E_1 I_1 + E_2 I_2 = \sum_{i=1}^{6} R_i I_i^2 = 2\,000$ W.

3.2.90. $P_m = 2 \cdot 10^3$ W; $E_c = 100$ V; $Q = 17{,}3 \cdot 10^3$ calorii; $P_c = 3{,}2 \cdot 10^3$ W.

3.2.91. 1°. $R_S = 1{,}01\ \Omega$; 2°. a) $I_1 = 0{,}33$ A; $I_m = 1{,}67$ A; $n = 300$ diviziuni.

3.2.92. 1°. $P_u = 68{,}7$ W; 2°. $P_m = 76{,}3$ W; 3°. $R_m = 18{,}25\ \Omega$; $E_c = 95{,}4$ V; 4°. $W = 3\,503$ J; 5°. $W' = 2 \cdot 10^5$ J.

3.2.93. 1°. $E_G = 24$ V; $r_G = 1\ \Omega$; 2°. a) $R_G = 3\ \Omega$; $m_{Cu} = 1{,}58$ g; 3°. b) $R' = 13{,}4\ \Omega$; c) $I' = 1{,}1$ A.

3.2.94. $E = 14$ V; $r = 4\ \Omega$.

3.2.95. $U = -24$ V; $I_1 = 6$ A; $I_2 = 4$ A; $I = 10$ A; $i = 0$.

3.2.96. $I_1 = 0{,}87$ A; $I_2 = 0{,}59$ A; $I_3 = -0{,}28$ A; $V_A - V_B = 0{,}56$ V;

$V_G - V_D = 0{,}56$ V; $V_G - V_H = 0{,}56$ V.

3.2.97. $E_2 = 18$ V; $E_3 = 7$ V; $V_A - V_B = 13$ V.

3.2.98. 1°. $I_1 = 2$ A; $I_2 = 1$ A; $I_3 = -3$ A;
2°. $U_1 = 14$ V; $U_2 = 3{,}8$ V; $U_3 = 8{,}5$ V.

3.2.99. 1°. $C = 32$ Ah; 2°. $W_c = 316{,}8 \cdot 10^3$ J; 3°. $W_d = 218{,}88 \cdot 10^3$ J; 4°. $I = 3{,}2$ A.

3.2.100. 1°. $R_L = 807\ \Omega$; $I_L = 0{,}273$ A; 2°. $Q = 1{,}63$ Ah; 3°. $W_J = 774 \cdot 10^3$ J; $W_{ac} = 514{,}8$ J; $\eta = 0{,}4$.

3.2.101. $P = 1\,250$ W; $l = 13$ m; $d = 0{,}85$ mm.

3.2.102. $R = 0{,}69\ \Omega$; $I_1 = 1{,}33$ A; $I_2 = 1$ A; $I_R = 2{,}33$ A.

3.2.103. Sursa furnizează o cantitate de electricitate $Q = CU$ sub o d.d.p. U — furnizînd deci o energie $W = Q \cdot U = CU^2$; energia electrică înmagazinată de condensator

este $W' = \frac{1}{2} CU'^2$. Deci, diferența $\Delta W = W - W' = \frac{1}{2} CU'^2$ s-a disipat prin conductor. Se remarcă faptul că energia disipată prin efect Joule nu depinde de valoarea rezistenței conductoarelor cu care este cuplat condensatorul la sursă.

3.2.104. 1°. $i = 0{,}1$ A/diviziune; 2°. $r_0 = 49{,}5\ \Omega$; 3°. $E = 13{,}26$ V; $R = 3{,}25\ \Omega$.

3.2.105. 1°. $r = 1\ \Omega$; $R = 3\ \Omega$; 2°. $m_a = \frac{30 \cdot 10 \cdot 60}{4\,180 \cdot 4} - 0{,}5 = 0{,}576$ kg;

3°. $E_c = E - I'(r + R + R_p) = 2{,}5$ V; 4°. $E_{c.m} = 25$ V; $R_m = 0{,}5\ \Omega$.

3.2.106. 1°. $U_R = U_D = 24$ V; 2°. $I_R = 1{,}2$ A; $I_f = 0{,}8$ A; 3°. $\rho = 2 \cdot 10^{-6}\ \Omega$m; 4°. $P_R = 28{,}8$ W; $Q_R = 34{,}56 \cdot 10^6$ J; 5°. $l_2 = 188{,}4$ m.

3.2.107. $H_A = \frac{I}{2\pi r_A} = 255$ A/m; $H_B = \frac{i}{2\pi r_B} = \frac{\frac{I}{\pi r_0^2} \cdot \pi r_B^2}{2\pi r_B} \frac{Ir_B}{2\pi r_0^2} = 200$ A/m.

Intensitatea cîmpului este maximă la suprafața conductorului:

$$H_{max} = \frac{I}{2\pi r_0} = 318 \text{ A/m}.$$

3.2.108. Conform figurii 3.120 avem:

a) $B_A = B_{1-A} + B_{2-A} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_A} + \frac{I_2}{d - r_A}\right) = 4 \cdot 10^{-5}$ T.

b) $B_B = B_{1-B} - B_{2-B} = -10^{-5}$ T.

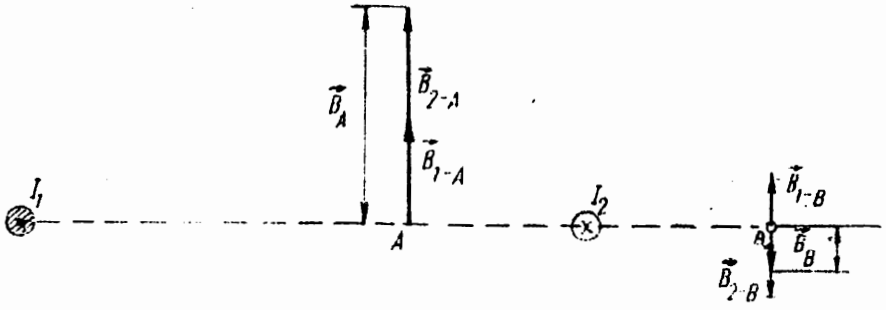


Fig. 3.120.

3.2.109. 1°. $B_1 = \mu_0 \frac{I}{2r} = \pi \cdot 10^{-5}$ T; 2°. $B_2 = \mu_0 \cdot 2 \cdot \frac{I}{r/2} = 4B_1 = 4\pi \cdot 10^{-5}$ T.

3.2.110. a) $H_{D-A} = \frac{I_A}{2\pi l}$; $H_{D-C} = \frac{I_C}{2\pi l}$; $H_{D-B} = \frac{I_B}{2\pi \cdot \frac{l}{2}}$; $H_D = 800$ A/m orientat după direcția $\overrightarrow{DA}$.

b) $\frac{F}{l} = \mu H_D I_D = 64 \cdot \pi \cdot 10^{-3}$ N/m.

3.2.111. $B_0 = \mu_0 \frac{nc}{2r_0} = \mu_0 \frac{r_0 e}{4\pi r_0^2} = 12{,}53$ T.

3.2.112. Laturile CD și EG sînt perpendiculare pe $\vec{B}$; ele sînt supuse la forțe egale în modul, dar opuse: $F = I \cdot a \cdot B = 0{,}4$ N; CE și DG fac un unghi β cu $\vec{B}$; ele sînt supuse la forțe egale, dar opuse: $F' = I \cdot b \cdot B \sin 60° = 0{,}17$ N.

Rezultanta forțelor care acționează asupra celor patru laturi ale spirei este nulă, dar efectul cuplului este:

$$\Gamma = F \cdot b \cdot \sin \alpha = I \cdot B \cdot a \cdot b \sin \alpha = I \cdot B \cdot S \cdot \sin \alpha = 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

3.2.113. $I = 16 \cdot 10^{-3}$ A.

3.2.114. 1°. $I = 1{,}374$ A, intensitatea are valoarea maximă, deoarece rezistența circuitului exterior (bobinei) este egală cu rezistența interioară a sursei (rezistența echivalentă a bateriei de elemente).

2°. $B = 2{,}07 \cdot 10^{-3}$ T, după direcția axei;

3°. $B' = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ T; 4°. $\varphi' = 49°7'$.

3.2.115. 1°. $E = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$ V; 2°. $v = 3$ m/s.

3.2.116. $I = 0{,}408$ A, de la A la B.

3.2.117. $\Delta P = \dfrac{\pi \mu_0 d^2 N I^2 n}{4l} = 13 \cdot 10^{-6}$ N.

3.2.118. a) Datorită forței centrifuge, electronii liberi din disc sînt deplasați spre periferia discului, creîndu-se o d.d.p. — respectiv un cîmp electric și stabilindu-se un echilibru: $m_e \omega^2 \cdot \dfrac{a}{2} = e \cdot \dfrac{U_1}{a}$; termenul doi reprezintă forță centripetă (electrostatică) și rezultă $U_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ V.

b) $U_2 = \pi \cdot n \cdot Ba^2 = 33 \cdot 10^{-3}$ V.

3.2.119. $I = \dfrac{Bv \sin \alpha}{r_0(1 + \sin \alpha)} = 25$ A, curentul este constant și circulă în sens contrar acelor ceasornicului.

$$F = BIl = 2B^2 v^2 \frac{t}{r_0} \frac{\sin^3 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = 108{,}25 \text{ N}.$$

3.2.120. $I = \dfrac{B \cdot v}{r_0(1 + a/\sin \alpha)}$.

3.2.121. $H = \dfrac{QR}{2\mu_0 SN} = 4 \cdot 10^5$ A/m.

3.2.122. $F = BIl \sin \alpha = 3{,}75$; $P = F.v. = 30$ W.

3.2.123. 1°. $W = E \cdot I \cdot t = 2 \cdot 10^3$ J. 2°. $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) = 50$ N.

3°. $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} = 0{,}141$ s. 4°. $v = a \cdot t = 70{,}5$ m/s; $w_c = 248{,}512$ J.

3.2.124. 1°. $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -Blv = 6$ $V(V_N - V_M)$; $I = 30$ A.

2°. $F = BIl = 18$ N; 3°. $P_m = F \cdot v = 180$ W; 4°. $P_J = RI^2 = 180$ W.

3.2.125. $\vec{B} = 0$ în lungul unei linii, paralelă cu conductorul, la distanța de 4 mm de acesta. Dacă curentul este orizontal și îndreptat spre observator, iar cîmpul exterior ($\vec{B}$) este orizontal de la stînga spre dreapta, linia se află deasupra firului.

3.2.126. $F = 3{,}2 \cdot 10^{-2}$ N. Forța este de atracție dacă curentul prin latura spirei vecină cu conductorul este paralel cu curentul prin conductor.

3.2.127. 1°. $B = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ T; 2°. $B' = 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ T; 3°. $F = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ N.

3.2.128. $n = 8{,}85$ ture pe secundă.

3.2.129. $e = 9 \cdot 10^{-6}$ V.

3.2.130. a) 1°. $B \cdot \frac{E - Blv_1}{R} \cdot l = G_1 \rightarrow v_1 = 30$ ms^{-1}.

2°. $P_e = E \cdot I_1 = 18 \cdot 10^3$ W; $P_m = G_1 \cdot v_1 = 13{,}5 \cdot 10^3$ W; $P_J = RI_1^2 = 4{,}5 \cdot 10^3$ W.

Energia electrică debitată de sursă se transformă în energie mecanică și o parte în căldură: $P_e = P_m + P_J$, sistemul se comportă ca un electromotor de randament $\eta = \frac{P_m}{P_e} = 0{,}75$.

b) 1°. $B \cdot \frac{E}{R} \cdot l = G_2 \Rightarrow v_2 = 0$; sistemul este în echilibru dinamic, sursa debitează un curent $I_2 = \frac{E}{R} = 600$ A și energia electrică se transformă în căldură prin efect Joule: $P_e = P_J = EI_2 = RI_2^2 = 72 \cdot 10^3$ W.

c) 1°. $B \cdot \frac{E + Blv_3}{R} \cdot l = G_3 \Rightarrow v_3 = -10$ ms^{-1}.

2°. $P_e = 90 \cdot 10^3$ W; $P_m = 22{,}5 \cdot 10^3$ W; $P_J = 112{,}5 \cdot 10^3$ W.

$P_J = P_e + P_m$, atît energia furnizată de sursă cît și cea produsă prin coborîrea greutății se transformă în căldură.

3.2.131. 1°. $B \cdot \frac{Blv - E}{R} \cdot l = G \Rightarrow v = 50$ ms^{-1}.

2°. $P_e = EI = 120 \cdot 150 = 18 \cdot 10^3$ W; $P_m = G \cdot v = 22{,}5 \cdot 10^3$ W; $P_J = 4{,}5 \cdot 10^3$ W; $P_m = P_e + P_J$.

3.2.132. $e = B \cdot l \cdot v = \frac{\mu_0 I \cdot l \cdot v}{2\pi \sqrt{h_1 - h_2)^2 + (v \cdot t)^2}}$; $e_{max} = \pm \frac{\mu_0 I \cdot l \cdot v}{2\pi(h_1 - h_2)} = \pm 10^{-8}$ V.

3.2.133. 1°. $U = \frac{W}{e} = 10$ V; 2°. $r = \frac{mv}{eB} = 0{,}11$ m; 3°. $\nu = \frac{eB}{2\pi m} = 2{,}8 \cdot 10^8$ s^{-1}; $T = \frac{1}{\nu} = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$ s. (se numește *frecvență ciclotron*).

3.2.134. a) $v = 2{,}6 \cdot 10^7$ m/s; b) $T = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ s; c) $W_e = 14 \cdot 10^6$ eV; d) $U = 7 \cdot 10^6$ V.

3.2.135. $R = \frac{mv_0 \sin \alpha}{eB} = 3{,}98 \cdot 10^{-2}$ m; $T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB} = 35{,}34 \cdot 10^{-9}$ s.

$$h = v_0 \cos \alpha \cdot T = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha = 0{,}25 \text{ m}.$$

3.2.136. 1°. $E_0 = \frac{1}{2} mv^2 = 7{,}2 \cdot 10^{-16}$ J; 2°. $U = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{e} = 4\,500$ V;

3°. $\Delta\theta = 36{,}7°$ C; 4°. Electronul este supus forței electrice după direcția OY: $x = v_0 t$; $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{md} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \frac{eU}{md} \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow$ traiectoria este o parabolă;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{U}{360} \cdot 2x = \frac{5}{3{,}6} \simeq 0{,}14 \Rightarrow \alpha \simeq 8°.$$

3.2.137. 1°. $W_c = \frac{1}{2} mv_0^2 = eU_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-15}$ J,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2W_c}{m}} = 6 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1};$$

$$2°.\ y = \frac{1}{2} \frac{eU_2}{md} \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{U_2}{4U_1 d} x^2,\ y = 1{,}5\, x^2.$$

Deviația electronului pe ecran este: $y' = \frac{U_2 lD}{2U_1 d} = 5{,}4$ cm;

Observație. Din expresia deviației se vede că aceasta nu depinde de particulă (masa și sarcina acesteia).

3°. Forța Lorentz ce se exercită asupra electronului este orientată după OZ; mișcarea are loc în planul XOZ.

$R = \frac{mv_0}{eB} = 18{,}75$ cm; deviația Z pe ecran are valoarea

$$Z = \frac{eBDl}{mv_0} = \frac{Dl}{R} = 9{,}6 \text{ cm}.$$

4°. În referențialul $YO'Z$, punctul M de impact al electronului cu ecranul, electronul fiind supus simultan celor două forțe, este:

$y = \frac{eU_2 lD}{mv_0^2 d}$; $Z = \frac{eBlD}{mv_0^2}$ și eliminînd pe v_0, care este variabilă, găsim:

$y = \frac{mU_2}{eB^2 ldD} \cdot Z^2$ sau $y = 5{,}55\, Z^2$ (ecuația unei parabole).

3.2.138. $q = \frac{mgd}{U}\left(\frac{v_2}{v_1} + 1\right) = 8 \cdot 10^{-19}$ C $= 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C $= 5 \cdot e$.

3.2.139. 1°. $W_{max} = \frac{B^2 c^2 D^2}{8 m_p} = 27{,}52 \cdot 10^{-13}$ J $= 17{,}2 \cdot 10^6$ eV;

$v = \frac{B \cdot e \cdot D}{2m} = 5{,}8 \cdot 10^7$ ms^{-1}; 2°. $t = \frac{\pi D^2 B}{8U} = 4{,}7 \cdot 10^{-8}$ s.

3.2.140. Electronii care trec prin O au o mișcare rectilinie uniformă; cele două forțe echilibrîndu-se:

$$ev_0 B = eE \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}.$$

3.2.141. Din $evVB = mg \Rightarrow v = \frac{mg}{eB} = \frac{mg}{\mu_0 e H_0} = 2{,}77 \cdot 10^{-8}$ m/s.

3.2.142. 1°. $E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N \cdot B \cdot S \cdot \cos \omega t) = \omega NBS \sin \omega t = 314 \sin 20\pi t$ (V);

$e_{max} = 314$ V.

2°. $I = \frac{e}{R} = 6{,}28 \sin 20\pi t$; 3°. $Q = RI_e^2 t = R\frac{I_{max}^2}{2} t = 59\,160$ J.

3.2.143. 1°. $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BN \cos 2\pi \nu t) = 2\pi \nu BN \sin 2\pi \nu t$;

$$e = 8\pi \sin 100\pi t \text{ (V)}.$$

2°. $i = \frac{e}{R + r} = \frac{8\pi \sin 100\pi t}{R + r} = 1{,}6\, \pi \sin 100\pi t$ (A).

3.2.144. 1°. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}02$ s; $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz.

2°. $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow i = 10 \sin\left(314\, t + \frac{\pi}{6}\right)$ (A).

4°. $i_{\text{momentan}} = 10 \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right) : i_0 = 5$ A;

$$i_1 = 5\sqrt{3} \text{ A}; \quad i_2 = 10 \text{ A}; \quad i_3 = -10 \text{ A}.$$

3.2.145. $U_0 = 78{,}5$ V.

3.2.146. $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz;

$$U_m = 141{,}4 \text{ V} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 100 \text{ V}.$$

3.2.147. a) $R = \frac{U}{I} = 20\ \Omega$; b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{100}{37{,}4} = 2{,}68$ A.

3.2.148. $I = \frac{U}{Z} = U\omega C = 3{,}14$ A.

3.2.149. $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = R = 20\ \Omega \Rightarrow$ circuitul este la rezonanță.

$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = I_m = 5$ A $\Rightarrow$ curentul este în fază cu tensiunea.

3.2.150. Condiția de rezonanță: $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 500 \text{ Hz}.$$

3.2.151. a) $R = \frac{U_c}{I_c} = \frac{20}{2{,}5} = 8\ \Omega$; $Z = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = 8{,}9\ \Omega$;

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}; \quad L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = 1{,}24 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} = 0{,}487 \Rightarrow \varphi = 26°$.

c) $P_c = U_c I_c = 20 \cdot 2{,}5 = 50$ W, energie transformată în căldură prin efect Joule,

$P' = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi = 17{,}8 \cdot 2 \cdot \cos 26° = RI_{ef}^2 = 32$ W — transformată de asemenea în căldură.

d) $L' = 100\ L = 1{,}24$ H; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L'\omega}{R} = \frac{1{,}24 \cdot 100\ \pi}{8} \simeq 49 \rightarrow \varphi \simeq 89°$.

Se observă că R devine aproape neglijabil în raport cu $X_L = \omega L'$.

$$Z' \simeq L'\omega \Rightarrow I' \simeq \frac{U}{L'\omega} = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Observații. Pentru o inductanță relativ mare și, respectiv, o frecvență înaltă a tensiunii alternative, bobina în circuit poate să blocheze curentul.

3.2.152. 1°. $Z = \frac{U}{I} = 500\ \Omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} =$

$$= 0{,}5 \text{ H}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 50,$$

întîrziere a intensității cu $\varphi = 89°$ față de tensiune. Rezistența activă a bobinei fiind foarte mică în raport cu reactanța acesteia, se poate scrie: $i = I_{ef}\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) = 0{,}1\sqrt{2}\sin(1\,000\,t - 1{,}55\ \text{rad})$.

2°. $C = \dfrac{1}{L\omega^2} = 2 \cdot 10^{-6}$ F.

3°. $I_0 = \dfrac{U}{R} = 5$ A; $U_b = 2\,500$ V; $U_c = 2\,500$ V; $\dfrac{U_b}{U} = \dfrac{2\,500}{50} = 50$,

acest raport măsoară supratensiunea produsă în circuit; poartă numele de *factor de calitate al circuitului*.

3.2.153. 1°. $I_{ef} = \dfrac{U_{ef}}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}} = 1{,}5$ A.

2°. $U_1 = IZ_1 = I\sqrt{R_1^2 + X_1^2} = 25{,}5$ V; $U_2 = I\sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 97{,}5$ V.

3°. $\cos\varphi_1 = \dfrac{R_1}{Z_1} = \dfrac{15}{17}$; $\cos\varphi_2 = \dfrac{R_2}{Z_2} = \dfrac{33}{65}$; $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = 0{,}6$.

4°. $P_a = UI\cos\varphi = I^2(R_1 + R_2) = 108$ W;
$P_r = UI\sin\varphi = I^2(X_1 + X_2) = 144$ VAR;
$P_{ap} = UI = 180$ VA.

3.2.154. $I_R = \dfrac{U}{R} = 48$ A; $I_L = \dfrac{U}{X_L} = 30$ A;

$$I_C = \frac{U}{X_C} = 16 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = 50 \text{ A}; \quad \cos\varphi = 0{,}96.$$

3.2.155. $R = X_C = \dfrac{1}{C\omega} = 10\ \Omega$; $I_R = I_C = \dfrac{I}{\sqrt{2}} = 5$ A; $P_{max} = RI_R^2 = 250$W.

3.2.156. 1°. $I_{ef} = \dfrac{U_{ef}}{Z} = \dfrac{U_{ef}}{L\omega} = 0{,}16$ A;

2°. $I = \dfrac{U}{L}\cdot\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{U}{2\pi L}\cdot\dfrac{1}{\nu}$; intensitatea curentului prin bobină scade cînd crește frecvența tensiunii, încît la frecvențe înalte, bobina blochează curentul.

3.2.157. 1°. $I_{ef} = \dfrac{U_{ef}}{Z} = \dfrac{U_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = \dfrac{100}{334} = 0{,}3$ A.

2°. $U_L = I\omega L = 0{,}3 \cdot 2\pi \cdot 10^3 = 60 \cdot \pi$ V; $U_C = \dfrac{I}{\omega C} = 0{,}3 \cdot \dfrac{10^6}{8} =$

$$= \frac{3\,000}{8} = 119{,}36 \text{ V}; \quad U_R = I \cdot R = 0{,}3 \cdot 236 = 70{,}8 \text{ V}.$$

3°. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} \simeq 1 \Rightarrow \varphi = +\dfrac{\pi}{4}$, tensiunea este în avans cu $\pi/4$ față de intensitate.

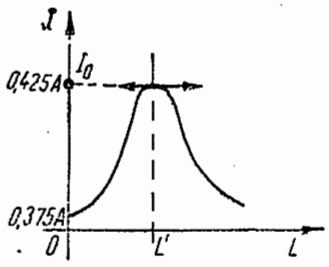


Fig. 3.121.

4°. Vezi figura 3.121.

5°. $L_0C\omega^2 = 1 \Rightarrow L_0 = \frac{1}{C\omega^2} = 12{,}5 \cdot 10^{-8}$ H;

$I_0 = \frac{U}{R} = 0{,}425$ A; $U_{0b} = Z_b \cdot I_0 = L_0\omega I_0 = 167$ V;

$U_{0\text{-}c} = \frac{I_0}{\omega C} = U_{0\text{-}b} = 167$ V; $U_{0\text{-}R} = R \cdot I_0 = 100$ V.

3.2.158. 1°. $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 200$ V;

2°. $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 101\ \Omega$;

3°. $I = \frac{U}{Z} = 1{,}98$ A;

4°. $U_b = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 594{,}6$ V; $U_C = I\frac{1}{C\omega} = 396{,}6$ V;

5°. $P = UI\cos\varphi = RI^2$; $W = RI^2t = 35\,280$ J (în condensator nu se disipă energie).

6°. $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}1485$.

7°. $L_0C\omega^2 = 1 \rightarrow L_0 = \frac{1}{C\omega^2} = 0{,}52$ H : $I_0 = 13{,}3$ A;

$U_b' = 2\,666$ V; $U_C' = 2\,664$ V;

8°. $W_0 = RI_0^2 \cdot t = 1{,}6 \cdot 10^6$ J.

3.2.159. 1°. $R_0 = 40\ \Omega$; $L_b = \frac{0{,}3}{\pi}$ H; 2°. $I = 2$ A;

3°. $U_b = 100$ V; $U_c = 100$ V;

4°. $\varphi_b = 36°50'$; $\varphi_c = -36°50'$;

5°. $C_0 = \frac{10^{-3}}{3\pi}$ F; $I_0 = 2{,}5$ A;

6°. $P_a = RI^2 = 160$ W; $P_r = 120$ VAR.

3.2.160. a) $\nu = 50$ Hz; $T = 0{,}02$ s;

b) $I_{ef} = 4$ A;

c) $U_b = 8\sqrt{5}$ V; $U_c = 20$ V;

d) $\varphi_b = 26°40'$; $\varphi = -36°50'$;

e) $U_{ef.\,sec.} = \frac{N_2}{N_1}U_b = \sqrt{5}$ V.

3.2.161. 1°. $I_R = 0{,}05$ A; $I_B = 0{,}2$ A; $I = 0{,}206$ A;

2°. $\varphi = 76°$.

3.2.162. 1°. $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 20\ \Omega$; $I = \frac{U}{Z} = 6$ A; $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}8$;

2°. $U_b = Z_b \cdot I = \sqrt{R^2 + X_L^2} \cdot I = 204$ V; $U_c = I \cdot X_c = 108$ V.

3°. $P_a = U \cdot I\cos\varphi = RI^2 = 576$ W;

$P_r = UI\sin\varphi = X \cdot I^2 = 432$ VAR;

$P_{ap} = U \cdot I = ZI^2 = 720$ VA.

8.2.163. 1°. $I_1 = \frac{P}{U} = \frac{W_1}{U \cdot t} = 10$ A;

$W' = RI^2t = 3{,}6 \cdot 10^6$ J $= 1$ kWh;

2°. $I_2 = \frac{W_2}{U \cdot t \cdot \cos\varphi} = 12{,}5$ A; $W_2' = RI_2^2 t = 1{,}56$ kWh;

3°. $I_3 = \frac{U}{Z} = U \cdot C \cdot \omega = 0{,}377$ A; $W_3 = 0$; $W_3' = RI_3^2 t = 1{,}42$ Wh.

8.2.164. 1°. $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 20{,}3\ \Omega$;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = 0{,}781, \quad \varphi = 38°.$$

8.2.165. 1°. $R = 54{,}4\ \Omega$; 2°. $C \approx 10^{-4}$ F.

8.2.166. $U_B = I \cdot Z_b = I \cdot \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; $Z_b = \text{const} \Rightarrow U_B$ este maxim cînd curentul este maxim $\Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} = 5 \cdot 10^{-5}$ F.

$$U_{b\text{-max}} = I_m \cdot Z_b = \frac{100}{10} \cdot \sqrt{3\,948} \simeq 630 \text{ V}.$$

8.2.167. $L = \frac{1}{\omega^2 C} \simeq 1$ H.

8.2.168. $T = 2\pi\sqrt{LC} = 58 \cdot 10^{-6}$ s.

8.2.169. 1°. $R = 480\ \Omega$; $X_L = 640\ \Omega$; $X_C = 280\ \Omega$;
2°. $\varphi \simeq 0{,}63$ rad.
3°. $L = 1{,}69$ H; $C = 9{,}45 \cdot 10^{-6}$ F; $\nu = 60$ Hz.

8.2.170. 1°. Coarda vibrează cu amplitudine maximă, atunci cînd frecvenţa proprie ($\lambda = 2\ l = u/\nu_0$) coincide cu frecvenţa forţei excitatoare (forţa electromagnetică); din $u/\nu_0 = \frac{\sqrt{\frac{G}{\mu}}}{\nu_0}$ şi $\nu_0 = 50$ Hz, rezultă $G = 2{,}76$ N.

2°. a) $R_{AB} = 0{,}51\ \Omega$; $R_b = 32\ \Omega$; b) $I = 1{,}98$ A; c) $L = 0{,}161$ H.
3°. $C = 62 \cdot 10^{-6}$ F; $U_c = 190$ V.

8.2.171. 1°. $R = 24\ \Omega$; 2°. $I = 5$ A; 3°. $Q = 514 \cdot 10^3$ calorii.

8.2.172. $\varphi = 0{,}8$; $I = 2$ A.

8.2.173. $R = 10\ \Omega$; $I_1 = 9$ A; $I_3 = 3$ A.

8.2.174. 1°. $h = 629$ m;
2° a) $U_{\text{Sec}} = 16 \cdot 10^4$ V; b) $U_c = 14{,}45 \cdot 10^4$ V; $P_c = 33{,}75 \cdot 10^6$ W;
3°. $S = 256$ cm^2.

8.2.175. a) $C = 17{,}6 \cdot 10^{-6}$ F; b) $\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C - C_0}{C_0} = 10^{-3}$.

8.2.176. a) $C = 11 \cdot 10^{-9}$ F; b) $I_1 = 0{,}402$ A; $I_3 = 0{,}423$ A şi $I = 8{,}9$ mA.

8.2.177. $I = 18{,}5$ A.

3.2.178. a) $C = 35 \cdot 10^{-6}$ F, în serie;
b) $C = 12{,}7 \cdot 10^{-6}$ F, în derivație.

3.2.179. a) $\cos \varphi = 0{,}75$; $I = 18{,}2$ A;
b) $8 \cdot 10^{-6}$ F.

3.2.180. Cele două circuite în derivație au impedanțele:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = 5{,}5\ \Omega \text{ și respectiv, } Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = 5{,}8\ \Omega.$$

Rezultă: $I_1 = \frac{U}{Z_1} = 18{,}45$ A; $I_2 = \frac{U}{Z_2} = 20{,}7$ cu defazările:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = 0{,}862; \quad \sin \varphi_1 = \frac{X_L}{Z_1} = 0{,}508;$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = 0{,}724; \quad \sin \varphi_2 = \frac{X_C}{Z_2} = -0{,}69.$$

Curenții vor fi: $I_a = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 = 30{,}9$ A și $I_r = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 = -4{,}83$ A.

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = 31{,}3 \text{ A}; \quad \cos \varphi = \frac{I_a}{I} = 0{,}988; \quad \sin \varphi = \frac{I_r}{I} = -0{,}156.$$

$$P_a = UI \cos \varphi = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 3\,700 \text{ W}.$$

$$P_r = UI \sin \varphi = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 = -585 \text{ VAR}.$$

$$P_{ap} = UI = 3\,760 \text{ VA}.$$

3.2.181. $I_1 = 3{,}45$ A; $I_2 = 0{,}377$ A; $I = 3{,}13$ A; $\cos \varphi = 0{,}477$.

3.2.182. $I_R = 3{,}8$ A; $I_C = 4{,}8$ A; $I = 7{,}3$ A; $\cos \varphi = 0{,}987$.

3.2.183. 1°. $E = n \cdot N \cdot \Phi_m = 84{,}78$ V;

2°. $I = \frac{E}{R_r + R_i + R_e} = 4{,}71$ A; $U = 75{,}36$ V.

3°. $n_e = \frac{240}{16} = 15$ becuri;

4°. $P' = U \frac{I}{n} = 23{,}66$ W;

5°. $\eta_e = \frac{U}{E} = 0{,}88$.

3.2.184. 1°. $I_e = 0{,}41$ A; $I_r = 15{,}41$ A; 2°. $E = 74{,}2$ V.

3.2.185. $I_R = \frac{U}{R} = 5$ A; $I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_L^2 + L^2\omega^2}} = 4{,}6$ A;

$$I_C = uc\omega = 63{,}7 \text{ A};$$

$$P_a = R \cdot I_r^2 + R_a I_L^2 = 817{,}4 \text{ W}.$$

$$P_r = X_L \cdot I_L^2 + X_C \cdot I_C^2 = 6\,369{,}5 \text{ W}.$$

3.2.186. 1°. Considerînd antena ca un oscilator cu ventru-tensiune la capătul superior și nod, punctul de la pămînt, avem:

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu}, \quad \nu = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ Hz}; \quad L = \frac{1}{C\omega^2} = 40{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ H};$$

2°. Din $RI^2t = mc\,\Delta\theta = K\,\Delta\theta$, $\Rightarrow t = \dfrac{K\,\Delta\theta}{RI^2} = 1{,}2$ s.

3°. $\Delta\lambda = 4\,\Delta l = 4l\alpha\,\Delta\theta = 0{,}12$ m.

4°. $E = \dfrac{U}{l} = \dfrac{RI}{l} = 3{,}33$ V/m.

5°. $\dfrac{I}{2\pi r_0} = H_0$, $r_0 = \dfrac{I}{2\pi H_0} \simeq 1$ m.

3.2.187. În cazul circuitului alimentat de acumulator, receptoarele nu pot avea decît rezistenţe chimice şi respectiv, inductanţă, nu şi condensatoare.

$E = R_c \cdot I_c \Rightarrow R_c = \dfrac{2}{0{,}2} = 10\,\Omega$ (în cazul acumulatorului).

$$U = ZI_a,\ Z = \frac{U}{I_a} = 20\ \Omega = \sqrt{(R + R_L)^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{100 + \omega^2 L^2}$$

rezultă

$$L = \frac{\sqrt{400 - 100}}{100\,\pi} = 55{,}1\ \text{mH}.$$

3.2.188. 1°. $I = \dfrac{m}{kt} = 6{,}73$ A;

2°. $H = \dfrac{nI}{l} = 6\,730$ A/m;

3°. $\varphi = 5 \cdot B = \mu_0 SH = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ Wb;

4°. Rezistenţa circuitului $R_{tot} = \dfrac{E}{I} = 17{,}83\,\Omega =$

$= R_D + R_s + R_v + R$ rezultă $R = 5{,}83\ \Omega$;

5°. $\eta_c = \dfrac{P_u}{P_c} = \dfrac{R_{tot} - R_D}{R_{tot}} = \dfrac{U}{E} = 0{,}83.$

3.2.189. La bornele dinamului avem $U = E - rI_r = 110 - 0{,}5 \cdot 12 = 104$ V şi rezultă curentul prin rezistor:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{104}{15{,}9} = 6{,}54\ \text{A}.$$

Curentul indus este 12 A $= I_{ex} + (I_R + I_{\text{Lampa}})$;

$$I_{ex} = \frac{U}{R_{ex}} = \frac{104}{30}\ \text{A}.$$

Din aceste relaţii rezultă: $I_{\text{Lampă}} \simeq 2$ A.

1°. $P_{\text{Lampă}} = UI_{\text{Lampă}} = 208$ W;

2°. $W_R = RI_R^2 t = 2{,}45 \cdot 10^6$ J $= 0{,}680$ kWh.

3.2.190. 1°. a) $I_c = UC\omega = 0{,}63$ A; $\varphi_c = -90°$.

b) $I_L = \dfrac{U}{\sqrt{R_L^2 + L^2\omega^2}} = 1{,}06$ A; $\varphi_L = 83°56'$.

$I\cos\varphi = I_L\cos\varphi_L$; $I\sin\varphi = -I_c + I_L\sin\varphi_L$; rezultă;

$$I = \sqrt{I_c^2 + I_L^2 - 2I_cI_L\sin\varphi_L} = 0{,}43\ \text{A};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_L - \frac{I_c}{I_L\cos\varphi_L} = 3{,}80,\ \varphi_L = 75°15'.$$

d) $I = \dfrac{U}{\sqrt{R_L^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = 4{,}52\ \text{A};$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)/R;\quad \varphi = -81°15'.$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 240\ \text{V};\quad U_L = I\sqrt{R_L^2 + L^2\omega^2} = 143\ \text{V}.$$

2°. Curentul prin circuit are valoarea maximă la rezonanță:

$$LC\omega_0^2 = 1,\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 65\ \text{Hz}.$$

Rezultă în aceste condiții: $I = 10$ A; $\varphi = 0$; $U_C = 1\,220$ V; $U_L = 1\,220$ V; **defazajul curent-tensiune:** $\varphi_C = 90°$; $\varphi_L = -85°20'$.

3.2.191. 1°. $U_{2-S} = K_2U_{2-P} = K_1K_2U_1 = 20 \cdot \dfrac{1}{40} \cdot 6\,000 = 3\,000$ V.

Observație: dacă se ține seama de căderea de tensiune pe linie, calculăm mai întîi rezistența acesteia: $R_1 = \rho\dfrac{l}{S} = 1\,050\ \Omega$ și curentul din secundarul primului transformator:

$$I_{1-S} = \frac{P_{1-S}}{U_{1-S}} = \frac{\eta_1 P_{1-S}}{U_{1-S}} = \frac{0{,}95 \cdot 40 \cdot 6\,000}{20 \cdot 6\,000} = 1{,}9\ \text{A}.$$

Rezultă: $\Delta U_{\text{linie}} = R_{\text{linie}} \cdot I_{1-S} = 1\,050 \cdot 1{,}9 = 2\,000$ V și tensiunea la intrarea în primarul transformatorului coborîtor va fi $U_{2-p} = U_{1-S} - \Delta U_l = 20 \times 6\,000 - 2\,000 = 118$ kV, iar $U_{2-S} = K_1K_2K_{\text{linie}}U_{1-p} = 20 \cdot \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{118}{120} \cdot 6\,000 = 2\,950$ V.

2°. Pentru calculul puterii debitate de transformatorul coborîtor, trebuie să ținem seama și de pierderile pe linie: $P_{\text{linie}} = R_{\text{linie}}\,I_2^2 = 1\,050 \cdot (1{,}9)^2 = 3{,}79$ kW și randamentul liniei este $\eta_{\text{linie}} = \dfrac{228 - 3{,}79}{228} = 0{,}983$; rezultă:

$$P_{2-S} = P_{1-P} \cdot \eta_1\eta_{\text{linie}}\,\eta_2 = 21{,}3 \cdot 10^4\ \text{W}.$$

3°. Randamentul global al termocentralei este:

$$\eta_G = \eta_T \cdot \eta_e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \eta_e = 0{,}51.$$

Randamentul sistemului întreg este:

$$\eta_{\text{sistem}} = \eta_C \cdot \eta_1 \cdot \eta_{\text{linie}} \cdot \eta_2 = 45{,}12\%.$$

3.2.192. 1°. Pentru ca coarda să vibreze cu amplitudine maximă trebuie ca frecvența forței excitatoare să fie egală cu frecvența proprie a coardei:

— **pentru** fundamentală: $\lambda_0 = 2l = \dfrac{u}{\nu_0} = \sqrt{\dfrac{F}{m/l}} \cdot \dfrac{1}{\nu_0} \Rightarrow F_1 = 63$ N.

2°. $F_3 = \dfrac{F_1}{9}$ și $F_5 = \dfrac{F_1}{25}$.

3.2.193. $C = 8 \cdot 10^{-6}$ F; **defazajul între curent și tensiune este:** $\varphi = 0{,}93$ radiani și **pentru o tensiune alternativă** $u = 120\sqrt{2}\sin 314\,t$ **volți corespunde în circuit, un curent:** $i = 0{,}34 \sin (314\,t + 0{,}93)$ **amperi.**

8.2.194. 2°. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radiani; 4°. $R_a = 100\ \Omega$; $L = 0{,}55$ H.

8.2.195. $\nu_0 = 1{,}35 \cdot 10^6$ Hz.

8.2.196. 1°. Asupra discului acționează cuplul datorat greutății corpului și respectiv, forței electromagnetice; echilibrul momentelor este: $mga = B \cdot i_0 \cdot a : \frac{a}{2}$; rezultă $i_0 =$

$= 2\frac{mg}{Ba}$ 10 A și $R = \frac{E}{i_0} = 1\ \Omega$.

2°. Mișcarea fiind uniformă, momentul forței $F_g = mg$ rămîne neschimbat și în consecință, pentru echilibru, și momentul forței electromagnetice rămîne constant, dar apărînd tensiunea contraelectromotoare indusă, datorată rotirii discului în cîmp, pentru ca curentul să rămînă $i_0 = 10$ A trebuie micșorată rezistența circuitului cu ΔR, astfel ca:

$$\Delta E = E - B\frac{a}{2}v = \Delta R \cdot i_0, \text{ rezultă } \Delta R = 4 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

8.2.197. 1°. Prin înaintarea cadrului în cîmp, se induce în cadru o t.e.m. și respectiv, un curent i și deci o forță electromagnetică. Considerînd viteza de coborîre constantă:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \text{ și } i = \frac{Blv}{R} \text{ și } F_{em} = Bil = B \cdot \frac{Blv}{R} \cdot l = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

2°. $mg = B \cdot l\frac{Blv}{R}$ rezultă: $v = 0{,}1\ \text{ms}^{-1}$.

8.2.198. a) $x = \frac{mv_0 \sin\alpha}{eB} \cdot \sin\left(\frac{e}{m}Bt\right)$;

$$y = \frac{mv_0 \sin\alpha}{eB}\left[1 - \cos\left(\frac{e}{m}Bt\right)\right],$$

$$z = v_0 t \cos\alpha.$$

b) 1°. $y = 0$; $z = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots,)$;

2°. $y = \frac{2mv\sin\alpha}{eB}$; $z = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}\left(k + \frac{1}{2}\right)(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

8.2.199. $U_L = \frac{U\omega L}{R} = 1\,000$ V; $I = \frac{U}{R} = 10$ A (condiția de rezonanță).

8.2.200. $I_{bec} = \frac{P_{bec}}{U_{bec}} = \frac{10}{12}$ A; intensitatea ce trebuie să debiteze generatorul este $I = 120 \cdot I_{bec} = 100$ A; t.e.m. indusă în înfășurarea rotorului trebuie să fie: $E = U_{bec} + RI = 130$ V.

Creșterea procentuală a turației este: $\frac{\Delta n}{n_N} = \frac{E - U_0}{U_0} = \frac{1}{12} = 8{,}33\%$.

8.2.201. $E = U + R_r I_r = 123$ V; $R_e = U/i = 57{,}5\ \Omega$.

8.2.202. $U = 230$ V; $E = 241{,}5$ V; $P = 23$ kW.

8.2.203. $U = 220$ V.

3.2.204. a) $U_e = E - (I + i)R_r = 116$ V; $r_e = U_e/i = 105{,}5\ \Omega$.

b) $U = U_e - IR_S = 115$ V.

3.2.205. Curentul în sarcină nominală are valoarea

$$I_n = \frac{P}{\eta U} = 38{,}8\ \text{A}, \quad \text{iar} \quad I_{(3/4)} = \frac{3}{4} I_n = 29{,}1\ \text{A}.$$

$$E_n = U - R_r I_{rn} = 209\ \text{V}; \quad E_{(3/4)} = U - R_r I_{r(3/4)} = 211{,}7\ \text{V}.$$

Deoarece: $E_n = \frac{p}{a} \cdot \frac{n_n}{60} \cdot N_c \Phi$; $E_{(3/4)} = \frac{p}{a} \frac{n_{3/4}}{60} N_c \Phi$ și rezultă $n_{(3/4)} = n_n \frac{E_{(3/4)}}{E_n} =$

$= 1\,000 \frac{211{,}7}{209} = 1013$ rotații pe minut.

$n_{(2/4)} = \ldots = 1\,027$ rot/min; $n_{(1/4)} = 1\,040$ rot/min.

Pentru mersul în gol, $I_0 \cong 0$, $E_0 = u = 220$ V; $n_0 = n_n \frac{E_0}{E_n} = 1\,053$ rot/min.

$\Delta n = \frac{n_0 - n_n}{n_0} = 5{,}03\%$ este variația maximă a vitezei de rotație, de la mersul în gol la sarcina nominală.

3.2.206. Se va raționa ca la problema 3.2.205, ținînd seama însă că între tensiunea nominală E_n și t.e.m. E corespunzătoare unei turații oarecare n, există relația:

$$\frac{E_n}{E} = \frac{n_n}{n} \cdot \frac{\Phi_n}{\Phi} = \frac{n_n}{n} \cdot \frac{I_n}{I}, \text{ deci } n = n_n \cdot \frac{E}{E_n} \cdot \frac{I_n}{I}.$$

Se găsește $n_{(3/4)} = 1\,351$ rot/minut;

$n_{(2/4)} = 2\,054$ rot/minut; $n_{(1/4)} = 4\,160$ rot/minut; $n_0 = \infty$ (motorul se ambalează în cazul unor sarcini reduse).

3.2.207. $I_n = 74{,}9$ A; $E_n = 98$ V; $M = 55{,}75$ Nm; $P_m + P_J = 340$ W.

3.2.208. $\frac{U}{N} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ V/spiră; $N_p = 10\,000 \cdot \frac{3}{10} = 3\,000$ spire în primar;

$N_S = 220 \cdot \frac{3}{10} = 66$ spire în secundar.

3.2.209. a) Pentru $\cos \varphi = 0{,}8$: $R = 25\ \Omega$; $U_0 = 700$ V.

b) Pentru $\cos \varphi = 1$: $R = 59\ \Omega$; $U_0 = 750$ V.

3.2.210. a) $\omega_0 = 500$ rad/s; $P_m = 97$ W; $\varphi = 0$.

b) $\omega_1 = 310$ rad/s; $\varphi_1 = -\pi/4$ și $\omega_2 = 810$ rad/s; $\varphi_2 = \pi/4$.

c) $\omega_3 = 354$ rad/s.

3.2.211. a) Din $U = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ rezultă:

$$L = \sqrt{\frac{U^2 - I^2R^2}{I^2\omega^2}} = 3{,}488\ \text{H}.$$

b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} = 10{,}95$, $\varphi = 85°15'$.

c) Pentru diminuarea pierderilor în gol trebuie ca defazajul să tindă spre $\pi/2$, adică să se micșoreze rezistența R și respectiv, să crească inductanța L pentru o frecvență dată.

8.2.212. a) $I = 1{,}1$ A;

b) circuitul oscilant se intercalează între rotor și colector și trebuie să aibă condensatorul cu $C = 10^{-2}$ F.

8.2.213. a) $L_1 = 10^{-6}$ H; b) $d = 3{,}14$ mm; c) $\nu_1 = 3 \cdot 10^7$ Hz; $\nu_2 = 15 \cdot 10^6$ Hz.

8.2.214. 1°. Din $T = 2\pi\sqrt{LC}$ rezultă:

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L^2} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ F}.$$

2° Există 10 condensatoare plane asociate în paralel, capacitatea fiind: $C = 10\,C_1 = 10 \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, $\Rightarrow S = 1{,}13$ cm².

3° $l = \frac{1}{4} \cdot \lambda = \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{\nu} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 15$ m.

8.2.215. Cele două emițătoare emit în spațiu unde electromagnetice de aceeași frecvență $\nu = 5 \cdot 10^6$ Hz și în fază; undele interferă și vor forma maxime și minime de intensitate ale cîmpului electric $\vec{E}$ și respectiv, ale cîmpului magnetic $\vec{B}$, distanța între ele (două maxime, succesive) fiind $d = \lambda/2 = 30$ m.

a) Receptorul, în care energia electromagnetică se transformă în energie mecanică de vibrație a membranei difuzorului, va înregistra maxime de intensitate sonoră și respectiv, minime (practic zero) la intervale spațiale de 30 m pe segmentul de dreaptă AB, punctul O de la jumătatea distanței AB fiind un maxim.

b) Pe dreapta AB, în afara segmentului AB, receptorul va înregistra un sunet de intensitate constantă în orice punct; în punctul B, undele provenind de la emițătorul din A interferă cu cele ale emițătorului din B, avînd o diferență de fază $\varphi = 2\pi \frac{AB}{\lambda} = \frac{100}{3}\pi = 32\pi + \frac{4\pi}{3}$; deci, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, ceea ce corespunde pentru amplitudinea rezultantă, $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\frac{4\pi}{3}$; sau în condițiile: $a_1 = a_2 = a$, $A = a$. Deci, în afara segmentului, efectul este același ca în cazul existenței unui singur emițător.

4. OPTICĂ

4.0. BREVIAR

Optica este ramura fizicii care studiază natura luminii, producerea, propagarea și interacțiunea acesteia cu substanța, precum și măsurarea mărimilor corespunzătoare.

Optica cuprinde capitolele: Optica geometrică — studiază propagarea luminii pe baza noțiunii de rază de lumină; Optica fizică — studiază fenomenele luminoase, fie sub aspectul ondulatoriu al luminii (optica ondulatorie), fie sub cel corpuscular (optica fotonică) și Fotometria care studiază mărimile caracteristice radiațiilor luminoase, precum și măsurarea acestora.

4.0.1. Legile de bază ale opticii geometrice

a) **Legea propagării rectilinii a luminii:** *într-un mediu transparent și omogen, lumina se propagă în linie dreaptă.*

b) **Legea independenței fasciculelor de lumină:** *mai multe fascicule de lumină care se intersectează își continuă drumul fără să se influențeze reciproc.*

c) **Legea reversibilității razelor de lumină:** *traiectul unei raze de lumină nu se modifică atunci cînd se inversează sensul de propagare.*

d) **Legile reflexiei.** Prin *reflexie* se înțelege fenomenul de întoarcere (parțială) a unei raze de lumină în mediul din care a venit, atunci cînd întîlnește suprafața de separație a două medii diferite. Raza reflectată urmează legile reflexiei:

1°. *Raza reflectată se află în planul de incidență definit de raza incidentă și normala la suprafața reflectătoare, dusă în punctul de incidență* (planul ℗ din figura 4.1.).

2°. *Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență:*

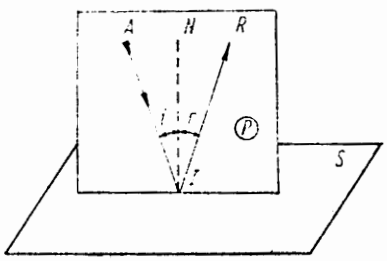


Fig. 4.1.

$$r = i. \qquad (4.1)$$

e) **Legile refracției.** Prin *refracție* se înțelege fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei raze de lumină la traversarea suprafeței de separație dintre două medii transparente diferite.

1°. *Raza refractată (transmisă în mediul al doilea) este conținută în planul de incidență.*

2°. *Pentru două medii transparente date, raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este constant:*

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{n_2}{n_1}. \tag{4.2}$$

Constanta n se numește *indice de refracție* al mediului al doilea în raport cu primul.

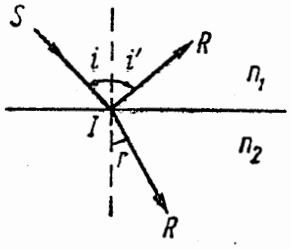


Fig. 4.2.

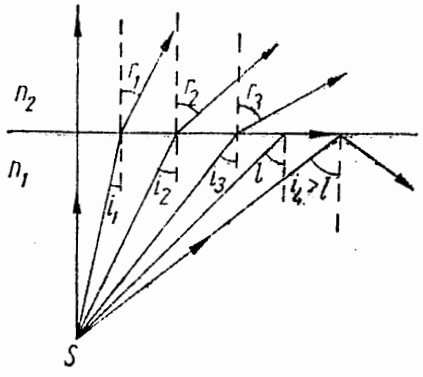


Fig. 4.3.

Relația (4.2) se poate scrie sub forma:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \tag{4.3}$$

sau

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}, \tag{4.4}$$

unde c_1 și c_2 reprezintă viteza de propagare a luminii în primul și respectiv, al doilea mediu.

— **Reflexia totală.** Dacă lumina trece dintr-un mediu în altul mai refringent ($n_2 > n_1$), oricărei raze incidente îi corespunde o rază refractată, mai apropiată de normală ($r < i$). În caz contrar ($n_2 < n_1$), raza refractată se depărtează de normală ($r > i$), existînd un unghi de incidență limită $i = l$, pentru care raza refractată este conținută în suprafața de separație ($r = \pi/2$); din legile refracției rezultă:

$$\sin l = \frac{n_2}{n_1} \text{ și dacă } n_2 = 1 \rightarrow \sin l = \frac{1}{n_1}. \tag{4.5}$$

Pentru unghiuri de incidență mai mari decît unghiul limită ($i > l$), nu mai are loc refracție, raza se reflectă integral; se produce fenomenul de *reflexie totală* (fig. 4.3).

— **Drum optic.** Produsul dintre drumul geometric (l) străbătut de o rază de lumină printr-un mediu transparent și indicele de refracție (n) al acestuia poartă numele de *drum optic* (L):

$$L = nl. \tag{4.6}$$

— **Principiul lui Fermat:** *parcursul real al unei raze de lumină între două puncte este acela de-a lungul căruia drumul optic are o valoare minimă, maximă sau staționară, sau altfel spus, timpul necesar parcurgerii traiectului este minim, maxim sau staționar.*

— **Lama cu fețe plan-paralele** este un mediu transparent de grosime e și indice de refracție n, limitat de două plane paralele. În general, considerăm lama aflată în aer.

Raza emergentă $I'E$ (fig. 4.4) este paralelă cu direcția razei incidente SI și deviată lateral față de aceasta cu:

$$IH = \Delta = e\frac{\sin(i-r)}{\cos r}. \tag{4.7}$$

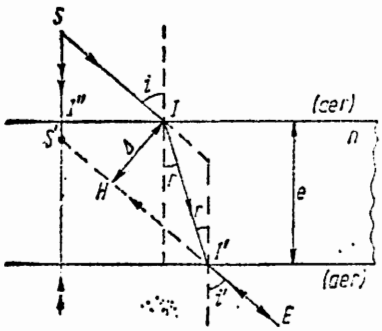


Fig. 4.4.

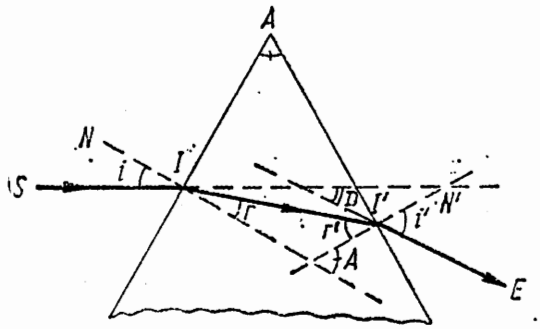


Fig. 4.5.

Un obiect observat prin intermediul unei lame, după o direcție normală pe aceasta, dă o imagine deplasată în sensul de înaintare a luminii (apropiată de observator) cu distanța:

$$SS' = h = e\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{4.8}$$

— **Prisma optică** este un mediu transparent limitat de doi dioptri plani care formează între ei un unghi diedru (A) numit *unghi de refringență*.

O rază de lumină monocromatică, care traversează o secțiune principală a prismei urmează traiectul indicat în figura 4.5, traiect care satisface relațiile:

$$\sin i = n \sin r; \quad \sin i' = n \sin r'; \quad r + r' = A. \tag{4.9}$$

Raza emergentă $I'E$ este deviată de la direcția razei incidente SI, făcînd cu aceasta un unghi D, dat de expresia:

$$D = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r') = i + i' - A. \tag{4.10}$$

Deviația D a razei emergente trece printr-un minim atunci cînd unghiul de emergență este egal cu unghiul de incidență ($i' = i$), rezultînd:

$$D_m = 2i_m - A; \quad \text{sau} \quad i_m = \frac{D_m + A}{2}. \tag{4.11}$$

Folosind legea refracției $\left(\frac{\sin i}{\sin r} = n\right)$, se obține:

$$n = \frac{\sin\frac{A + D_m}{2}}{\sin\frac{A}{2}}. \tag{4.12}$$

Cu ajutorul relației (4.12) se poate determina indicele de refracție al prismei cînd se cunosc A și D_m.

— **Oglinzile** sînt piese optice avînd suprafețele puternic reflectătoare. După forma suprafeței, oglinzile se împart în plane și curbe, acestea din urmă putînd fi: sferice, parabolice, eliptice sau cilindrice.

Oglinda plană dă pentru un obiect o imagine simetrică cu obiectul în raport cu planul oglinzii; imaginea este virtuală dacă obiectul este real și este reală dacă obiectul este virtual.

Oglinda sferică este constituită dintr-o calotă sferică care reflectă razele de lumină și este:

1° *oglindă concavă*, dacă suprafața reflectătoare este cea interioară (dinspre centrul sferei din care face parte calota);

2° *oglindă convexă*, dacă suprafața reflectătoare este cea exterioară.

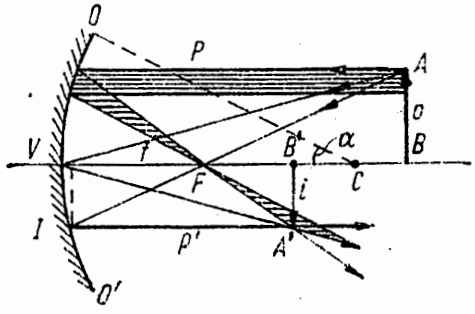


Fig. 4.6.

Elementele unei oglinzi sferice, reprezentate în figura 4.6, sînt:

— centrul de curbură C este centrul sferei din care face parte calota;

— vîrful sau polul V al calotei;

— axa principală este dreapta care trece prin centrul de curbură și vîrful oglinzii (CV);

— axele secundare sînt toate dreptele care trec printr-un punct oarecare al oglinzii și prin centrul oglinzii;

— intersecția unui plan (plan meridian), ce trece prin axa principală, cu oglinda este un arc de cerc (OO'). Unghiul la centru corespunzător acestui arc se numește *deschiderea oglinzii* (2α);

— *Focarul oglinzii.* Dacă pe o oglindă sferică de deschidere mică cade un fascicul de raze paralele, după reflexie, toate razele sînt concentrate într-un punct F, numit *focar imagine* și aflat la o distanță $VF = f = \frac{R}{2}$, aceasta fiind distanța focală a oglinzii. Punctul F din figura 4.6 reprezintă focarul principal.

La oglinzile concave, distanța focală f se consideră pozitivă, iar la oglinzile convexe negativă.

Din figura 4.6 cu notațiile respective și în condițiile unor deschideri mici — și deci a unor fascicule înguste — rezultă relația

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \tag{4.13}$$

Aceasta reprezintă *formula oglinzilor concave*, în care se ia ca origine vîrful V al oglinzii și se ține seama de convenția că: în cazul unui obiect, al unei imagini sau al unui focar virtual, mărimea corespunzătoare p, p' sau f se consideră negativă.

Raportul
$$\gamma = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}, \tag{4.14}$$

reprezintă *mărirea.*

— **Lentile sferice subțiri.** *O lentilă* este un mediu transparent limitat de două calote sferice, sau de o calotă sferică și un plan. Ne vom referi la

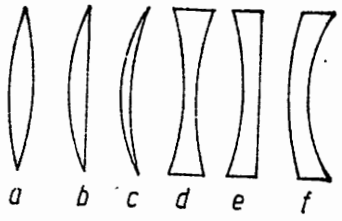


Fig. 4.7.

lentile din materiale mai refringente decît aerul (sticlă, cuarț etc.).

În figura 4.7 sînt reprezentate diferitele forme de lentile folosite în optică.

Spunem despre o lentilă că este *subțire* cînd grosimea sa (măsurată pe axul optic principal) este foarte mică în comparație cu razele de curbură ale calotelor.

Vom considera lentilele de grosime neglijabilă și le vom reprezenta schematic ca în figura 4.8 (lentile subțiri la margini și respectiv groase la margine).

Lentilele subțiri la margine (fig. 4.7 *a*, *b* și *c*) sînt *convergente*; ele transformă un fascicul incident paralel într-un fascicul emergent convergent.

Lentilele *divergente* (groase la margine — fig. 4.7 *d*, *e*, *f*) transformă fasciculul incident paralel într-un fascicul emergent divergent.

Centrul optic este punctul situat pe axa optică, care se bucură de proprietatea că orice rază de lumină care trece prin el nu este deviată; orice dreaptă ce trece prin centrul optic se numește *axă secundară*.

O lentilă nu dă o imagine clară decît dacă razele folosite pentru obținerea imaginei sînt puțin înclinate față de axul principal și străbat lentila în vecinătatea centrului său optic.

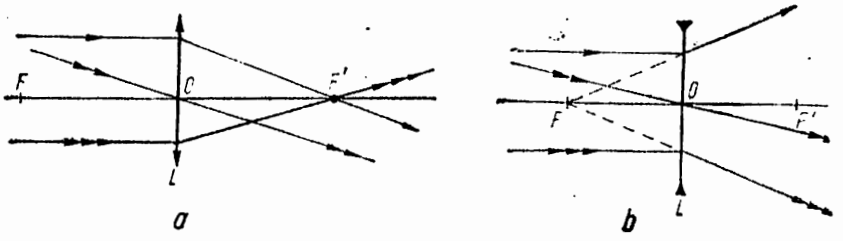


Fig. 4.8.

— Lentilele subțiri convergente au două focare principale reale, simetrice în raport cu centrul optic (*F* și *F'* în figura 4.8) aflate la distanța *f* de acesta; *f* este distanța focală a lentilei.

Construcția geometrică a imaginii date de o lentilă subțire convergentă folosește proprietățile focarelor și centrului optic (fig. 4.9).

— Formulele lentilelor subțiri leagă mărimile *p* și *p'* (distanța obiectului, respectiv imaginii de centrul optic al lentilei) și *f* (distanța focală):

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \quad \text{și} \quad \gamma=-\frac{p'}{p}. \tag{4.15}$$

Convenția asupra semnelor este următoarea: *p*, *p'* și *f*

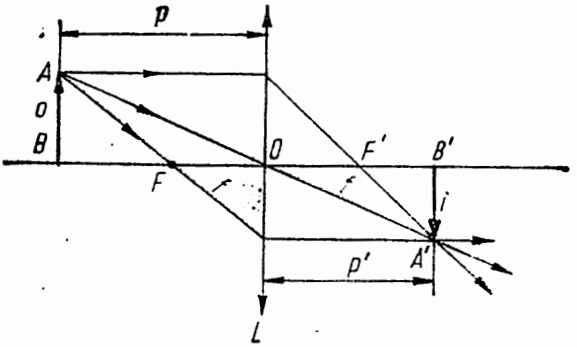


Fig. 4.9.

sînt pozitive sau negative, după cum obiectul, imaginea și focarul sînt reale, respectiv virtuale.

Mărirea (γ) este pozitivă cînd imaginea este dreaptă și negativă cînd aceasta este răsturnată.

Convergența C a unei lentile subțiri este o mărime egală cu inversul distanței sale focale măsurate în metri: convergența se exprimă în dioptrii și este pozitivă sau negativă, după cum lentila este convergentă sau divergentă.

Convergența unei lentile subțiri se poate calcula în funcție de razele de curbură R și R' ale calotelor lentilei și indicele de refracție relativ (n) al lentilei față de cel al mediului în care se află, cu relația:

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \qquad (4.16)$$

Razele de curbură R și R' se consideră pozitive sau negative, după cum fața corespunzătoare este convexă sau concavă. Un sistem de lentile subțiri alipite este echivalent cu o singură lentilă a cărei convergență este egală cu suma algebrică a convergențelor lentilelor care formează sistemul.

Poziția, natura, sensul și mărimea imaginii pentru diversele poziții ale obiectului, în cazul lentilelor subțiri convergente sînt rezumate în tabelul (4.1) pentru lentilele convergente, valabil și pentru oglinzile concave și respectiv, în tabelul (4.2) pentru lentilele divergente, valabil și pentru oglinzile convexe.

Tabelul 4.1.

Lentile convergente și oglinzi concave

	Obiect	Imagine			
	Poziția (p)	Poziția (p')	Natura	Sensul	Mărimea $\left(i = o \cdot \frac{p'}{p}\right)$
Obiect real	$p = +\infty$	$p' = f$	reală	răsturnată	zero
	$2f < p < +\infty$	$f < p' < 2f$	reală	răsturnată	mai mică decît obiectul
	$p = 2f$	$p' = 2f$	reală	răsturnată	egală cu obiectul
	$f < p < 2f$	$p' > 2f$	reală	răsturnată	mai mare ca obiectul
	$p = f$	$p' = \pm\infty$	reală virtuală	răsturnată dreaptă	discontinuitate
	$0 < p < f$	$p' < 0$ de aceeași parte cu obiectul	virtuală	dreaptă	mai mare ca obiectul
	$p = 0$	$p' = 0$	reală	dreaptă	egală cu obiectul
Obiect virtual	$-\infty < p < 0$	între lentilă și planul focal	reală	dreaptă	mai mică decît obiectul
	$p = -\infty$	$p' = f$	reală	dreaptă	zero

Tabelul 4.2.

Lentile divergente și oglinzi convexe

	Obiect	Imagine			
	Poziția (p)	Poziția (p')	Natura	Sensul	Mărimea $\left(i = o \cdot \frac{p'}{p}\right)$
Obiect real	$p = +\infty$	$p' = -f$	virtuală	dreaptă	zero
	$0 < p < \infty$	$-f < p' < 0$	virtuală	dreaptă	mai mică decît obiectul
	$p = 0$	$p' = 0$	reală	dreaptă	egală cu obiectul
Obiect virtual	$-f < p < 0$	$p' > 0$	reală	dreaptă	mai mare decît obiectul
	$p = -f$	$p' = \pm\infty$	reală virtuală	dreaptă răsturnată	discontinuitate
	$-2f < p < -f$	$-2f < p'$	virtuală	răsturnată	mai mare decît obiectul
	$p = -2f$	$p' = -2f$	virtuală	răsturnată	egală cu obiectul
	$-\infty < p < -2f$	$-2f < p' < -f$	virtuală	răsturnată	mai mică decît obiectul
	$p = -\infty$	$p' = f$	virtuală	răsturnată	zero

— **Instrumentele optice** sînt dispozitive constituite din lentile, oglinzi, prisme etc. Ele se pot clasifica în: instrumente cu imagine reală (obiective) și instrumente cu imagine virtuală (oculare).

— **Lupa** este o lentilă convergentă de mică distanță focală (în general, între 2 cm și 10 cm). Obiectul se așază între lupă și planul său focal și se obține o imagine virtuală, dreaptă și mai mare decît obiectul.

O lupă se caracterizează prin *puterea optică*:

$$P = \frac{\operatorname{tg} u'}{l} \cong \frac{u'}{l}, \tag{4.17}$$

unde u' este unghiul sub care se vede prin lupă imaginea și l este lungimea obiectului.

Dacă punerea la punct este realizată pentru infinit sau dacă ochiul se află în focarul-imagine, puterea lupei este egală cu convergența sa $\left(P = \frac{1}{f};\right.$ putere intrinsecă$\left.\right)$.

— **Ochiul** este un sistem centrat. Partea principală o constituie cristalinul care din punct de vedere optic este o lentilă convergentă cu distanța focală variabilă și care dă imagini reale pe retină.

În repaus, ochiul normal are planul focal-imagine pe retină.

Acomodarea constă în creșterea convergenței ochiului: cînd aceasta este maximă, se spune că obiectul se află la *punctum proximum* (sau la distanța minimă de vedere clară δ).

Ochiul normal se acomodează cel mai ușor pentru obiectele situate pe axa cristalinului la 25 cm în fața ochiului (distanța optimă de vedere clară).

Ochiul miop are convergența mărită și nu poate distinge clar obiectele situate mai departe de un punct aflat pe axa sa optică, numit *punctum remotum*, această fiind distanța maximă (Δ) de vedere clară. Pentru a vedea clar obiecte situate la distanțe mai mari ca Δ, ochiul miop se corectează cu lentile divergente.

Ochiul hipermetrop are convergența scăzută; punctum proximum este îndepărtat în raport cu ochiul normal, iar punctum remotum apropiat și virtual (în spatele ochiului).

Ochiul prezbit a pierdut aproape complet capacitatea de acomodare, distanța optimă de vedere clară se depărtează; corectarea se face cu lentile convergente.

Mărimea $K = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta}$, unde δ și Δ reprezintă distanța minimă și respectiv maximă de vedere clară a ochiului poartă numele de *acomodare*; în cazul ochiului normal, $K = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{\infty} = 4$ dioptrii, aceasta putînd să scadă la zero.

— **Microscopul,** instrument pentru observarea obiectelor foarte mici, are ca părți principale: a) un *obiectiv* constituit dintr-un sistem de lentile alipite care se comportă ca o lentilă subțire foarte convergentă și corectată și b) un *ocular*, de asemenea un sistem de lentile care joacă rol de lupă pentru examinarea imaginii mult mărită a obiectului, dată de obiectiv (fig. 4.10).

Puterea microscopului este definită prin produsul dintre mărirea liniară m_{ob} a obiectivului și puterea P_{oc} a ocularului:

$$P = m_{ob} \cdot P_{oc} = \frac{D}{f_{ob} \cdot f_{oc}}, \qquad (4.18)$$

unde $D = F'_{ob}F_{oc}$, distanța dintre planul focal-imagine al obiectivului și planul focal-obiect al ocularului poartă numele de *lungimea optică* a microscopului și are în general, valoarea de 16 cm; f_{ob} și f_{oc} sînt distanțele focale ale obiectivului, respectiv ocularului.

Grosismentul microscopului este definit prin:

$$G = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}, \qquad (4.19)$$

unde u' și u sînt unghiurile sub care se vede imaginea finală a obiectului și respectiv, obiectul cu ochiul liber.

Dacă atît obiectul de studiat, cît și imaginea sa finală se află la distanța optimă de vedere distinctă ($d = 0.25$ m) se poate defini *grosismentul convențional* al microscopului:

$$G_c = \frac{D \cdot d}{f_{ob} \cdot f_{oc}}. \qquad (4.20)$$

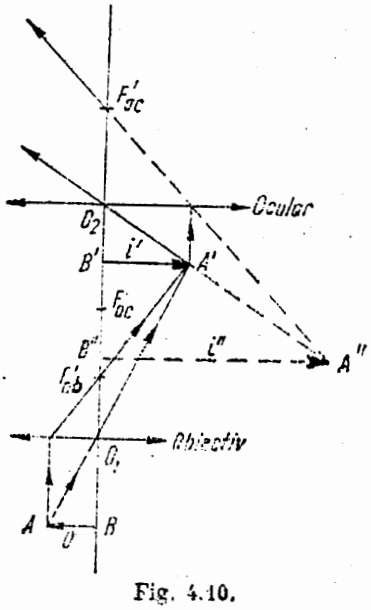


Fig. 4.10.

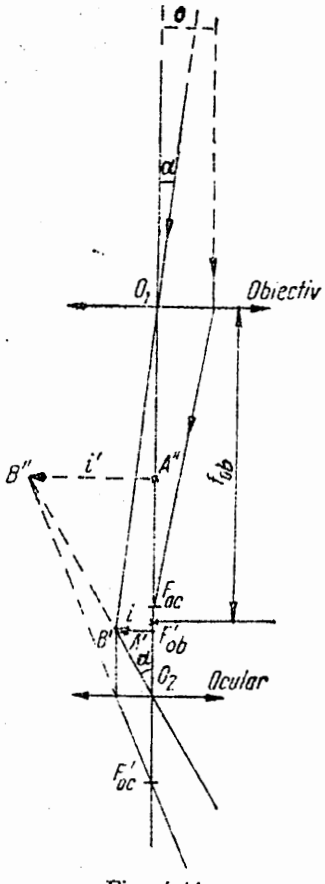


Fig. 4.11.

Distanța minimă dintre două puncte care pot fi văzute distinct prin microscop este dată de:

$$S = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{2n \sin \alpha}, \qquad (4.21)$$

unde λ este lungimea de undă a radiației folosită în observare, n indicele de refracție al mediului străbătut de radiație între obiect și obiectiv, iar α, unghiul dintre axa optică și razele cele mai depărtate de axă care mai pătrund în obiectiv.

— **Luneta astronomică** este constituită din două sisteme de lentile convergente, unul obiectiv și celălalt ocular, montate la extremitățile unui tub lung. Obiectivul are o distanță focală mare și formează o imagine reală și micșorată a obiectului. Ocularul se comportă ca o lupă și formează o imagine virtuală mărită, folosind ca obiect imaginea reală dată de obiectiv (fig. 4.11).

4.0.2. Mărimi fotometrice

Radiațiile luminoase transportă energie luminoasă care poate fi detectată și măsurată cu diferite dispozitive. Ochiul constituie un receptor pentru energia radiantă, însă în mod selectiv și numai pentru radiațiile vizibile, cu lungimi de undă cuprinse între aproximativ $4 \cdot 10^{-7}$ m și $8 \cdot 10^{-7}$ m, prezentînd un maximum de sensibilitate pentru radiația cu lungimea de undă de $5{,}5 \cdot 10^{-7}$ m.

Din această cauză, în fotometrie se folosesc sisteme diferite de unități, după cum radiația este studiată global sau numai prin efectul pe care îl are asupra ochiului.

Dacă vom considera o sursă luminoasă punctiformă conținută într-un mediu transparent neabsorbant, aceasta va emite energie radiantă în toate direcțiile, sub formă de raze divergente. Vom considera un fascicul de raze conținut într-un con cu vîrful în sursă. Energia radiantă W_e transportată în unitatea de timp de fasciculul respectiv constituie *fluxul de radiație* (fluxul energetic) pentru oricare secțiune a conului considerat:

$$\Phi_e = \frac{dW_e}{dt} \quad \text{(cu unitatea watt).} \qquad (4.22)$$

Dacă luăm în considerare numai energia W_v transportată de radiațiile vizibile din interiorul conului, atunci definim *fluxul luminos*

$$\Phi_v = \frac{dW_v}{dt} \quad \text{(cu unitatea lumen).} \qquad (4.23)$$

Dacă fluxul de radiație $d\Phi_e$ cade pe o suprafață cu aria dS, perpendiculară pe direcția fasciculului, raportul

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dS} \quad \text{(cu unitatea watt pe metru pătrat),} \qquad (4.24)$$

se numește *iluminare energetică* a suprafeței, iar dacă ținem seama numai de efectul vizual al radiațiilor, definim *iluminarea*

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{dS} \text{ (cu unitatea lux).} \tag{4.25}$$

Phot-ul este un multiplu al lux-ului: **1 phot = 10^4 lux.**

Intensitatea energetică a unei surse punctiforme de radiații se definește prin fluxul energetic emis de sursă în unitatea de unghi spațial

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} \text{ (cu unitatea watt pe steradian).} \tag{4.26}$$

Intensitatea luminoasă se definește în același mod în funcție de Φ_v

$$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega} \text{ (cu unitatea candela).} \tag{4.27}$$

Candela este unitate fundamentală în *SI* și este: intensitatea luminoasă, în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria de 1/600 000 mp, a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei, la presiunea de 101 325 N/m^2.

4.0.3. Optica ondulatorie

— **Interferența** luminii reprezintă ansamblul de fenomene ce apar la suprapunerea a două sau mai multe unde luminoase.

Vom considera cazul special al interferenței staționare, obținută prin suprapunerea undelor provenite de la două surse monocromatice și coerente S_1 și S_2 într-un punct M de pe ecranul E aflat la distanța D de cele două surse (fig. 4.12).

Folosind notațiile din figura 4.12 și considerînd $a \ll D$ putem exprima diferența $d_2 - d_1$ dintre drumurile parcurse de undele provenite de la cele două surse pînă în punctul de interferență M, după cum urmează:

din triunghiul dreptunghic S_1A_1M: $d_1^2 = D^2 + \overline{MA}_1^{+2} = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$;

din triunghiul dreptunghic: S_2A_2M: $d_2^2 = D^2 + \overline{MA}_2^{+2} = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$;

de unde, prin scădere: $d_2^2 - d_1^2 = 2ax$

sau $d_2 - d_1 = \frac{2ax}{d_2 + d_1}$ și punînd $d_2 + d_1 \cong 2D$,

rezultă: $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$.

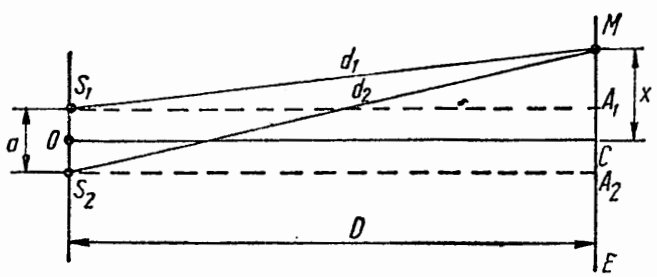


Fig. 4.12.

Franjele luminoase (maximele) vor ocupa pozițiile pentru care

$$d_2 - d_1 = \frac{ax}{D} = k \cdot \lambda \quad \text{sau} \quad x = k\lambda \cdot \frac{D}{a} \tag{4.28}$$

și dînd lui k valoarea zero și valorile: 1, 2, 3, ... se obține: $x_0 = 0$ (franja centrală); $x_1 = \frac{\lambda \cdot D}{a}$ (franja luminoasă de ordinul 1); $x_2 = 2\frac{\lambda \cdot D}{a}$ (franja luminoasă de ordinul 2); etc.

Franjele întunecoase (minimele) ocupă pozițiile definite de:

$$d_2 - d_1 = \frac{ax}{D} = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{sau} \quad x = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{D}{a} \tag{4.29}$$

și dînd lui k' valorile: 1, 2, ... etc. se obțin franjele întunecate,

$$x_1 = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot a} \text{ (de ordinul 1)}; \quad x_2 = 3\frac{\lambda \cdot D}{2a} \text{ (de ordinul 2)}; \text{ etc.}$$

Franjele luminoase și franjele întunecate sînt echidistante. O franjă întunecată se află la mijlocul distanței dintre două franje luminoase.

Distanța dintre două franje luminoase (sau dintre două franje întunecate) consecutive este dată de *interfranja*

$$i = \frac{\lambda D}{a}. \tag{4.30}$$

Interfranja este proporțională cu λ și D și invers proporțională cu a.

Fenomenul este mai complex în cazul a două surse de lumină albă. Aceasta conține o infinitate de radiații într-o gamă continuă de lungimi de undă cuprinse între violet ($\lambda_v = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ m) și roșu ($\lambda_r = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ m).

Franja centrală ocupă aceeași poziție pentru toate radiațiile; ea este foarte strălucitoare. De o parte și alta a franjei centrale se pot observa două sau trei franje luminoase irizate (descompuse în spectru, cu violetul spre franja centrală). Mai departe, ochiul distinge o tentă uniformă, numită *alb de ordin superior*, deoarece este determinat de unde între care există diferența de drum de ordinul mai multor lungimi de undă (valori superioare ale ordinului k și k').

Deplasarea franjelor. Considerăm că în drumul unuia din fasciculele monocromatice și coerente (fasciculul *1* din figura 4.13) se află o lamă transparentă de grosime e și indice de refracție n. Prin traversarea lamei, fasciculul *1* capătă o diferență de drum

$$\Delta = e(n - 1) \text{ (dispozitivul se află în aer cu } n \cong 1)$$

și fasciculele *1* și *2* vor parcurge drumuri optice egale pînă într-un punct C', unde fiind în fază formează franja centrală luminoasă de ordinul zero. Folosind și notațiile din figura 4.12, deplasarea franjei centrale este dată de:

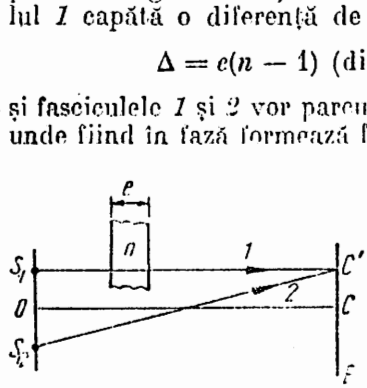


Fig. 4.13.

$$x = \frac{D}{a}(S_2C' - S_1C') = \frac{D}{a}e(n - 1).$$

Interfranja rămîne neschimbată:

$$i = \lambda \cdot \frac{D}{a}.$$

Traversarea unei lame transparente de grosime e și indice de refracție n de către unul din fasciculele care interferă determină deci în planul de observare o deplasare, în bloc, a sistemului de franje, egală cu: $x = e(n-1)\frac{D}{a}$.

4.1. PROBLEME CU REZOLVĂRI

4.1.1. Să se arate că printr-o deplasare a unei oglinzi plane, paralelă cu ea însăși, imaginea unui punct fix se deplasează în același sens cu oglinda și cu o distanță dublă.

4.1.2. Să se demonstreze că dacă o oglindă plană se rotește cu un unghi α în jurul unei axe oarecare, raza reflectată corespunzătoare unei incidențe oarecare se rotește în jurul aceleiași axe și în același sens cu un unghi dublu 2α.

4.1.3. O mică oglindă plană este fixată pe firul de care este suspendat cadrul unui galvanometru.

Un fascicul îngust de lumină incidentă trece prin diviziunea zero a unei rigle transparente LL', situată la distanța de 1 m de oglindă și paralelă cu aceasta. Fasciculul cade normal atît pe riglă cît și pe oglindă, aceasta avînd poziția O (fig. 4.14).

Cînd galvanometrul este parcurs de un curent electric de o anumită intensitate, oglinda se rotește cu un unghi $\alpha = 8°$ luînd poziția O'.

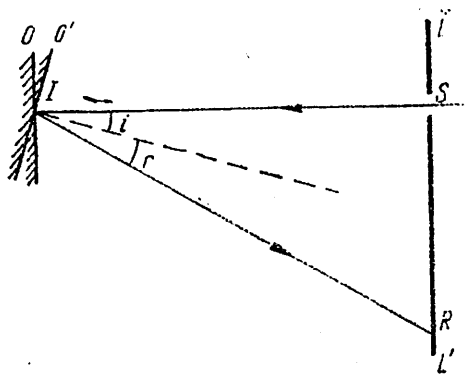


Fig. 4.14.

Să se calculeze deplasarea SR a spotului luminos pe rigla gradată.

4.1.4. O persoană înaltă de 1,75 m, avînd ochii la înălțimea de 1,60 m față de podeaua camerei în care se află, privește într-o oglindă plană și dreptunghiulară așezată vertical pe unul din pereții camerei. Care trebuie să fie înălțimea minimă a oglinzii și la ce distanță de podea trebuie să se afle latura ei inferioară, pentru ca observatorul să-și vadă în întregime imaginea sa dată de oglindă?

4.1.5. O sursă luminoasă punctiformă se află la $h = 50$ cm deasupra și pe normala în centrul unei oglinzi plane circulare de diametru $d = 10$ cm, așezată orizontal. Oglinda aflîndu-se la $H = 2$ m de plafon, să se calculeze diametrul cercului luminos produs de lumina reflectată de oglindă, pe plafon.

4.1.6. Să se determine direcția razei emergente provenite dintr-o rază incidentă în urma reflexiei succesive pe un ansamblu de două oglinzi plane care fac între ele un unghi diedru α, raza incidentă aflîndu-se într-un plan perpendicular pe muchia unghiului.

Aplicație: a) $\alpha = 45°$; b) $\alpha = 90°$.

4.1.7. Pe fundul unui bazin cu adîncimea de 50 cm și plin cu apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$ se află o monedă de dimensiuni mici. Un copil introduce un baston spre imaginea monedei, bastonul făcînd un unghi de 45° cu suprafața apei. La ce distanță de monedă atinge capătul bastonului fundul bazinului?

4.1.8. O sursă punctiformă de lumină se află pe fundul unui bazin adînc de 1 m și plin cu apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$. Sursa emite lumină în toate direcțiile și pe suprafața apei se observă un cerc luminos datorat razelor de lumină care prin refracție trec în aer.

Să se calculeze raza cercului luminos de pe suprafața apei.

4.1.9. 1°. Un fascicul îngust de lumină cade normal pe una din fețele-catetă ale unei prisme de sticlă cu secțiunea triunghi dreptunghi isoscel și se reflectă integral în interiorul prismei pe fața — ipotenuză. Ce se poate spune despre indicele de refracție al sticlei?

2°. Ce se întîmplă dacă prisma este introdusă într-o cuvă cu apă ($n_a = 4/3$)?

4.1.10. O rază de lumină cade sub un unghi de incidență i pe o lamă transparentă cu fețe plane și paralele de grosime e și indice de refracție n.

Să se calculeze deplasarea laterală a razei care iese din lamă.

Aplicație numerică, $i = 60°$; $e = 5$ cm; $n = 1{,}5$.

4.1.11. Să se arate că dacă o rază de lumină traversează mai multe medii cu indici de refracție diferiți, separate prin fețe plano-paralele, direcția razei emergente depinde numai de direcția razei incidente și de indicii de refracție ai primului și ultimului mediu.

4.1.12. Pe platina unui microscop se așază o lamă de sticlă transparentă L_1, pe fața superioară a acesteia existînd o trăsătură fină. Peste aceasta se așază o a doua lamă L_2, transparentă, subțire și cu fețe plane și paralele, pe fața superioară a ei existînd de asemenea o trăsătură fină. Microscopul fiind vertical se vizează succesiv, prin punerea la punct a acestuia, mai întîi imaginea trăsăturii de pe lama L_2, apoi aceea a trăsăturii de pe lama L_1 și în fine, imaginea trăsăturii de pe lama L_1 după înlăturarea lamei L_2. Deplasările succesive pe verticală ale tubului microscopului sînt: 2,13 mm și respectiv, 1,09 mm.

Să se determine indicele de refracție n al lamei L_2.

4.1.13. O rază de lumină intră normal pe fața AB a unei prisme cu secțiunea triunghi dreptunghi (fig. 4.15) și indice de refracție $n = 1{,}5$. Raza de lumină cade pe fața ipotenuză în punctul I unde pe fața exterioară a prismei se află o picătură de lichid de indice de refracție n'.

Care este valoarea maximă pe care o poate avea n' pentru ca raza de lumină să se reflecte total în I?

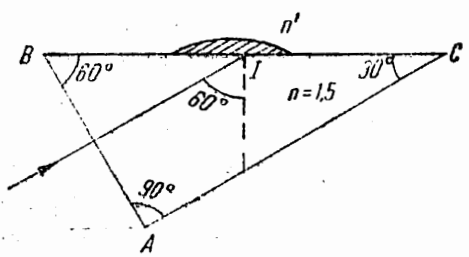


Fig. 4.15.

4.1.14. Să se stabilească între ce limite poate să varieze unghiul de intrare (incidență) al unei raze de lumină într-o prismă optică de unghi A și indice n, pentru ca raza să se refracte pe cele două fețe ale prismei și apoi să iasă din aceasta (condiția de emergență).

Aplicație numerică: $A = 60°$, $n = 1{,}5$.

4.1.15. Să se stabilească condițiile deviației minime a razei de lumină emergente la trecerea ei printr-o prismă optică.

4.1.16. O rază de lumină monocromatică traversează secțiunea principală a unei prisme optice de unghi A, în condițiile deviației minime; raza emergentă se reflectă pe o oglindă plană M, paralelă cu muchia prismei. Să se determine deviația suferită de rază după reflexie (fig. 4.16).

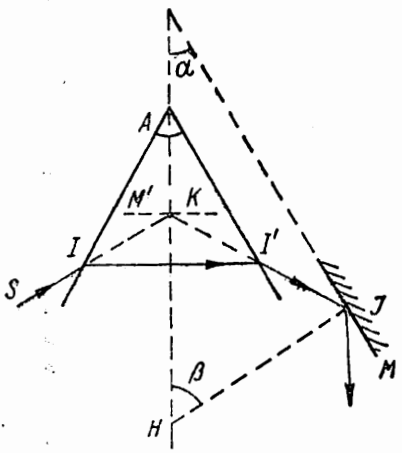


Fig. 4.16.

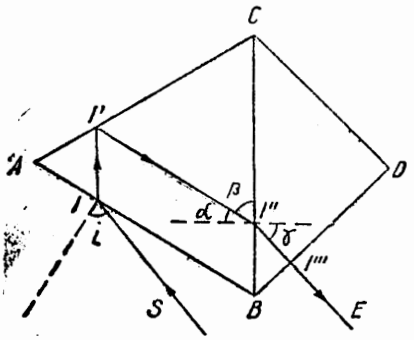


Fig. 4.17.

4.1.17. 1°. Considerăm o prismă a cărei secțiune dreaptă este un triunghi echilateral ABC și o rază de lumină SI ce intră în prismă pe fața AB sub un unghi de incidență ce corespunde deviației minime (fig. 4.17). Cunoscînd deviația minimă $D_m = 60°$, să se determine unghiul de incidență al razei SI și indicele de refracție al substanței din care este confecționată prisma.

2°. Se argintează fața AC a prismei ABC și se lipește cu fața BC de fața ipotenuză a unei prisme, a cărei secțiune dreaptă este un triunghi isoscel BCD, dreptunghic în D. Indicele de refracție al materialului celei de-a doua prisme este $n_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Să se determine mersul razei de lumină SI prin sistemul format din cele două prisme.

4.1.18. O rază de lumină monocromatică pătrunde într-o sferă transparentă omogenă, de indice de refracție n, sub un unghi de incidență i; ea suferă p reflexii parțiale în interiorul sferei, înainte de a ieși din aceasta, (fig. 4.18).

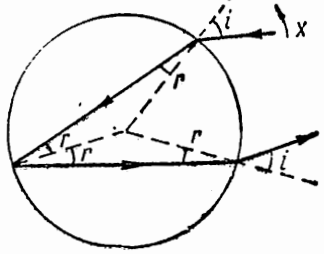


Fig. 4.18.

Să se calculeze deviația D a razei emergente (care iese din sferă după cele p reflexii) în raport cu direcția razei incidente.

4.1.19. Se dă o prismă optică a cărei secțiune ABC este un triunghi echilateral. Pe fața AB a prismei situate în apă cade o radiație monocromatică astfel încît în interiorul prismei raza se propagă paralel cu baza BC.

Se cere să se calculeze:

1° valoarea indicelui de refracție n_p al materialului din care este confecționată prisma, știind că deviația razei emergente față de direcția razei incidente este $D_m = 30°$; indicele de refracție al apei este $n_a = 4/3$;

2° valoarea indicelui de refracție n_m al unui lichid pentru care, în aceleași condiții de propagare, unghiul D_m este nul;

3° care ar trebui să fie valoarea minimă n_{min} a indicelui de refracție al unui alt mediu, pentru care radiația incidentă pe prismă, sub același unghi ca la punctul 1°, să nu mai intre în prismă?

4.1.20. O oglindă sferică concavă are raza de curbură $R = 1{,}20$ m. Un obiect real AB înalt de 5 cm este așezat perpendicular pe axa oglinzii la 0,9 m de aceasta.

1° Să se determine poziția și mărimea imaginii.

2° Să se construiască imaginea și să se figureze mersul unui fascicul de lumină provenind de la unul din punctele obiectului. Care sînt caracteristicile imaginii?

4.1.21. Un obiect înalt de 6 cm este așezat perpendicular pe axa unei oglinzi sferice convexe de rază $R = 0{,}4$ m și la distanță de 0,30 m de vîrful oglinzii.

1° Să se determine poziția, mărimea și natura imaginii.

2° Să se figureze mersul unui fascicul luminos provenind de la unul din punctele obiectului.

4.1.22. La ce distanță față de o oglindă sferică concavă, cu raza $R = 6$ m, trebuie așezat un obiect, perpendicular pe axa principală, pentru a avea:

1. o imagine răsturnată, de cinci ori mai mică decît obiectul;
2. o imagine răsturnată, de cinci ori mai mare decît obiectul;
3. o imagine dreaptă, de cinci ori mai mare ca obiectul.

4.1.23. Un punct luminos A este situat pe axa unei oglinzi concave, la distanța $p = 50$ cm de vîrful acesteia. Distanța focală a oglinzii este $f = 45$ cm. Să se arate la ce distanță de vîrful oglinzii concave, perpendicular pe axa acesteia, trebuie așezată o oglindă plană, astfel ca razele de lumină ce pleacă din punctul A, după ce se reflectă pe cele două oglinzi, să se întîlnească tot în punctul A.

4.1.24. În fața unei oglinzi sferice concave, cu raza de curbură $R = 2$ m, se așază, perpendicular pe axa principală a acesteia și la distanța $p = 5$ m de oglindă, un obiect luminos cu înălțimea $h = 10$ cm.

1. Să se determine poziția și mărimea imaginii.

2. În focarul principal al oglinzii concave, sub un unghi $\alpha = 45°$ față de axa principală, se așază o oglindă plană, cu fața reflectătoare îndreptată spre oglinda concavă. Care va fi mărimea imaginii finale formate prin reflexia luminii pe cele două oglinzi și unde va trebui să așezăm un ecran pentru a o prinde?

4.1.25. Se dau două oglinzi concave, având aceeași distanță focală f, axa comună și fețele reflectătoare una spre cealaltă.

Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească distanța d dintre vîrfurile oglinzilor, pentru ca imaginea unui punct luminos A de pe axa principală să se formeze tot în A, în urma reflexiilor razelor de lumină ce provin de la punctul luminos A, succesiv pe cele două oglinzi.

4.1.26. În planul focal al unei oglinzi sferice concave cu raza de curbură $R = 0{,}5$ m și diametrul deschiderii $d = 0{,}20$ m se așază un disc luminos de diametru $AB = 0{,}04$ m. Care este diametrul D al cercului format de fasciculul de lumină reflectat de oglindă pe un ecran aflat perpendicular și simetric la axa principală, la o distanță $SO = 100$ m?

4.1.27. Un vas cilindric cu mercur se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega = 1$ rad/s în jurul unei axe verticale care coincide cu axa de simetrie a vasului. Suprafața liberă a mercurului din vas capătă o formă curbă și se folosește ca oglindă. Să se determine distanța focală a acestei oglinzi.

4.1.28. Să se stabilească expresia convergenței unui sistem de lentile subțiri asociate.

4.1.29. O lentilă subțire din sticlă cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ are o față plană și o față convexă cu raza de curbură $R = 20$ cm.

1°. Să se calculeze distanța focală și puterea acestei lentile.

2°. Un obiect $AB = o = 1$ mm este așezat la 10 cm de lentilă, perpendicular pe axa acesteia. Să se construiască imaginea și să se determine poziția și mărimea acesteia.

4.1.30. O lentilă divergentă din sticlă cu $n = 1{,}5$ are cei doi dioptri concavi cu $R_1 = 20$ cm și $R_2 = 30$ cm.

1°. Să se calculeze distanța focală și puterea lentilei.

2°. Să se construiască imaginea unui obiect situat la 10 cm de lentilă, pe axa optică.

4.1.31. O cuvă transparentă are unul din pereții laterali o lamă de sticlă P cu fețe plane și paralele și foarte subțire, iar peretele opus o lentilă plan-convexă subțire, fața convexă fiind spre interiorul cuvei (fig. 4.19). Întregul sistem îl vom considera subțire în raționamentele ce le vom face. Cuva fiind goală, distanța focală a sistemului este $f_1 = 50$ cm (convergent). Cuva fiind plină cu apă ($n = 4/3$), distanța focală este $f_2 = 150$ cm (convergent). Dacă introducem în cuvă un lichid de indice n', distanța focală a sistemului devine $|f_3| = 227$ cm (divergent). Să se calculeze indicele de refracție n' al lichidului.

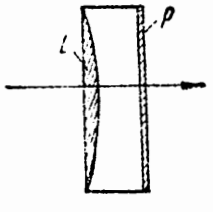


Fig. 4.19.

4.1.32. Pe o lentilă biconvexă cade un fascicul paralel de lumină albă. Știind că razele de curbură ale fețelor lentilei sînt $R_1 = 50$ cm și $R_2 = 1$ m, să se calculeze distanța care separă focarul razelor roșii, pentru care $n_r = 1{,}510$, de focarul razelor violete, pentru care $n_v = 1{,}525$.

4.1.33. Două lentile sînt centrate avînd axul principal comun; una este convergentă cu distanța focală $f_1 = 1$ m, cealaltă divergentă cu $|f_2| = 0{,}9$ m, iar distanța între ele este $d = 0{,}5$ m. Un obiect real se află la $p_1 = 11$ m în

fața lentilei convergente. La ce distanță p_2 față de lentila divergentă se formează imaginea finală și care sînt caracteristicile acesteia?

4.1.34. Un obiectiv fotografic este constituit dintr-o lentilă subțire plan-concavă, de rază de curbură R și o lentilă subțire biconvexă, cu razele de curbură R și R', alipite, formînd o lentilă convergentă plan-convexă. Cele două lentile sînt din sticlă diferită, cu indicii de refracție n_1 și respectiv, n_2.

1° Să se deducă distanțele focale-imagini f_1' și f_2' în funcție de razele de curbură și de indicii de refracție.

2° Să se deducă distanța focală-imagine F' a obiectivului în funcție de aceleași variabile.

3° Indicii de refracție n_1 și n_2 depind de lungimea de undă a radiației ce trece prin lentilă. Se dă:

— pentru galben: $n_{1-g} = 1{,}617$, $n_{2-g} = 1{,}512$;

— pentru albastru: $n_{1-a} = 1{,}629$, $n_{2-a} = 1{,}518$.

Știind că distanța focală-imagine a obiectivului este 12 cm atît pentru galben cît și pentru albastru (obiectiv acromatic), să se calculeze razele de curbură R și R' ale celor două lentile.

4.1.35. Două lentile subțiri biconvexe identice, centrate pe aceeași axă, sînt puse în contact. Se umple cu lichid intervalul rămas liber între cele două lentile și se obține în felul acesta un sistem optic convergent. Distanța focală a uneia din cele două lentile identice este $f = 20$ cm, iar indicele de refracție al materialului din care sînt confecționate acestea este $n = 1{,}5$.

Un obiect așezat la distanța $p = 20$ cm de sistemul optic format dă imaginea reală la distanța $p' = 60$ cm de sistem.

Să se calculeze indicele de refracție al lichidului care constituie lentila divergentă din sistem. Sistemul de lentile se considera subțire.

4.1.36. Pe un banc optic se află un obiect cu înălțimea de 5 cm. O lentilă subțire biconvexă formează pe un ecran imaginea obiectului înaltă de 20 cm. Dacă obiectul se depărtează de lentilă cu 5 cm, pe același ecran se obține o imagine înaltă de 10 cm. Se cere:

1°. distanța focală a lentilei biconvexe și indicele de refracție al acesteia, razele de curbură ale fețelor fiind $R_1 = R_2 = 18$ cm;

2°. poziția finală a imaginii, dacă se introduce o a doua lentilă cu distanța focală $f = 30$ cm la distanța $d = 110$ cm de prima lentilă, obiectul fiind în poziția inițială;

3°. dimensiunea imaginii, dată de sistemul format din cele două lentile.

4.1.37. O lentilă plan-convexă subțire, confecționată din sticlă cu indicele de refracție $n = 1{,}5$, este folosită pentru a proiecta pe un ecran imaginea unui obiect înalt de 5 cm. Știind că obiectul este așezat perpendicular pe axa lentilei, la 30 cm de lentilă și că se obține o imagine de două ori mai mare decît obiectul, să se afle:

1°. distanța focală a lentilei în aer și raza de curbură a feței sferice a acesteia;

2°. distanța focală a aceleiași lentile cînd este introdusă în apă, indicele de refracție al apei fiind $n_a = 4/3$;

3°. poziția și mărimea imaginii aceluiași obiect situat la aceeași distanță de lentilă, întregul sistem aflîndu-se în apă;

4°. ce distanță focală ar trebui să aibă o lentilă subțire pentru ca prin alipirea ei la lentila dată, să formeze în aer un sistem cu distanța focală obținută la punctul 2°?

4.1.38. Să se arate că distanța minimă dintre un obiect și imaginea reală a acestuia, obținută cu ajutorul unei lentile subțiri convergente, este egală cu de patru ori distanța focală a lentilei.

4.1.39. Un obiect rectiliniu AB, înalt de 1 cm, este așezat perpendicular pe axa principală a unei lentile convergente subțiri cu distanța focală $f = 30$ cm. Se cere:

1°. la ce distanță p de lentilă trebuie așezat obiectul AB, pentru a obține pe un ecran perpendicular pe axa lentilei, o imagine reală de trei ori mai mare decît obiectul?

2°. Între obiectul AB și lentilă se interpune o lamă transparentă cu fețele plane și paralele, de grosime $e = 9$ cm și de indice de refracție $n = 1{,}8$ și paralelă cu ecranul. În ce sens și cu cît trebuie deplasat ecranul pentru a obține imaginea clară a obiectului pe acesta?

3°. Se așază, ca în figura 4.20, o oglindă plană M, al cărui plan intersectează axa principală a lentilei, la distanța de 1 m de lentilă și sub un unghi de 45°. Să se precizeze care sînt: natura, poziția și mărimea imaginii dată de sistem.

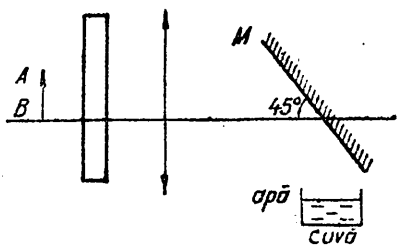


Fig. 4.20.

4°. La ce distanță de axa principală a lentilei trebuie să se afle fundul plan al unei cuve care conține un strat de apă cu adîncimea $h = 20$ cm, pentru ca imaginea finală a obiectului AB să fie reală și plasată pe fundul cuvei? Indicele de refracție al apei este $n = 4/3$.

4.1.40. Se consideră o lentilă convergentă subțire, cu distanța focală $f = 20$ cm. Pe axa optică principală a acesteia se așază, de o parte un obiect luminos AB la distanța $p = 30$ cm de lentilă, iar de partea cealaltă o oglindă convexă cu raza de curbură $R = 40$ cm, cu vîrful spre lentilă, la distanța $OV = 50$ cm. Să se precizeze natura imaginii finale și distanța acesteia de lentilă.

4.1.41. Punctum proximum al ochiului unui observator se află la 1 m în fața ochiului. Ce lentilă trebuie să folosească observatorul pentru a vedea clar obiectele situate la 25 cm în fața ochiului?

4.1.42. Punctum remotum al ochiului unui observator se află la distanța de 1 m în fața ochiului. Ce lentilă trebuie să folosească observatorul pentru a vedea clar (net) obiecte situate la infinit?

4.1.43. Punctum proximum și punctum remotum ale unui prezbit se află la 2 m și respectiv, 4 m de ochi. Să se găsească amplitudinea de acomodare.

4.1.44. Obiectivul și ocularul unui microscop au distanțele focale $f_{ob} = 0{,}8$ cm și respectiv, $f_{oc} = 2{,}5$ cm. Obiectivul dă pentru un obiect mic AB o imagine reală $A'B'$, situată la 16 cm de obiectiv. Să se calculeze mărirea acestui microscop cînd ochiul plasat deasupra ocularului observă imaginea finală virtuală $A''B''$ la 25 cm.

4.1.45. Un ochi normal privește un obiect aflat succesiv la distanțele: $p_1 = 1$ m, $p_2 = 25$ cm și $p_3 = 10$ cm față de centrul său optic. Cu cît se mărește în fiecare caz convergența ochiului în urma acomodării?

4.1.46. Un obiect trebuie fotografiat cu un aparat fotografic al cărui obiectiv are distanța locală $f = 12$ cm. Obiectul se află la distanța $p = 15$ cm de obiectiv, iar distanța de la obiectiv la placa fotografică este $p' = 20$ cm. Ce lentilă adițională trebuie asociată obiectivului pentru ca imaginea să se formeze clar pe placă?

4.1.47. Obiectivul unui microscop are convergența $C = 100$ dioptrii și distanța dintre obiectiv și ocular $D = 16$ cm.

a) Să se calculeze mărirea obiectivului în cazul punerii la punct pentru infinit.

b) Care trebuie să fie distanța focală a ocularului, pentru ca grosismentul comercial al microscopului să fie $G_c = 160$?

4.1.48. O lunetă avînd obiectivul cu distanța focală $f_{ob} = 50$ cm și ocularul cu $f_{oc} = 2$ cm este pusă la punct pentru infinit. Să se calculeze unghiul α sub care se vede discul lunii prin lunetă, știind că cu ochiul liber, aceasta se vede sub un unghi $\beta = 30'$. Cu ce distanță trebuie deplasat ocularul lunetei pentru a vedea clar obiectele aflate la o distanță $d = 50$ m?

4.1.49. Să se calculeze iluminarea unei mici suprafețe situate la distanța $r = 1{,}20$ m de o sursă de lumină cu intensitatea $I = 72$ cd;

a) cînd suprafața este normală pe direcția razelor de lumină;

b) cînd normala la suprafață face cu direcția razelor de lumină un unghi $\alpha = 30°$.

4.1.50. O sursă luminoasă are intensitatea $I = 66{,}5$ cd. Să se calculeze fluxul luminos total emis de sursă.

4.1.51. Două surse luminoase punctiforme, cu intensitățile $I_1 = 20$ cd și respectiv $I_2 = 40$ cd, sînt situate la o distanță $d = 3$ m una de alta.

Să se găsească punctele de pe dreapta care unește cele două surse, în care iluminarea produsă simultan de cele două surse este aceeași.

4.1.52. Un aparat de măsură se află la distanța $p = 60$ cm de o oglindă. O sursă punctiformă de lumină cu intensitatea $I = 25$ cd se află la jumătatea distanței între aparat și oglindă. Ce luminanță (strălucire) va indica aparatul dacă oglinda este:

a) plană?

b) concavă cu distanța focală de 30 cm?

4.1.53. Pe o masă se află o lampă cu picior. Becul lămpii considerat de dimensiuni neglijabile se află la o înălțime $h = 30$ cm față de suprafața mesei și emite lumină cu intensitate $I = 25$ cd. Să se determine iluminarea într-un punct de pe masă la distanța $a = 60$ cm de piciorul lămpii.

4.1.54. O lampă electrică cu intensitatea de 100 cd consumă 0,5 W energie electrică pentru fiecare candelă. Să se determine randamentul acestei lămpi cunoscînd echivalentul energetic de $161 \cdot 10^{-3}$ W/lumen. Să se calculeze, în jouli, energia luminoasă emisă de această lampă într-o oră.

4.1.55. Pentru obținerea unei fotocopii se iluminează negativul cu ajutorul unei lămpi cu filament incandescent punctiform avînd intensitatea

luminoasă de 40 candele și aflat la distanța de 1 m de hîrtia sensibilă. Timpul necesar pentru expunere este de 2 s. Care va fi timpul de expunere în cazul folosirii unei lămpi cu intensitatea de 30 candele, aflată la 1,5 m de hîrtie, cantitatea de energie luminoasă ce cade pe hîrtia sensibilă trebuind să fie aceeași în ambele cazuri?

4.1.56. Să se calculeze radianța (emitanța) filamentului unei lămpi electrice, dacă fluxul emis de aceasta este 400 lm, lungimea filamentului fiind 60 cm și diametrul 0,4 mm.

4.1.57. O celulă fotoelectrică primește lumină printr-o deschidere circulară de diametru $d = 2{,}75$ cm, deschiderea fiind luminată de o sursă punctiformă cu intensitatea luminoasă de 50 candele situată pe axa deschiderii. Celula pune în acțiune un releu electric dacă fluxul luminos pe care-l primește depășește 0,2 lumeni. Să se determine distanța maximă D față de deschidere, la care se poate așeza sursa de lumină pentru a obține declanșarea releului.

4.1.58. O lentilă biconvexă, cu diametrul $D = 9$ cm și distanța focală $f = 50$ cm, se folosește pentru proiectarea Soarelui pe un ecran.

a) Cît va fi diametrul imaginii Soarelui dacă diametrul său unghiular este de 32 minute de arc?

b) De cîte ori va fi mai mare iluminarea imaginii Soarelui față de cea în lipsa lentilei?

4.1.59. Două fante fine și paralele S_1 și S_2, care străpung un paravan P, sînt luminate cu lumină monocromatică de la o fantă-sursă S paralelă cu S_1 și S_2 și într-un plan simetric în raport cu acestea (fig. 4.21, *a*). Distanța $S_1S_2 = a = 0{,}6$ mm.

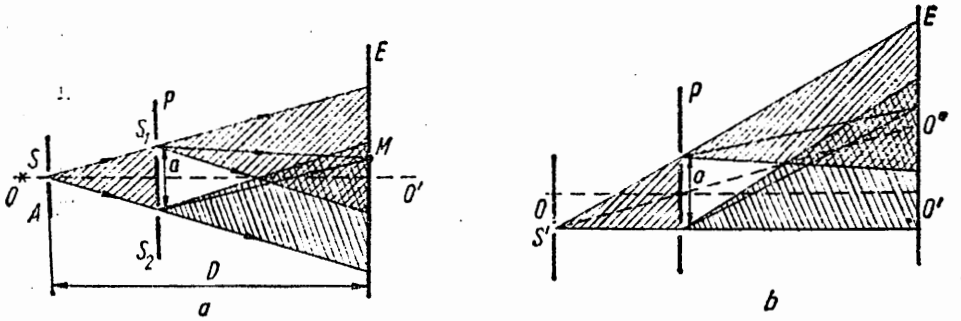


Fig. 4.21.

1°. Pe un ecran E paralel cu paravanul P și la distanța $D = 1$ m de acesta se obțin franje de interferență, distanța între două franje luminoase consecutive fiind $i = 1$ mm. Să se determine lungimea de undă a luminii folosite.

2°. Fanta-sursă S aflîndu-se la distanța $d = 0{,}75$ m de paravanul P este deplasată cu 6 mm sub axa de simetrie a dispozitivului (fig. 4.21, *b*), rămînînd paralelă cu paravanul P; să se spună ce se va întîmpla cu sistemul de franje de interferență.

4.1.60. O sursă monocromatică S luminează două fante fine S_1 și S_2, paralele, la distanța $a = 3$ mm una de alta și la 50 cm de sursa S. Sursa este

pe perpendiculara la planul care conține cele două fante S_1 și S_2 și echidistantă în raport cu acestea. Pe un ecran E paralel cu fantele S_1 și S_2 și la distanța $D = 3$ m de planul acestora se observă sistemul de franje de interferență.

1°. Între franja a 6-a luminoasă, situată de o parte a franjei centrale și franja a 6-a luminoasă, situată de cealaltă parte a franjei centrale, distanța pe ecranul E este $l = 7{,}2$ mm. Care este lungimea de undă a luminii folosite?

2°. Se deplasează fanta-sursă S, cu $Z = 5$ mm, paralel la planul fantelor S_1S_2 (fig. 4.22, *a*). Cum se deplasează franja centrală?

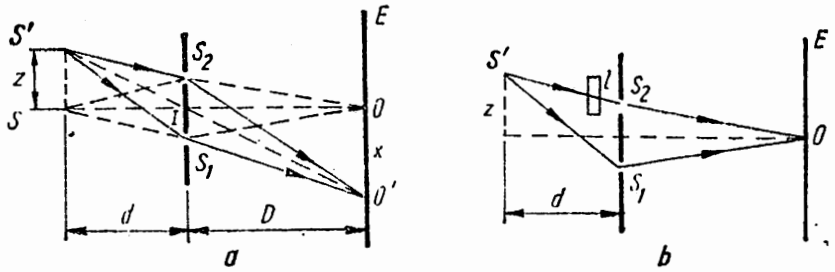


Fig. 4.22.

3°. Menținînd dispozitivul în condițiile de la punctul 2°, readucem franja centrală în poziția inițială O așezînd în drumul fasciculului de lumină care străbate fanta S_2, o lamă cu fețe plane și paralele de indice $n = 1{,}5$ (fig. 4.22, *b*). Care este grosimea e a lamei?

4°. Înlocuim sursa de lumină monocromatică printr-o sursă care emite două radiații, de lungimi de undă $\lambda_1 = 0{,}42 \cdot 10^{-6}$ m și $\lambda_2 = 0{,}63 \cdot 10^{-6}$ m. Această sursă este plasată în S (fig. 4.22, *a*).

a) Să se calculeze interfranjele i_1 și i_2 pentru cele două sisteme de franje.

b) Să se precizeze ce se va observa pe ecranul E.

5°. Înlocuim sursa precedentă cu o sursă de lumină albă așezată în S. Ce se va observa pe ecran?

6°. Se așază fanta unui spectroscop, paralelă cu franja centrală, la 4 mm de aceasta în planul ecranului E (fig. 4.23). Cîte franje întunecate se vor observa în spectrul prins în fanta spectroscopului? Limitele spectrului vizibil se vor lua:

$$\lambda_m = 0{,}4 \cdot 10^{-6}\text{m} \text{ și } \lambda_M = 0{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

7° Considerăm dispozitivul de la punctul 1°.

a) Întregul ansamblu este introdus într-un lichid cu indicele de refracție $n = 1{,}5$. Să se calculeze interfranja.

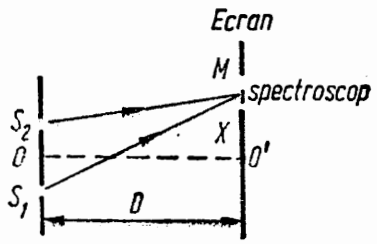


Fig. 4.23.

b) Știind că lărgimea cîmpului de interferență pe ecranul E este $2L = 13{,}2$ mm, să se spună cîte franje luminoase se vor obține.

8°. Să se determine frecvența și viteza de propagare a radiației monocromatice în experiențele de la punctul 1° și punctul 6°.

9°. Reluăm dispozitivul de la punctul 1° și așezăm în drumul fasciculului de lumină

care vine de la fanta S_1 un tub închis la capete, cu două lame transparente A și B (fig. 4.24) de dimensiuni astfel ca ele să fie traversate și de fasciculul provenind de la S_2.

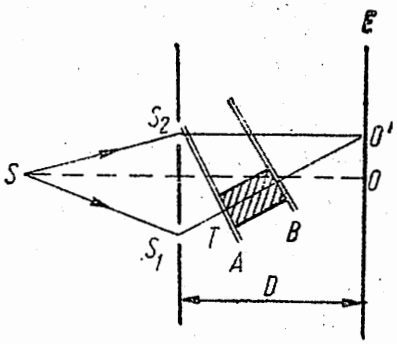


Fig. 4.24.

a) Tubul are o lungime $l = 20$ cm și inițial este în legătură cu atmosfera. Ce se observă pe ecranul E?

b) Se face vid în tub. Ce se întîmplă cu sistemul de franje?

c) Să se determine indicele de refracție al aerului, știind că prin scoaterea aerului din tub, prin O au defilat 99 franje luminoase și în final în O se observă o franjă întunecată.

10°. Între sursele S_1 și S_2 și ecranul E se așază o lentilă subțire convergentă L de centru optic C și având ca axă principală dreapta SO și distanța focală $f\left(\frac{D}{2} < f < D\right)$. Notînd cu p_1 distanța de la planul care conține fantele S_1 și S_2 la centrul optic al lentilei, să se calculeze noua valoare a interfranjei în funcție de λ, a, f, D și p.

Caz particular: $p = 0$; $p = f$, $p = D - f$.

4.1.61. O fantă luminoasă S monocromatică este așezată paralel cu muchia comună D a două oglinzi plane O_1 și O_2, ale căror plane fac un unghi diedru ε mic (oglinzile lui Fresnel). Fanta luminoasă S se află la distanța $d = 40$ cm de muchia diedrului.

1°. S_1 și S_2 fiind imaginile virtuale ale sursei S date de cele două oglinzi, să se arate că în planul figurii 4.25, S, S_1 și S_2 se află pe un cerc cu centrul în D.

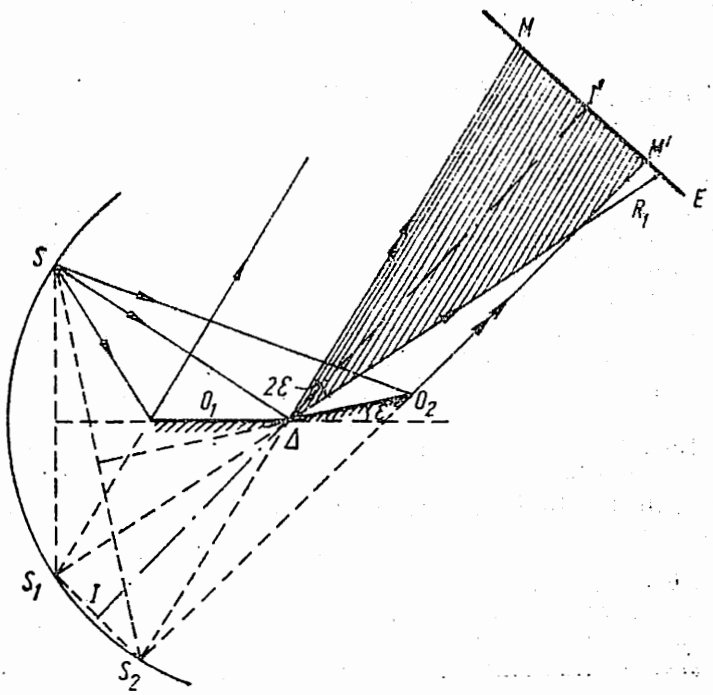


Fig. 4.25.

Să se figureze cîmpul de interferență în planul secțiunii drepte.

Să se indice locul franjei centrale.

2°. Se așază un ecran E perpendicular pe mediatoarea segmentului S_1S_2 și la distanța $d' = 2$ m de muchia D.

a) Știind că $S_1S_2 = 4{,}72$ mm, să se determine unghiul ε făcut de planele celor două oglinzi.

b) Sursa S emite radiații cu $\lambda = 0{,}59 \cdot 10^{-6}$ m în aer. Să se determine interfranja i.

c) Să de determine numărul de franje întunecate ce se obțin pe ecranul E și lărgimea cîmpului de interferență pe ecran.

3°. Înlocuim sursa de lumină monocromatică cu o sursă de lumină albă, înlăturăm ecranul E și așezăm fanta unui spectroscop în planul în care se află ecranul și la $x = 1{,}4$ mm depărtare de franja centrală. În spectrul canelat observat în fanta spectroscopului lipsește un anumit număr de radiații din spectrul vizibil (limitat de $\lambda_{violet} = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ m și $\lambda_{roșu} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ m). Să se determine lungimea de undă a acestor radiații.

4.1.62. Un fascicul paralel de lumină monocromatică cade sub incidență normală pe o rețea de difracție cu $n = 2 \cdot 10^5$ trăsături pe metru. Figura de difracție se proiectează cu ajutorul unei lentile convergente subțiri, cu distanța focală $f = 0{,}5$ m, pe un ecran situat în planul focal al acesteia și paralel cu planul rețelei. Să se determine:

1°. lungimea de undă λ a radiației folosite, știind că maximul de ordinul unu se obține sub un unghi $\varphi = 30°$ față de normala la rețea;

2°. distanța, măsurată pe ecran, între maximul de ordinul unu și maximul central;

3°. unghiul de dispersie pentru maximele de ordinul unu, în cazul folosirii luminii albe cu radiațiile extreme cuprinse între $\lambda_r = 0{,}75 \cdot 10^{-6}$ m și $\lambda_v = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ m.

4.1.63. Un fascicul de lumină monocromatică emis de o sursă punctiformă este transformat într-un fascicul de lumină paralelă cu ajutorul unei lentile plan convexe, care are raza de curbură $R = 20$ cm și indicele de refracție $n = 1{,}65$.

Fasciculul de lumină paralelă cade perpendicular pe o rețea optică cu 250 trăsături pe milimetru. Razele de lumină care constituie maximul de difracție de ordinul 3 sînt înclinate față de direcția razelor incidente cu un unghi $\varphi = 30°$. Se cere:

1°. distanța D la care trebuie așezată sursa punctiformă față de lentilă pentru a se obține fasciculul de lumină paralelă;

2°. lungimea de undă a radiației monocromatice.

4.1.64. Un fascicul de lumină naturală în aer ($n_a = 1$) se reflectă pe suprafața unui bloc de sticlă cu $n_s = 1{,}52$. Să se determine unghiul de incidență i_B (incidență Brewster) pentru care lumina reflectată este total polarizată.

4.1.65. Un polarizor și un analizor sînt așezate astfel încît lumina după ce intră prin polarizor, trece prin analizor și iese din acesta cu maximum de intensitate. Se rotește analizorul cu 30° în jurul axei de simetrie a sistemului. Să se arate ce fracțiune din intensitatea luminoasă iese din analizor.

4.2. PROBLEME CU INDICAȚII ȘI REZULTATE

4.2.1. Pe cale geometrică, să se demonstreze că dacă o rază de lumină provenită de la un punct luminos A, după reflexie pe o oglindă plană trece prin punctul B, lungimea drumului parcurs de această rază de lumină este mai mică decît lungimea oricărui alt drum care merge de la punctul A la oglindă și apoi la punctul B (se consideră mediul străbătut de raza de lumină, ca fiind omogen și izotrop).

4.2.2. Ochiul unui observator se află în fața unei oglinzi plane circulare cu raza de 10 cm, pe normala la planul oglinzii care trece prin centrul acesteia și la 50 cm depărtare față de oglindă. Ce porțiune va vedea el, prin reflexie, din peretele aflat în spatele lui, paralel cu planul oglinzii și la 2 m depărtare de oglindă?

4.2.3. Cu ajutorul unei surse de lumină în formă de disc circular se luminează un disc opac de rază r și se obține pe un ecran așezat la o distanță d de disc, o umbră de rază r_1 și o penumbră de rază r_2. Să se determine dimensiunile sursei de lumină și distanța ei de la discul luminat, în cazul cînd dreapta care trece prin centrele discurilor este perpendiculară pe acestea și pe planul ecranului.

4.2.4. Să se construiască imaginile unui punct luminos aflat între două oglinzi plane care fac între ele un unghi diedru α.

Să se studieze cazurile: a) $\alpha = 90°$; b) $\alpha = 60°$; c) oglinzile sînt paralele.

4.2.5. O rază de lumină se propagă în aer reflectîndu-se succesiv pe trei oglinzi plane, M_1, M_2, M_3, perpendiculare pe un anumit plan (exemplu, planul figurii). Unghiurile de incidență în I_1 pe M_1 și I_2 pe M_2 însumează ambele 60° și raza I_1I_2 se află în planul figurii.

Care trebuie să fie orientarea oglinzii M_3 pentru ca după reflexie, succesiv pe cele trei oglinzi, raza triplu reflectată R_3 să aibă aceeași direcție și același sens cu raza incidentă SI_1?

4.2.6. O rază de lumină avînd direcția SI constantă, cade pe una din oglinzile unui ansamblu de două oglinzi plane și perpendiculare (fig. 4.26).

1°. Ce direcție va avea raza $I'R$ dublu reflectată, cînd ansamblul celor două oglinzi se rotește în jurul dreptei de intersecție a oglinzilor, considerată fixă și perpendiculară pe direcția razei incidente SI?

2°. Ce se întîmplă cu punctul de intersecție M al normalelor la oglinzi în punctele I și I'?

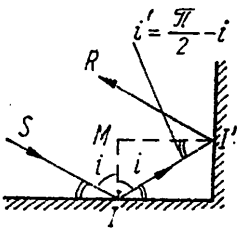


Fig. 4.26.

4.2.7. O mică oglindă plană, mobilă în jurul unei axe verticale, reflectă un fascicul de raze paralele, perpendicular pe o riglă translucidă orizontală, aflată la 2 m de oglindă. O rotație a oglinzii produce o deviere a fasciculului reflectat astfel încît spotul luminos se deplasează pe riglă cu 20 mm. Să se calculeze unghiul de rotație α al oglinzii.

4.2.8. Suprafețele reflectătoare a două oglinzi plane fac între ele un unghi diedru φ. Pe una din oglinzi cade o rază de lumină aflată într-un plan perpendicular pe muchia unghiului. Să se demonstreze că după reflexia razei de lumină și pe cea de-a doua oglindă, unghiul de deviere Δ al acesteia de la direcția inițială (razei incidente) nu depinde de unghiul de incidență. Să se calculeze Δ.

4.2.9. Distanța de la Soare la Pămînt este de 220 ori mai mare decît raza Soarelui. Să se determine raza imaginii Soarelui obținută pe Pămînt în planul focal al unei oglinzi sferice concave cu raza $R = 44 \cdot 10^{-2}$ m.

4.2.10. Un punct luminos A se află pe axa principală a unei oglinzi concave cu distanța focală de 30 cm, la o distanță de 40 cm de vîrful oglinzii. Unde trebuie așezată o oglindă plană, perpendicular pe axa principală a oglinzii concave, pentru ca imaginea punctului luminos A, dată de cele două oglinzi, să cadă tot în A?

4.2.11. Două oglinzi concave cu distanțele focale 10 cm, respectiv 40 cm, sînt situate față în față, avînd axa optică comună și distanța între vîrfurile oglinzilor $d = 110$ cm.

a) Să se determine cele două puncte aflate pe axă între cele două oglinzi, ale căror imagini, după reflexia succesivă pe cele două oglinzi, se formează în aceleași puncte.

b) Cît de mare trebuie să fie distanța între cele două oglinzi pentru ca cele două puncte să coincidă?

4.2.12. Se dă o oglindă concavă cu raza $R = 2$ m. La o distanță $VB = 1{,}4$ m de vîrful oglinzii se așază un mic cerc luminos, cu raza $AB = 1$ cm, al cărui centru se află pe axa principală a oglinzii. Să se afle la ce distanță d de vîrful oglinzii concave trebuie să așezăm o oglindă plană, perpendiculară pe axă, pentru ca imaginea finală a centrului cercului să se formeze în B (centrul cercului).

Care va fi mărimea diametrului acestei imagini?

4.2.13. În drumul razelor de lumină care dau imaginea reală a unui obiect pe un ecran E_1 și la 20 cm în fața acestui ecran, se așază o oglindă sferică care reflectă razele, dînd o nouă imagine ce se poate prinde pe un alt ecran E_2, paralel cu E_1 și la distanța de 80 cm de primul.

Să se determine natura (concavă sau convexă) și distanța focală a oglinzii.

4.2.14. Pe un banc optic sînt așezate două lentile convergente biconvexe L_1 și L_2 identice și o oglindă concavă M, avînd aceeași axă optică. La stînga lentilei L_1 se află pe axă un punct luminos S. Lumina traversează cele două lentile, se reflectă pe oglindă și se întoarce prin lentile. Sticla din care sînt confecționate lentilele are indicele de refracție $n = 1{,}5$, raza de curbură a lentilelor este $R = 20$ cm și a oglinzii $R_1 = 40$ cm. Distanța dintre lentile este $d = 1$ m, iar dintre lentila L_2 și oglinda M este $d_1 = 50$ cm.

Se cere să se calculeze:

1. distanțele focale f_1 ale lentilelor și f_2 a oglinzii;

2. poziția imaginii finale a obiectului punctiform S aflat la distanța $p = 30$ cm în stînga lentilei L_1;

3. mărirea imaginii de la punctul 2;

4. cum trebuie așezat sistemul optic pentru ca imaginea finală să se formeze tot în S?

4.2.15. O rază de lumină monocromatică, la suprafața plană de separație între două medii transparente cu indicii de refracție n_1 și respectiv n_2, se scindează în două raze: una reflectată și cealaltă refractată. Să se calculeze care este valoarea unghiului de incidență în funcție de n_1 și n_2, pentru care raza reflectată și raza refractată sînt perpendiculare între ele. Ce se poate spune despre raza reflectată?

4.2.16. Să se determine deplasarea razei emergente în raport cu direcția razei incidente care cade sub un unghi de incidență $i = 70°$ pe o lamă transparentă cu fețe plane și paralele, cu grosimea $d = 10$ cm; indicele de refracție al lamei este $n = 1{,}5$.

4.2.17. Un vas conține un strat de lichid transparent; grosimea stratului de lichid este h, iar indicele de refracție n. Pe fundul vasului se află un mic obiect. Un observator vede imaginea obiectului din vas după o direcție ce face un unghi $i \neq 0$ cu normala la suprafața lichidului.

Să se calculeze adîncimea h' la care observă acesta imaginea obiectului și drumul optic L străbătut de raza de lumină în lichid. Să se calculeze aceleași mărimi în cazul unei incidențe normale.

4.2.18. Un fascicul de lumină cade, din aer, pe un bloc de cuarț sub un unghi de incidență $i = 30°$. Fasciculul de lumină conține două lungimi de undă: $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ m și $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ m. Indicii de refracție ai cuarțului în raport cu aerul pentru cele două radiații sînt: $n_1 = 1{,}4702$ și respectiv, $n_2 = 1{,}4624$.

Care este unghiul dintre cele două raze refractate?

4.2.19. Un bazin cu fundul plan și reflectant conține un strat de apă cu grosimea $h = 20$ m. Pe suprafața apei cade o rază de lumină sub un unghi de incidență $i = 30°$. Să se calculeze:

1) după cît timp raza de lumină iese din apă în aer;

2) unghiul format de direcția razei emergente (care iese din apă) cu direcția razei incidente;

3) distanța geometrică și drumul optic străbătut de rază în apă. Indicele de refracție al apei se ia $n = \frac{4}{3}$.

4.2.20. O prismă de sticlă are indicele de refracție $n = 3/2$ și unghiul $A = 5°$. Se cere deviația unei raze de lumină care intră în prismă sub un unghi de incidență $i = 3°$ și valoarea unghiului făcut de raza emergentă, la ieșirea din prismă, cu normala la fața prismei.

4.2.21. O rază de lumină, trecînd din aer în apă, întîlnește în apă o oglindă plană, paralelă cu suprafața apei pe care se reflectă și se întoarce în aer. Să se exprime unghiul sub care iese raza emergentă față de normala la suprafața apei, în raport cu unghiul de incidență al razei la intrarea în apă.

2) Aceeași întrebare pentru cazul cînd oglinda plană face un unghi α cu suprafața apei.

3) Indicele de refracție al apei fiind $n = 4/3$, iar raza incidentă intrînd în apă sub unghiul de incidență $i = 30°$, să se determine unghiul minim cu care trebuie rotită oglinda în raport cu suprafața apei, pentru ca raza emergentă să se reflecte total la suprafața de separație apă-aer.

4.2.22. O prismă optică cu unghiul de refracție $A = 60°$ are indicele de refracție $n = \sqrt{2}$ pentru radiația galbenă a sodiului.

1) Să se determine unghiul de incidență corespunzător deviației minime și valoarea acestei deviații (D_{minim}) pentru radiația galbenă.

2) Să se determine unghiul de incidență minim pentru care radiația galbenă suferă reflexie totală pe a doua față a prismei.

4.2.23. Între obiectul și ecranul, ale căror poziții sînt fixe, se așază o lentilă convergentă subțire. Deplasînd lentila de-a lungul axei de simetrie se

găsesc două poziții pentru care imaginea pe ecran este clară (netă). Să se determine dimensiunile transversale ale obiectului știind că dimensiunea imaginii pentru o poziție a lentilei este $h' = 2{,}0$ mm, iar pentru cealaltă poziție $h'' = 4{,}5$ mm.

4.2.24. Un sistem optic se compune din două lentile L_1 și L_2 având același ax principal, situate la 20 cm una de alta. Lentila L_1 este biconvexă, ambii dioptri având aceeași rază de curbură R, indicele de refracție al lentilei $n = \frac{3}{2}$ și distanța focală $f_1 = 10$ cm. Lentila L_2 este divergentă și are distanța focală $f_2 = -15$ cm. Să se afle:

1) la ce distanță de un obiect AB, situat la distanța de 15 cm în fața lentilei L_1, se află imaginea lui $(A''B'')$ dată de sistem? Ce fel de imagine este aceasta și care este valoarea raportului $\frac{A''B''}{AB}$?

2) Să se determine raza de curbură a dioptrilor lentilei L_1.

3) Lentila L_1 se introduce în interiorul unei cuve cu fețe plane și paralele și dimensiune, după direcția axei sistemului, egală cu l, foarte apropiată de grosimea lentilei, așa ca în problemă să putem neglija drumul străbătut de lumină prin lichidul respectiv.

Să se determine valoarea indicelui de refracție n' al lichidului din cuvă, știind că pentru ca imaginea $A''B''$ să rămînă în poziția de la început, obiectul AB trebuie depărtat foarte mult de sistemul de lentile (teoretic, la infinit de acesta).

4.2.25. O lentilă plan-convexă are raza de curbură a dioptrului sferic $R = 10$ cm și indicele de refracție $n = 1{,}5$. La distanța de 15 cm în fața lentilei se așază un obiect rectiliniu și perpendicular pe axa lentilei, înălțimea obiectului fiind $AB = 5$ cm. Să se determine:

1) poziția, mărimea și natura imaginii;

2) obiectul rămînînd la aceeași distanță de lentilă, aceasta fiind cu fața convexă spre obiect și fața plană fiind argintată, să se afle poziția, natura și mărimea imaginii finale în acest caz;

3) să se arate mersul razelor în cele două cazuri.

4.2.26. O lentilă convergentă are distanța focală $f_1 = 12$ cm. În fața ei se așază un obiect la distanța $p = 20$ cm. La distanța $d = 60$ cm de această lentilă se află o a doua lentilă convergentă, cu distanța focală $f_2 = 10$ cm. Să se determine:

1) convergențele C_1 și C_2 ale celor două lentile;

2) unde se află imaginea obiectului dată de sistemul format din cele două lentile, care este natura și mărimea acestei imagini în raport cu obiectul?

4.2.27. O lentilă biconvexă subțire, din sticle cu $n = 1{,}5$, având raza de curbură a celor două fețe $R = 40$ cm, are una din fețele exterioare argintată. Să se determine distanța focală a sistemului.

4.2.28. Două lentile plan-convexe sînt lipite cu fețele plane, formînd în felul acesta o lentilă biconvexă pe care o putem considera subțire. Indicii de refracție ai fiecăreia din cele două lentile plan-convexe sînt n_1 și respectiv n_2 și razele de curbură ale fețelor curbe sînt R_1 și R_2. Să se determine:

1°. convergența sistemului format din cele două lentile;

2°. ce indice de refracție trebuie să aibă o lentilă biconvexă cu razele de curbură R_1 și R_2, care să fie echivalentă cu sistemul de mai sus?

4.2.29. Două lentile subțiri, una convergentă cu $n_1 = 1{,}70$, alta divergentă cu $n_2 = 1.51$, toți cei patru dioptri avînd raza de curbură $R = 10$ cm, sînt asociate (lipite) și situate în apă. Să se determine distanța focală a sistemului de lentile în apă.

4.2.30. O lentilă plan-concavă are raza de curbură $R = 10$ cm și indicele de refracție $n = 1{,}5$. La $p_1 = 20$ cm în fața lentilei se află un obiect de înălțime $o = 8$ cm.

a) Să se determine poziția, natura și mărimea imaginii.

b) Se alătură la prima lentilă, coaxial, o a doua lentilă identică, avînd concavitățile față în față și se umple cu apă ($n_a = 4/3$) golul format de cavitățile lentilelor.

Să se determine poziția, natura și mărimea imaginii în acest caz.

4.2.31. Două lentile plan-covexe, identice, confecționate din sticlă cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ și avînd distanța focală $f = 60$ cm sînt centrate pe aceeași axă, cu fețele curbe în contact. Se umple intervalul dintre lentile cu un lichid și se constată că distanța focală a sistemului devine $F = 150$ cm.

Să se determine indicele de refracție al lichidului.

4.2.32. Obiectivul unui aparat de proiecție este format prin asocierea a două lentile subțiri, una biconvexă de crown cu indicele de refracție $n_1 = 1{,}52$, razele de curbură ale celor două fețe ale lentilei fiind egale. A doua lentilă este un menisc divergent de flint cu indicele de refracție $n_2 = 1{,}68$, fața concavă avînd raza de curbură egală cu a fețelor lentilei biconvexe, iar fața convexă are raza de curbură de trei ori mai mare. Să se afle:

a) convergența sistemului, dacă imaginea unui obiect așezat la $p = 20$ cm față de centrul optic al sistemului este reală și se formează la $p' = 30$ cm față de sistem;

b) razele de curbură ale fețelor celor două lentile și distanța focală a fiecărei lentile.

4.2.33. Pe axa optică principală a unei lentile convergente subțiri, la distanța de 1,5 m de aceasta, se află o sursă luminoasă punctiformă. De cealaltă parte a lentilei se deplasează un ecran perpendicular pe axa lentilei. Cînd ecranul se află la distanța de 1 m de lentilă, diametrul imaginii luminoase a sursei are pe ecran valoarea de 2,5 cm. Cînd ecranul se află la 1,25 m de lentilă, diametrul imaginii este de 5 cm.

1°. Să se deducă distanța focală a lentilei.

2°. Se repetă experiența cu o a doua lentilă și pentru aceleași poziții ale ecranului se obțin imagini ale sursei luminoase cu diametrele de 3,33 cm și respectiv, 26,66 cm. Să se deducă distanța focală a acestei lentile.

3°. Între prima lentilă și punctul luminos aflat la $p = 1{,}5$ m de lentilă se interpune o cuvă cu apă ($n_a = 4/3$), cu pereți subțiri și cu lungimea $l = 1$ m. Să se determine distanța p' de la lentilă la poziția unde trebuie așezat ecranul pentru a obține imaginea netă a sursei.

4.2.34. O lentilă biconvexă subțire, ambii dioptri avînd aceeași rază de curbură dă, în aer, imaginea unui obiect la distanța D de acesta. Lentila și obiectul fiind cufundate în apă, păstrînd poziția relativă pe care o avea în aer, imaginea se obține la distanța de 1 m de obiect și este de patru ori mai mare decît obiectul. Indicele de refracție al sticlei este $n_s = 1{,}5$, iar al apei $n_a = 4/3$. Să se afle:

1) distanța focală a lentilei;

2) raza de curbură a feţelor lentilei;
3) distanţa D dintre obiect şi imaginea sa dată de lentilă în aer.

4.2.35. O lentilă biconvexă are razele de curbură ale celor două feţe $R_1 = 25$ mm şi respectiv $R_2 = 40$ mm şi indicele de refracţie $n = 1{,}5$. Să se determine distanţa focală şi convergenţa lentilei în condiţiile în care lentila se află în:

a) aer ($n_a = 1$); b) apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$; c) sulfură de carbon ($n_{CS} = 1{,}63$).

4.2.36. Un sistem optic centrat este constituit dintr-o lentilă convergentă cu distanţa focală $f_1 = 20$ cm şi o lentilă divergentă cu distanţa focală $f_2 = -10$ cm şi dă pentru un punct-obiect aflat la infinit o imagine la infinit.

1° Să se calculeze distanţa dintre lentile.

2° La ce distanţă de prima lentilă trebuie aşezat un obiect perpendicular pe axa sistemului pentru a obţine o imagine virtuală situată la 20 cm de lentila a doua?

4.2.37. Un obiect este aşezat la distanţa $p = 40$ cm de o lentilă subţire biconvexă simetrică, cu distanţa focală $f = 15$ cm. Să se determine poziţia unde trebuie aşezată o oglindă plană perpendiculară pe axa principală a lentilei, astfel ca imaginea finală a obiectului dată de sistemul lentilă-oglindă să se formeze de aceeaşi parte a lentilei cu obiectul şi în centrul sferei din care face parte una din feţele lentilei.

4.2.38. Pe o masă se află o carte la distanţa de 1 m de piciorul perpendicularei coborîte din lampă pe planul mesei. Lampa poate fi deplasată numai pe verticală.

La ce înălţime h deasupra mesei trebuie fixată lampa pentru ca iluminarea cărţii să fie maximă?

4.2.39. Iluminarea obţinută pe suprafaţa Pămîntului în cazul unei incidenţe normale a razelor solare este de aproximativ 10^5 luxi. Admiţînd că radiaţia Soarelui este independentă de direcţie şi neglijînd absorbţia luminii în atmosferă, să se determine strălucirea Soarelui. Se consideră raza orbitei Pămîntului egală cu $1{,}5 \cdot 10^8$ km şi diametrul Soarelui egal cu $1{,}4 \cdot 10^6$ km.

4.2.40. Iluminarea obţinută pe suprafaţa Pămîntului în cazul unei incidenţe normale a razelor solare este de 10^5 luxi. Care va fi iluminarea E' a imaginii Soarelui obţinută cu ajutorul unei lentile de diametru $D = 5$ cm şi distanţă focală $f = 10$ cm? Mărimea unghiulară a Soarelui este de 30′.

4.2.41. O persoană priveşte o sursă punctiformă de lumină cu intensitatea de 50 candele, aşezată la distanţă de 1 m de ochiul acesteia. Să se calculeze fluxul luminos care cade pe pupila ochiului, diametrul pupilei fiind de 4 mm.

4.2.42. Fluxul energetic al radiaţiei vizibile a unei lumînări este de $6 \cdot 10^{-3}$ W/m^2 la o distanţă de 1 m de lumînare. Ştiind că lumînarea pierde $8{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg din masa ei pe oră şi că puterea calorică a materialului din care este făcută lumînarea este de $24{,}3 \cdot 10^6$ J/kg, să se determine randamentul lumînării ca sursă de lumină.

4.2.43. Expunerea negativului unei fotografii cu o lampă cu filament incandescent de 100 W, de la o distanţă de 1 m, trebuie să dureze 8 secunde.

Cîte secunde va trebui expus un astfel de negativ dacă se folosesc două lămpi de cîte 100 W, aflate la 3 m și respectiv, 4 m de hîrtia sensibilă, aceasta trebuind să primească aceeași energie ca în primul caz?

4.2.44. Fluxul luminos total emis de un fir rectiliniu incandescent cu lungimea $l = 60$ cm este 132 lumeni. Să se afle iluminarea maximă pe o suprafață plană paralelă cu firul, aflată la $d = 5$ cm de acesta.

4.2.45. O sursă luminoasă de forma unui disc plan orizontal de rază $r = 25$ cm se află deasupra unei mese la înălțimea $h = 75$ cm de aceasta. Iluminarea mesei dedesubtul sursei este $E_0 = 70$ lx. Să se determine radianța sursei.

4.2.46. Deasupra centrului unei mese circulare de rază $r = 1$ m se află o sursă luminoasă de forma unui disc plan orizontal, de arie $S = 100$ cm^2. Radianța sursei este $B = 1{,}6 \cdot 10^4$ cd/m^2, aceeași în toate direcțiile.

La ce înălțime h deasupra mesei trebuie plasată sursa pentru ca iluminarea (E) în punctele periferice ale mesei să fie maximă? Care este iluminarea?

4.2.47. Ce intensitate trebuie să aibă o lampă electrică instalată pe un stîlp înalt de 12 m, pentru a produce o iluminare de 3 lx la depărtarea de 16 m de la baza stîlpului?

4.2.48. O persoană vede distinct un obiect așezat la 50 cm de ochi. Ce fel de lentile trebuie să folosească persoana pentru a vedea clar obiecte situate la 25 cm? Distanța dintre ochi și lentilă se consideră 1 cm.

4.2.49. Un miop are minimum de vedere distinctă la 25 cm atunci cînd folosește ochelari cu lentile divergente de 2,5 dioptrii, așezate la distanța de 1 cm de ochi. Să se afle distanța minimă de vedere clară pentru persoana respectivă cînd nu folosește ochelari.

4.2.50. Un miop vede clar obiectele situate între 5 cm și 50 cm.

1°. Ce fel de lentile trebuie să folosească pentru a vedea clar obiectele foarte îndepărtate?

2°. Unde apare prin ochelari punctum proximum?

4.2.51. Un ochi se află în focarul imagine F' (fig. 4.27) al unei lentile convergente L de distanță focală $f' = 10$ cm. Ochiul nu poate vedea net decît imaginile punctelor situate pe prelungirea axei $F'O$, între A și B ($OA = 9$ cm, $OB = 14$ cm). Să se calculeze distanța maximă (Δ) și minimă (δ) de vedere distinctă a acestui ochi, în absența lentilei L.

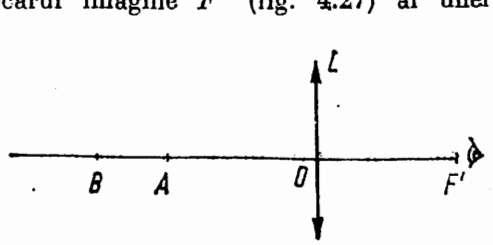


Fig. 4.27.

Să se calculeze convergența C a lentilei L_1 care, aplicată în fața ochiului, permite vederea netă a obiectelor situate la infinit, fără acomodare.

Să se determine distanța minimă δ_1 de vedere distinctă a ochiului, în prezența lentilei L_1.

4.2.52. Un microscop este format dintr-un obiectiv cu distanța focală $f_{ob} = 5$ mm și un ocular cu distanța focală $f_{oc} = 20$ mm. Un obiect este așezat la 5,2 mm de obiectiv. Se cere:

1) poziția imaginii reale date de obiectiv;

2) mărirea obiectivului;

3) distanța la care trebuie să se găsească obiectivul față de ocular pentru ca imaginea virtuală dată de acesta din urmă să se formeze la 25 cm de ochiul aflat imediat deasupra ocularului;

4) raportul dintre dimensiunile liniare ale imaginii date de ocular și obiect;

5) puterea microscopului și grosismentul comercial al acestuia ($\delta = 25$ cm).

4.2.53. Cu ajutorul dispozitivului reprezentat în figura 4.28 se obține fenomenul de interferență. S, S_1, S_2 sînt fante drepte orizontale practicate în

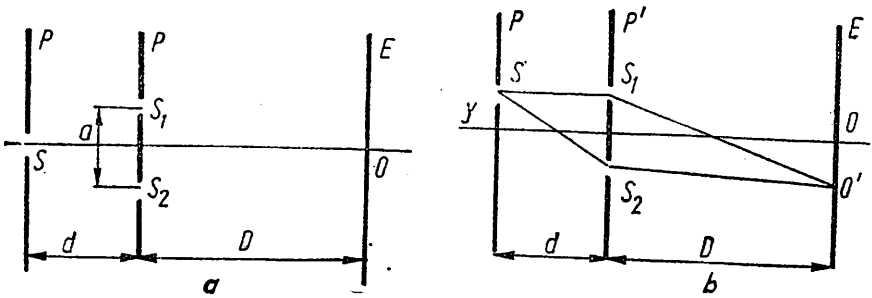


Fig. 4.28.

paravanele P și respectiv P'. Paravanele P și P' și ecranul E pe care se observă franjele de interferență sînt verticale și paralele. Notăm cu a distanța între S_1 și S_2, cu d distanța între P și P' și cu D distanța între P' și E și considerăm următoarele valori numerice:

$$a = 1 \text{ mm}, \qquad d = 1 \text{ m}, \qquad D = 2 \text{ m}.$$

I. Fanta S fiind inițial la aceeași distanță de S_1 și de S_2 (fig. 4.28, *a*) se luminează de la o sursă de lumină monocromatică care emite radiații cu $\lambda = 0{,}320 \cdot 10^{-6}$ m.

1°. Să se precizeze direcția franjelor de interferență observate pe ecranul E și poziția franjei centrale. Să se calculeze interfranja.

2°. Se deplasează fanta S pe verticală cu $y = 1$ cm în sus (fig. 4.28, *b*). Să se spună ce se observă pe ecranul E și să se calculeze deplasarea z a franjei centrale.

3°. Menținînd dispozitivul în poziția de la punctul 2° se aduce franja centrală la poziția inițială (1°) așezînd în dreptul uneia din fante (S_1, S_2) o lamă de sticlă de grosime e, de indice de refracție $n = 1{,}55$, paralelă la P'. Să se precizeze în fața cărei fante trebuie așezată lama de sticlă și care trebuie să fie grosimea acesteia.

II. Revenind la dispozitivul inițial (1°) cu S_1 și S_2 la aceeași distanță de S și fără lama de sticlă, se luminează cu lumină de la o altă sursă care emite radiații cu $\lambda_1 = 0{,}420 \cdot 10^{-6}$ m și $\lambda_2 = 0{,}630 \cdot 10^{-6}$ m; să se calculeze interfranjele i_1 și i_2 ale celor două sisteme de franje. Să se reprezinte franjele și să se precizeze ce se observă.

III. Se menține dispozitivul de la II și se luminează cu lumină albă.

1°. Să se descrie fenomenele observate pe ecranul E.

2°. Se înlătură ecranul E și se așază fanta unui spectroscop într-un punct M, paralelă cu fantele S_1 și S_2.

Se dă $OM = 4$ mm. Care sînt radiațiile care lipsesc în spectrul observat? Limitele spectrului vizibil sînt: 0,4 μm și 0,8 μm.

4.2.54. O lentilă subțire convergentă, de distanță focală 50 cm, este tăiată în două părți egale printr-un plan trecînd prin axul principal. O fantă luminoasă S foarte fină este situată în acest plan și este paralelă cu linia de separație a celor două jumătăți de lentilă. Mijlocul fantei se află pe axul principal, la 1 m de lentilă (fig. 4.29). Sursa emite lumină monocromatică:

1°. la ce distanță trebuie depărtate cele două jumătăți ale lentilei, simetric de o parte și de alta a axei, pentru a obține două imagini, S_1 și S_2, depărtate cu $a = 4$ mm una de alta?

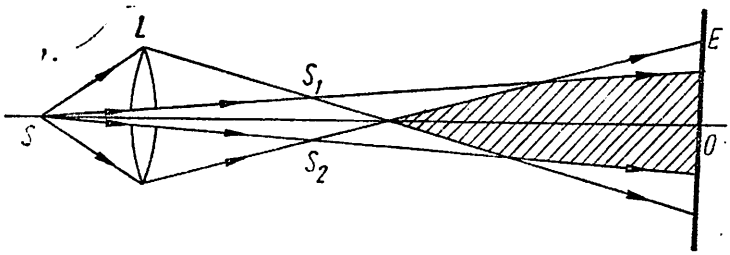


Fig. 4.29.

Cele două jumătăți fiind la 4 mm una de alta, considerăm un ecran E, normal pe axă, la $D = 3$ m de sursele S_1 și S_2. Care este lărgimea regiunii de pe acest ecran în care se poate observa franje de interferență? Se măsoară distanța de la mijlocul franjei centrale (luminoase) pînă la mijlocul celei de-a douăzecea franje luminoase de o parte a franjei centrale și se găsește 8,19 mm. Care este lungimea de undă a radiației folosite?

2°. Se așază în fața uneia din surse (S_1 sau S_2) o lamă de sticlă de grosime $e = 0{,}003$ mm și indice de refracție $n = 1{,}5$ pentru radiația monocromatică considerată.

Care sînt sensul și valoarea deplasării suferite de sistemul de franje?

3°. Se înlătură lama de sticlă și se luminează fanta S cu lumină care conține toate radiațiile cu lungimi de undă cuprinse între $0{,}650 \cdot 10^{-6}$ m și $0{,}410 \cdot 10^{-6}$ m.

Care sînt lungimile de undă ale radiațiilor din acest spectru, care dau franje întunecate în planul de observarție (E) într-un punct A la $x = 3$ mm de axă?

Se așază fanta unui spectroscop pe franja centrală și apoi o deplasăm paralel cu ea însăși pînă în A. Ce schimbări se observă în aspectul spectrului?

4.2.55. Să se determine lungimea de undă a unei radiații monocromatice, care căzînd perpendicular pe o rețea optică, a cărei constantă este $N = 400$ trăsături pe centimetru, prezintă în transmisie maximul de difracție de ordin 3, sub un unghi de difracție de 3°30′.

4.2.56. Să se determine lungimea de undă a unei linii spectrale a cărei imagine dată de o rețea de difracție în spectrul de ordinul al treilea coincide cu imaginea liniei cu $\lambda = 4\,861$ Å în spectrul de ordinul al patrulea.

4.2.57. Să se determine constanta pe care trebuie să o aibă o rețea de difracție pentru a da un spectru de difracție cu radiații din domeniul infraroșu, cu lungimea de undă pînă la 100 μm.

4.2.58. Indicii de refracție ai cristalului de cuarț pentru lumina cu $\lambda = 0{,}6$ μm sînt $n_o = 1{,}544$ și $n_e = 1{,}553$ pentru raza ordinară, respectiv raza extraordinară. Dacă un cristal de cuarț este tăiat paralel cu axa lui optică, atunci prin iluminarea în incidență normală, diferența între vitezele de propa-

gare ale celor două radiații polarizate, pe baza fenomenului de birefringență, este maximă. Care este grosimea minimă pe care trebuie să o aibă lama de cuarț pentru ca diferența de fază între cele două radiații, la ieșirea din cristal, să fie $\varphi = \frac{\pi}{4}$?

4.2.59. Să se determine unghiul de incidență i_B sub care trebuie să cadă un fascicul de lumină pe suprafața unei lame de flint cu $n = 1{,}9$ pentru ca lumina reflectată în aer ($n = 1$) să fie total polarizată?

4.2.60. Ce unghi trebuie să facă un fascicul de lumină provenit de la soare cu suprafața-orizontală a apei dintr-un bazin ($n_{apă} = 4/3$), pentru ca lumina reflectată pe suprafața apei să fie total polarizată?

4.2.61. Două prisme Nicol sînt aliniate, astfel încît lumina care iese din prisma-analizor are intensitatea pe jumătate față de intensitatea la intrare. Să se determine unghiul dintre planele principale ale analizorului și polarizorului.

4.2.62. Cu ajutorul a două prisme Nicol aliniate se observă lumina provenită succesiv de la două surse de lumină. Să se determine raportul intensităților luminii provenite de la cele două surse, dacă intensitatea luminii la ieșirea din prisma-analizor (lumina emergentă) este aceeași cînd unghiul dintre secțiunile principale ale celor doi nicoli este 30° pentru una din surse și respectiv, 60° pentru cealaltă sursă.

Rezolvări și soluții

4.1.1. Prin deplasarea oglinzii din poziția O_1 în poziția O_2, imaginea punctului fix A rămîne pe normala AI_1I_2 (fig. 4.30):

$$A_1'A_2' = 2\ AI_2 - 2\ AI_1 = 2I_1I_2.$$

Imaginea A_2' s-a deplasat în același sens cu oglinda și pe o distanță dublă.

4.1.2. Fie A un punct luminos și M_1 și M_2 pozițiile unei oglinzi plane înainte și după rotația acesteia cu un unghi α în jurul unei axe ce trece prin O (fig. 4.31). Fie Δ dreapta de intersecție a planelor oglinzii corespunzătoare celor două poziții; planul figurii conține punctul luminos A și este perpendicular pe Δ, iar O este urma lui Δ. Unghiul de rotație al oglinzii este α, făcut de OM_1 și OM_2. Cum A_1' și A_2' sînt simetricele lui A în raport

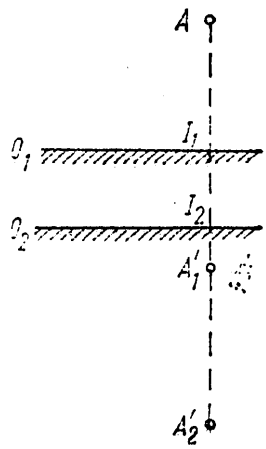


Fig. 4.30.

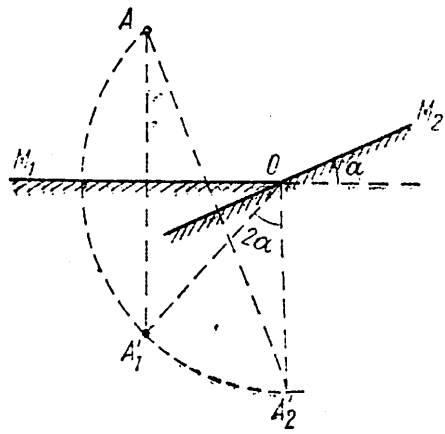


Fig. 4.31.

cu M_1 și respectiv M_2, deplasarea lui A_1' în A_2' reprezintă produsul a două simetrii; avem deci o rotație în jurul lui O de un unghi 2α.

Se poate remarca de asemenea că A, A_1' și A_2' aflîndu-se la aceeași distanță de O se află pe un cerc de centru O și de rază OA (fig. 4.31), de unde rezultă:

$$A_1'OA_2' = 2A_1'AA_2' = 2\alpha.$$

Remarcă. Această proprietate are aplicații în cazul micilor rotații la unele aparate de măsură de mare precizie (galvanometru cu cadru mobil, balanța analitică etc.), cunoscute sub numele de *metoda Poggendorff*.

4.1.3. Cînd oglinda este în poziția O (fig. 4.14), unghiul de incidență este zero și raza reflectată se întoarce după IS.

În poziția O', oglinda și în același timp, normala în punctul de incidență I s-au rotit cu un unghi α:

$$i = \alpha, \qquad i + r = 2\alpha \qquad \text{și} \qquad SR = IS \operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$SR = 100 \operatorname{tg} 16^\circ = 28{,}7 \text{ cm}.$$

4.1.4. Imaginea obiectului CB este $C'B'$, iar porțiunea utilă din oglindă pentru a primi în ochi razele provenite de la extremitățile B și C ale obiectului, după reflexia acestora pe oglindă, este limitată în figură de punctele D și E (fig. 4.32).

Din geometria figurii și anume, din asemănarea triunghiurilor ADE și $AC'B'$, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, rezultă că $DE = \frac{C'B'}{2} = \frac{CB}{2} = 87{,}5$ cm, iar din asemănarea triunghiurilor $B'EE'$ și $B'AB$, cu același raport de asemănare $\frac{1}{2}$, rezultă că $EE' = \frac{AB}{2} = 80$ cm. Deci înălțimea minimă a oglinzii este $DE = 87{,}5$ cm, iar înălțimea de la podea este $EE' = 80$ cm.

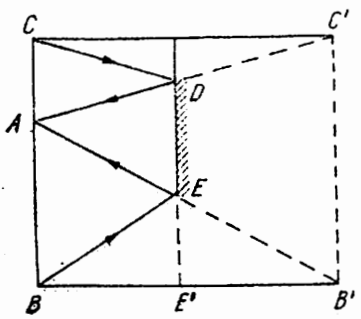


Fig. 4.32.

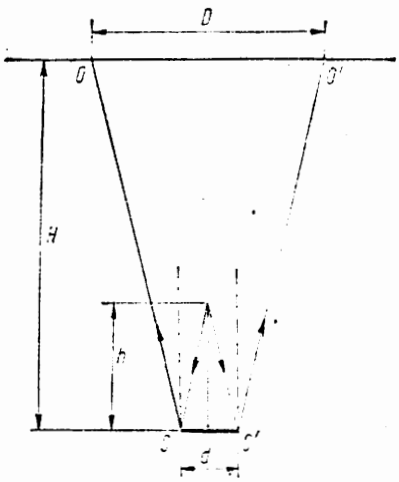


Fig. 4.33.

4.1.5. Fasciculul de lumină reflectat de oglindă formează un trunchi de con cu baza mare pe plafon, baza mică fiind însăși oglinda. Din asemănarea triunghiurilor din figura 4.33, rezultă:

$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{D}{2} - \frac{d}{2}} = \frac{h}{H} \qquad \text{sau} \qquad \frac{d}{D-d} = \frac{h}{H}.$$

Din care deducem:

$$D = \frac{d \cdot H + d \cdot h}{h} = \frac{0{,}10 \times 2 + 0{,}10 \times 0{,}50}{0{,}50} = \frac{0{.}100}{0{,}50} = 0{,}50 \text{ m}.$$

4.1.6. Fiecare reflexie de pe prima oglindă pe a doua este echivalentă cu o rotire a primei oglinzi cu un unghi α și deci o deviere cu 2α a razei reflectate față de direcția razei incidente (vezi problema 4.1.2). Rotația razei reflectate se produce în sensul în care

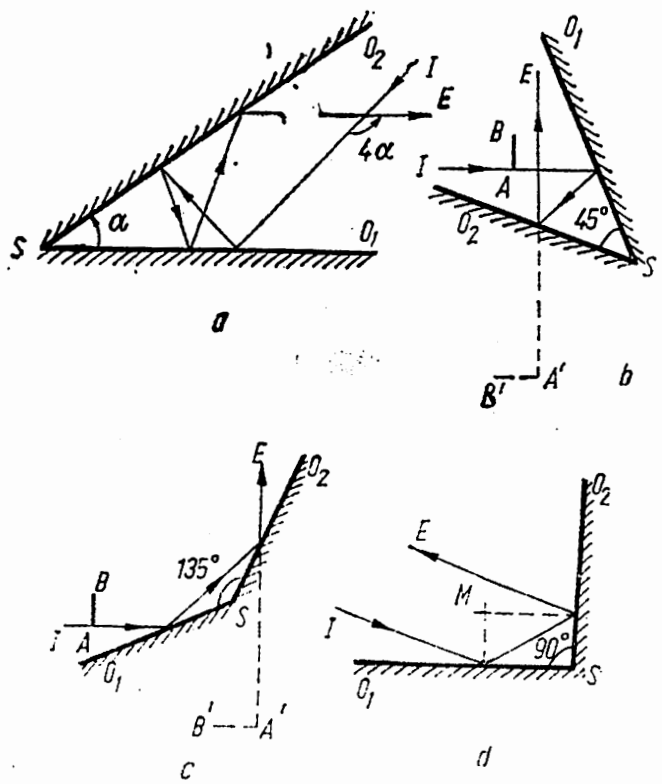


Fig. 4.34.

am roti oglinda O_1 spre oglinda O_2. Pentru reflexia următoare, succesiv pe cele două oglinzi, raza emergentă va fi deviată cu 4α față de direcția razei incidente (fig. 4.34, *a*).

a) Pentru $\alpha = 45°$, raza emergentă E este perpendiculară pe direcția razei incidente (fig. 4.34, *b*). Aceeași situație în cazul a două oglinzi plane care fac un unghi $\alpha = 135°$ (fig.4.34, *d*). Un sistem de astfel de oglinzi constituie un echer optic.

În figurile 4.34, *b* și *c* sînt arătate și imaginile $A'B'$ ale unui obiect AB date de un sistem de oglinzi care fac între ele 45° sau 135°.

b) Pentru $\alpha = 90°$, raza emergentă este antiparalelă în raport cu raza incidentă (fig. 4.34, *d*).

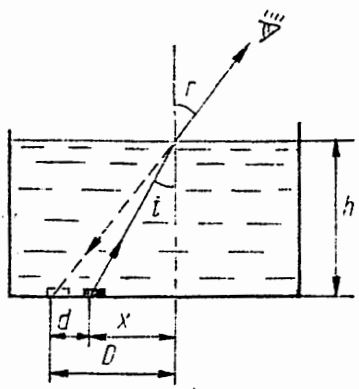


Fig. 4.35.

4.1.7. Cu notațiile din figura 4.35, putem scrie $x = h \operatorname{tg} \beta$ și $x' = h \operatorname{tg} \alpha$; iar distanța dintre monedă și punctul în care bastonul atinge fundul bazinului este:

$$d = x' - x = h(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

Folosind legea refracției: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ se obține:

$$d = h\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = h\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right) = h\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right).$$

Făcînd înlocuirile cu valorile numerice rezultă:

$$d = 50\left(1 - \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{1}{2}}}\right) = 18{,}8 \text{ cm}.$$

4.1.8. Dintre razele de lumină care pornesc din sursa S spre suprafața apei vor ieși din apă prin refracție numai acelea pentru care unghiul de incidență este mai mic decît unghiul limită corespunzător, definit de: $\sin l = \frac{n_1}{n_2} = \frac{3}{4}$, adică $l = 48°35'$.

Razele refractate la suprafața apei sînt limitate pe aceasta de intersecția unui con cu vîrful în sursa S și de semiunghi l (fig. 4.36); razele din afara acestui con suferă la suprafața apei reflexie totală.

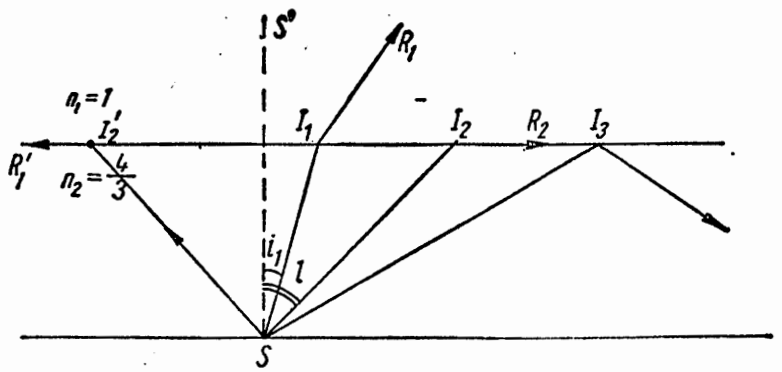


Fig. 4.36.

Raza cercului luminos observat pe suprafața apei este:

$$R = S'I_3 = SS' \operatorname{tg} l = 1 \operatorname{tg} 48°35' = 1{,}13 \text{ m}.$$

4.1.9. 1°. În punctul I_1 (fig. 4.37, *a*) producîndu-se fenomenul de reflexie totală, aceasta impune: $i_1 \geqslant l$, unghiul l fiind definit de: $\sin l = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}$ (am considerat indicele de refracție al aerului $n_2 = 1$).

Dacă considerăm că situația reprezintă chiar cazul limită ($i_1 = l = 45°$), ar rezulta:

$$n_{\min} = \frac{1}{\sin 45°} = 1{,}41.$$

Concluzia: $n \geqslant 1{,}41$.

$$2°.\ \sin l' = \frac{n_a}{n} = \frac{4/3}{1{,}41} = 0{,}946; \qquad l' = 71°10'.$$

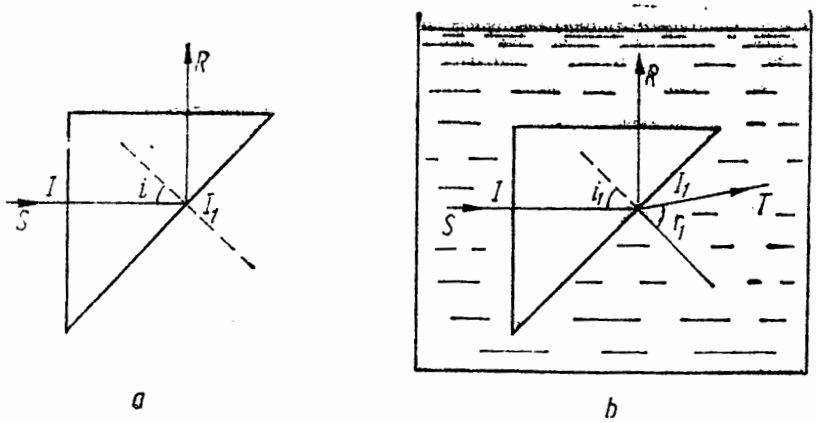


Fig. 4.37.

Concluzia: $i_1 = 45° < l'$ deci, în punctul I (fig. 4.37, *b*), razele de lumină se reflectă numai parțial, o parte din ele ies din prismă.

4.1.10. Din figura 4.38 se observă $r = r'$ și din legile refracției rezultă $i = i'$: deci raza emergentă este paralelă la raza incidentă.

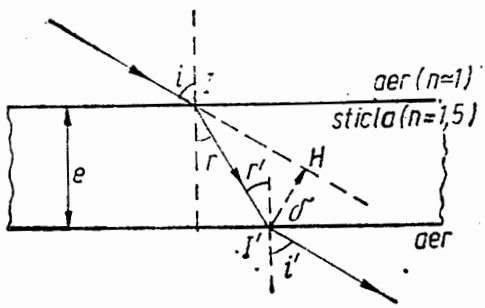


Fig. 4.38.

Deplasarea δ a razei emergente de la direcția razei incidente este:

$$\delta = I'H = II' \sin (i - r); \quad II' = \frac{e}{\cos r};$$

rezultă $$\delta = e \frac{\sin (i - r)}{\cos r}.$$

Din: $\sin i = n \sin r$ rezultă:

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1{,}5}.$$

Cu datele: $i = 60°$, $e = 5$ cm, $\sin(i - r) = \sin 24°46'$, $r = 35°14'$ rezultă: $\delta = 2{,}5$ cm.

4.1.11. Notînd cu $n_1, n_2, \ldots, n_p$, indicii de refracție ai celor p medii și scriind legea refracției pentru fiecare suprafață de separație:

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{n_3}{n_2}, \ldots, \qquad \frac{\sin i_p}{\sin r_p} = \frac{n_p}{n_{p-1}}$$

și ținînd seamă de faptul că: $i_2 = r_1$, $i_3 = r_2$, ..., $i_k = r_{k-1}$, prin înmulțirea egalităților de mai sus se obține:

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_p} = \frac{n_p}{n_1} \quad \text{sau} \quad \sin r_p = \frac{n_1 \sin i_1}{n_p}.$$

4.1.12. Se vizează succesiv imaginea trăsăturii B de pe fața superioară a lamei L_2, apoi imaginea A' a trăsăturii A de pe lama L_1, imagine privită prin lama L_2 și în fine, imaginea A observată direct, după înlăturarea lamei L_2.

Notăm: $h_1 = BA' = 2{,}13$ mm și $h_2 = A'A = 1{,}09$ mm.

Deplasarea totală este echivalentă cu grosimea lamei

$$e = h_1 + h_2 = 3{,}22 \text{ mm}.$$

Din constanța drumului optic rezultă:

$$e = nh_1$$

și

$$n = \frac{e}{h_1} = \frac{3{,}22}{2{,}13} = 1{,}51.$$

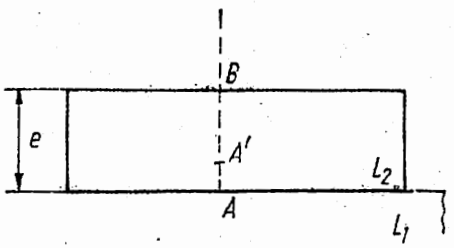


Fig. 4.39.

4.1.13. Pentru ca raza de lumină care a pătruns în prismă să se reflecte total în punctul I, trebuie ca

$$n' < n \quad \text{și} \quad \sin 60° = \frac{n'}{n} \quad \text{sau}$$

$$n' = n \sin 60° = 1{,}30.$$

4.1.14. Emergența razei II' este condiționată de:

a) A și n ale prismei și b) unghiul de incidență i.

a) $-l \leqslant r_2 \leqslant +l$ sau $-l \leqslant (A - r_1) \leqslant +l$, sau $r_1 - l \leqslant A \leqslant r_1 + l$ unde l este unghiul limită definit de $\sin l = \frac{1}{n}$, iar semnul plus se consideră cînd sensul de la normală spre rază este cel direct (trigonometric) și minus în caz contrar. Ținînd seama că valoarea maximă a lui r_1 este l (corespunzător incidenței razante), egalitatea de mai sus este satisfăcută totdeauna. Valoarea maximă a lui $(r_1 + l)$ este $2l$ și condiția impusă prismei este:

$$A \leqslant 2\,l.$$

b) Dubla inegalitate $-l \leqslant A - r_1 \leqslant l$ se poate scrie încă

$$A + l \geqslant r_1 \geqslant A - l.$$

Prima inegalitate este totdeauna verificată; a doua, $r_1 \geqslant (A - l)$ și pentru valoarea extremă $r_0 = A - l$ corespunde incidenței i_0 definite prin

$$\sin i_0 = n \sin (A - l).$$

Condiția $r_1 > r_0$ implică condiția impusă razei incidente:

$$i_1 \geqslant i_0$$

și i_1 nu poate lua valori decît între i_0 și $\frac{\pi}{2}$.

Aplicație numerică:

$A = 60°$, $n = 1{,}5$, $\lambda = 41°48'$;

deci:

$l < A < 2\,l$: $\sin i_0 = 1{,}5 \sin (60° - 41°48')$

rezultă $i_0 = 28°$ și $90° \geqslant i_1 \geqslant 28°$.

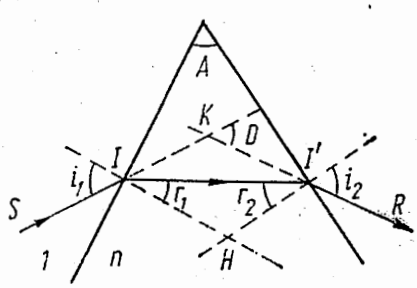


Fig. 4.40.

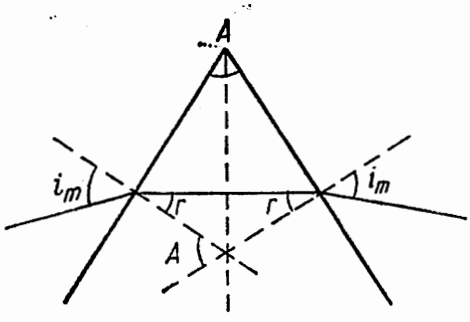


Fig. 4.41.

4.1.15. Considerînd unghiul A și indicele de refracție n al materialului din care este confecționată prisma ca fiind constante și diferențiind cele patru formule ale prismei (4.9) și (4.10) se obține:

$$\cos i_1 di_1 = n \cos r_1 dr_1 (1');$$

$$\cos i_2 di_2 = n \cos r_2 dr_2 (2');$$

$$o = dr_1 + dr_2 (3');$$

$dD = di_1 + di_2 (4')$, sau:

$$\frac{dD}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 + \frac{n \cos r_2 \, dr_2}{n \cos r_1 \, dr_1} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i_2} = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos i_1} \cdot \frac{\cos r_1}{\cos i_2}.$$

Pentru $i_1 = i_0$, $i_2 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{dD}{di_1} = -\infty$; cu $\sin i_0 = n \sin (A - 1)$ pentru $i_1 = \frac{\pi}{2}$, $i_2 = i_0$, $\frac{dD}{di_1} = 1$; deci între i_0 și $\frac{\pi}{2}$, în intervalul în care poate să varieze i_1, derivata se anulează cel puțin odată; funcția prezintă un extremum pentru valorile lui i_1 rădăcini ale ecuației:

$$\cos r_1 \cos i_2 = \cos r_2 \cos i_1,$$

Ridicăm la pătrat și exprimăm pe r_1 și r_2 în funcție de i_1 și i_2:

$$\left(1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}\right)(1 - \sin^2 i_2) = \left(1 - \frac{\sin^2 i_2}{n^2}\right)(1 - \sin^2 i_1),$$

ecuație care se reduce la

$$\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2 = 0,$$

de unde $i_1 = \pm i_2$; soluția $i_1 = -i_2$ o înlăturăm, deoarece duce la $r_1 = -r_2$ și deci $A = 0$.

Singura soluție acceptabilă este $i_1 = i_2$ (pe care o vom nota cu i_m). Extremum corespunzător pentru D este un minim, deoarece derivata mai întîi negativă pentru $i_1 < i_m$ devine pozitivă pentru $i_1 > i_m$. Variațiile deviației D sînt rezumate în tabelul următor:

i_1	i_0	i_m	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dD}{di_1}$	$-\infty$	-0	$+1$
D	D_0 ↘	D_{min} ↗	D_0

unde D_0 are valoarea $D_0 = i_0 + \frac{\pi}{2} - A$.

Pentru minimum de deviație avem $i_1 = i_2 = i_m$, ceea ce duce la $r_1 = r_2 = \frac{A}{2}$, astfel, $D_{min} = 2 i_m - A$.

Rezultă că traiectoria razei corespunzătoare minimului de deviație este simetrică în raport cu planul bisector al prismei. Cum $r_m = \frac{A}{2}$ și $i_m = \frac{A + D_{min}}{2}$, rezultă:

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Această relație este foarte importantă, ca stă la baza unei metode de determinare a indicelui de refracție.

4.1.16. În condițiile deviației minime, traiectul razei fiind simetric în raport cu planul bisector al diedrului A, prisma se comportă ca o oglindă plană M' perpendiculară în K pe AH. (fig. 4.16). Deviația D produsă de sistemul prismă + oglinda M este aceea pe care ar produce-o un ansamblu de două oglinzi plane M și M', adică dublul unghiului format de normalele la acestea:

$$D = 2\beta = \pi - 2\ \alpha,$$

α fiind unghiul format de planul oglinzii M cu planul bisector al diedrului A.

D este independent de unghiul prismei (A) și de radiația folosită, singura condiție fiind aceea ca prisma să fie la minimum de deviație pentru lumina incidentă.

4.1.17. 1°. Pentru deviația minimă:

$$i = \frac{A + D_m}{2} = 60°, \qquad n_1 = \frac{\sin i}{\sin \frac{A}{2}} = 1{,}75.$$

2°. Unghiul din I' făcut de raza refractată II' cu raza reflectată $I'I''$ (fig. 4.17) este dublul unghiului de reflexie $2r = 60°$.

Rezultă că $II'I''B$ este un paralelogram și:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = 30°, \text{ iar din: } \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2}$$

rezultă:

$$\sin \gamma = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \quad \text{și} \quad \gamma = 45°.$$

Raza emergentă $I''I'''$ cade normal pe fața BD și își continuă drumul nedeviată; deci unghiul din I''' este de 90°.

4.1.18. 1°. Prin refracție, raza este deviată cu $(i - r)$. Fiecare reflexie o deviază în același sens cu $(\pi - 2r)$. În fine, refracția la ieșirea din sferă deviază raza încă cu $(i - r)$.

În cazul a p reflexii, deviația totală este:

$$D = 2(i - r) + p(\pi - 2r),$$

sau

$$D = p\pi + 2i(p + 1)r.$$

4.1.19. 1°. Din relația: $A = r + r' = 2r$, rezultă $r = A/2 = 30°$. Unghiul de deviație fiind:

$$D_m = i + i' - (r + r') = 2i - A, \text{ rezultă:}$$

$$i = \frac{A + D_m}{2} = 45°.$$

Indicele de refracție va fi:

$$n_p = n_a \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = 1{,}88.$$

2°. În acest caz, $i = r$ și rezultă:

$$n_m = n_p \frac{\sin r}{\sin i} = n_p = 1{,}88.$$

3°. Pentru ca radiația să nu mai iasă din prismă, trebuie să se producă o reflexie totală, adică ar trebui ca:

$$n_{min} = \frac{\sin l}{\sin i} n_p = \frac{1}{\sqrt{2}/2} \cdot 1{,}88 = 2{,}659.$$

4.1.20. 1°. $p = 0{,}90$ m; $R = 1{,}20$ m;

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} = \frac{2}{1{,}20} - \frac{1}{0{,}90};$$

$$p' = 1{,}80 \text{ m},$$

$$m = -\frac{p'}{p} = -\frac{1{,}80}{0{,}90} = -2 \quad \text{și} \quad A'B' = -10 \text{ cm};$$

imaginea este reală, răsturnată și mărită.

2°. Imaginea $A'B'$ este reală (fig. 4.42).

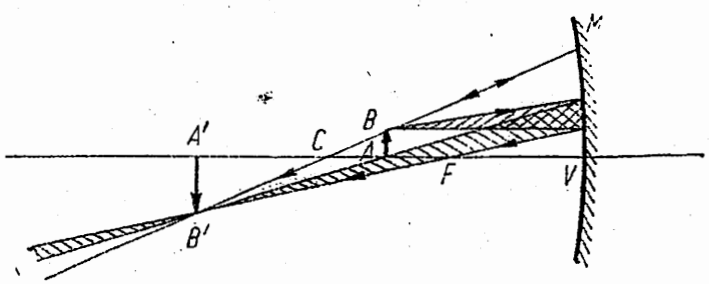


Fig. 4.42.

4.1.21. 1°. $p = 0{,}30$ m, $R = -0{,}40$ m;

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p}; \quad p' = \frac{p \cdot R}{2p - R} = -0{,}12 \text{ m};$$

$$m = -\frac{p'}{p} = -\frac{-0{,}12}{0{,}30} = 0{,}4;$$

$$A'B' = 2{,}4 \text{ cm};$$

imaginea este virtuală și dreaptă (fig. 4.43).

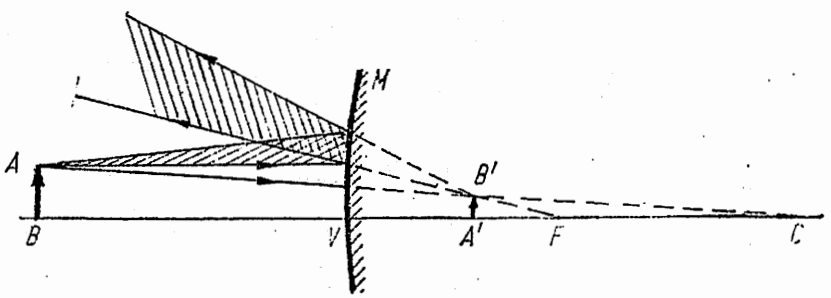


Fig. 4.43.

4.1.22. Din relația $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$ rezultă:

$$p = \frac{R}{2}\left(1 + \frac{p}{p'}\right) = \frac{R}{2}\left(1 + \frac{o}{i}\right), \text{ din care se obține:}$$

1°. $p_1 = 18$ m, pentru $\frac{o}{i_1} = 5$ — imagine reală,

2°. $p_2 = 3{,}6$ m, pentru $\frac{o}{i_2} = \frac{1}{5}$ — imagine reală,

3°. $p_3 = 2{,}4$ m, pentru $\frac{o}{i_3} = \frac{1}{5}$ — imagine virtuală.

4.1.23. Din formula oglinzilor sferice, obținem

$$p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{50 \cdot 45}{50 - 45} = 450 \text{ cm},$$

p' reprezentînd distanța la care s-ar forma imaginea A' a punctului A în lipsa oglinzii plane. Această imagine joacă rolul de obiect virtual pentru oglinda plană și aceasta din urmă va da o imagine reală A'' care, pentru a se forma chiar în punctul obiect A, condiția necesară este ca oglinda plană să se așeze perpendicular pe axa comună și la jumătatea segmentului AA', adică la o distanță

$$VO = VA' - \frac{AA'}{2} = p' - \frac{p' - p}{2} = \frac{p' + p}{2} = 250 \text{ cm} = 2{,}50 \text{ m (fig. 4.44)}.$$

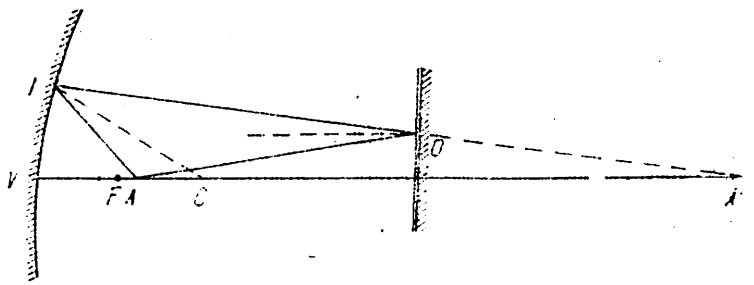


Fig. 4.44.

4.1.24.

1°. $p' = \frac{p \cdot f}{p - f} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ m; $\qquad i = o\,\frac{p'}{p} = 2{,}5$ cm.

2°. Imaginea $A'B'$ devine obiect virtual pentru oglinda plană (fig. 4.45) și va da o imagine reală $A''B''$ egală cu $A'B'$ și simetrică cu aceasta în raport cu planul oglinzii plane:

$$A''B'' = A'B' = i = 2{,}5 \text{ cm}.$$

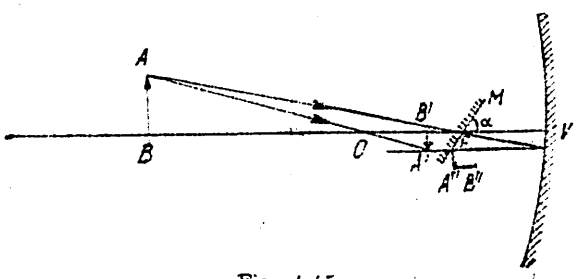


Fig. 4.45.

Oglinda plană fiind înclinată cu 45° față de axul principal, imaginea $A''B''$ este paralelă cu axa, la distanța $FB'' = FB' = p' - f = 25$ cm. Ecranul trebuie așezat paralel cu axa principală și la distanța de 25 cm de aceasta.

4.1.25. În figura 4.46, considerăm punctul luminos A ca obiect pentru oglinda *1* și imaginea reală A' dată de aceasta, ca obiect pentru oglinda *2*: pentru ca imaginea reală dată de aceasta din urmă să coincidă cu punctul luminos-obiect, folosind formula oglinzilor sferice, cu notațiile din figura 4.46 rezultă:

$$p' = \frac{pf}{p - f}; \quad p_1 = d - p' \text{ și}$$

$$p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = \frac{(d - p')f}{d - p' - f};$$

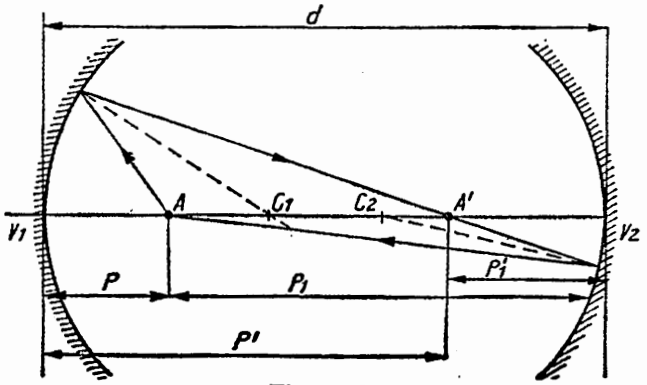


Fig. 4.46.

pe de altă parte $p_1' = d - p$, deci $d - p = \frac{df - p'f}{d - p' - f}$ în care înlocuind și expresia lui $p_1' = \frac{pf}{p - f}$, se obține relația:

$$p^2 - pd + fd = 0 \text{ sau } p = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$$

și pentru că p trebuie să fie real, rezultă condiția $d \geqslant 4f$.

4.1.26. Din fiecare punct al discului luminos pleacă un fascicul care după reflexie pe oglindă este transformat într-un fascicul cilindric de direcție paralelă cu dreapta care unește punctul respectiv cu centrul oglinzii; fasciculele extreme $M'P'$ și MP sînt paralele la CA și respectiv CB. Ecranul E interceptează fasciculul reflectat după un cerc de diametru PP' (fig. 4.47). Triunghiurile $P'M'N'$ și CFA sînt asemenea:

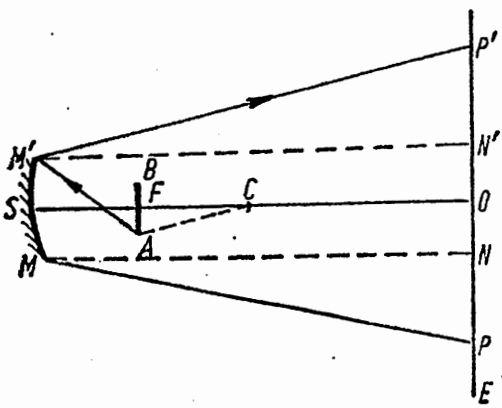


Fig. 4.47.

$$\frac{N'P'}{FA} = \frac{SO}{CF} \text{ sau } N'P' =$$

$$= \frac{FA \times SO}{CF} = \frac{0{,}02 \cdot 100}{0{,}25} = 8 \text{ m.}$$

Diametrul cercului luminos va fi:

$$D = 16{,}04 \text{ m.}$$

4.1.27. Prin rotirea vasului în jurul axei de simetrie, fiecare particulă de lichid (mercur) va fi supusă în timpul rotației la două forțe: greutatea și forța centrifugă, astfel încît suprafața liberă a mercurului va fi în orice punct perpendiculară pe rezultanta celor două forțe (fig. 4.48). Din figură putem scrie:

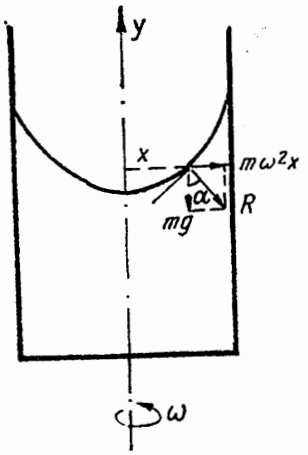


Fig. 4.48.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Pe de altă parte, prin definiție, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ sau $dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx$ sau $dy = \frac{\omega^2}{g} x \cdot dx$; integrînd obținem $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$. Ultima expresie reprezintă ecuația unei parabole; deci suprafața liberă a mercurului din vas, în timpul rotației acestuia, va fi o suprafață parabolică a cărei distanță focală este $f = \frac{g}{2\omega^2} \cong 4{,}9$ m.

4.1.28. Dacă considerăm două lentile subțiri apropiate, atît cît permit dimensiunile geometrice și sistemul astfel format, îl putem încă asimila cu o lentilă subțire, originea sistemului o considerăm în centrul comun al lentilelor. Prima lentilă va da imaginea unui punct-obiect, la distanța p_1 de centru, astfel încît:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_1}.$$

A doua lentilă dă pentru obiectul situat la distanța p_1 corespunzînd imaginii date de prima lentilă, o imagine la distanța p', astfel că:

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2}.$$

Rezultă că lentilei subțiri echivalente celor două lentile asociate îi corespunde:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f'};$$

convergența sa: $C = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = C_1 + C_2$ este deci suma convergențelor celor două lentile.

Concluzia poate fi generalizată pentru n lentile asociate, cu condiția de a putea considera lentila rezultantă ca subțire.

4.1.29. 1°. Pentru fața plană, $R_2 = \infty$ și

$$P = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{0{,}2}\right) = 2{,}5 \text{ dioptrii},$$

$$f = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \text{ m (lentilă convergentă)}.$$

2°. Figura 4,49. Imaginea virtuală $A'B'$ se află de aceeași parte cu obiectul AB în raport cu lentila L.

Din relația: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$, rezultă $p' = -13{,}3$ cm.

Mărirea $m = -\frac{p'}{p} = -\frac{-13{,}3}{10} = 1{,}33$; $A'B' = 1{,}33$ mm.

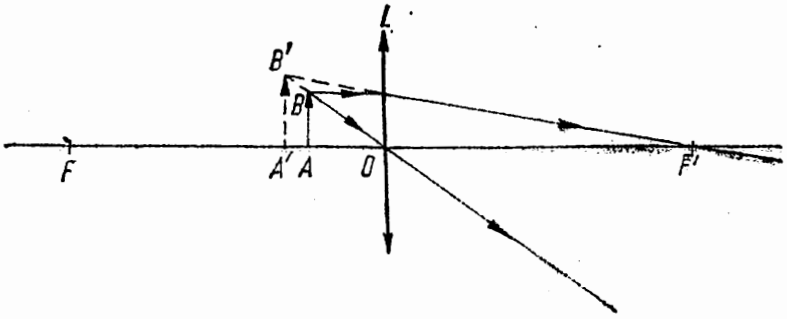


Fig. 4.49.

4.1.30. 1°. $R_1 = -20$ cm, $R_2 = +30$ cm, $n = 1{,}5$;

$$P = \frac{1}{f} = (1{,}5 - 1)\left(-\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}3}\right) = -4{,}166 \text{ d}; \quad f = -0{,}24 \text{ m}.$$

Lentila este divergentă.

2°. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$; $p' = -7{,}06$ cm; $\gamma = -\frac{p'}{p} = \frac{7{,}06}{10} = 0{,}706$;

imaginea este de aceeași parte cu obiectul în raport cu lentila, este virtuală, dreaptă și mai mică decît obiectul (fig. 4.50).

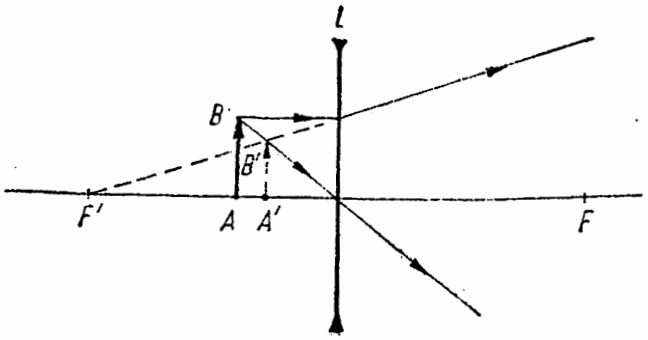


Fig. 4.50.

4.1.31. Notînd cu N indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila L, cu R raza de curbură a dioptrului sferic și considerînd sistemul format dintr-o lentilă plan-convexă de indice N, o lentilă plan-concavă de indice n și o lamă cu fețe paralele și folosind formula convergenței putem scrie:

$$\frac{1}{F} = (N - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right) + (n - 1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) + 0.$$

Introducînd în această relație, succesiv, valorile indicelui de refrație ai lentilei plan-concave (cuva propriu-zis): $n = 1$, $n = 4/3$ și $n = n'$, se obține $F = f_1$, apoi f_2, apoi f_3. Deci:

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{N-1}{R}; \quad \frac{1}{f_2} = \frac{n-1}{R} - \frac{N-1}{R} = \frac{n-N}{R}; \quad \frac{1}{f_3} = \frac{n'-N}{R}$$

din care rezultă

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{n-1}{R}, \quad \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_1} + \frac{n'-1}{R}$$

sau

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 f_2} \text{ și } \frac{n'-1}{R} = \frac{f_1 - f_3}{f_1 f_3};$$

rezultă:

$$n' - 1 = (n-1)\frac{f_2(f_1 - f_3)}{f_3(f_1 - f_2)}$$

sau

$$n' = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{150(50 + 227)}{(-227) \cdot (-100)} = 1{,}6101.$$

4.1.32. Notînd cu f_r și f_v distanța focală a lentilei pentru lumina roșie și respectiv, pentru lumina violetă și folosind expresia convergenței: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ se obține:

$$f_r = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(n_r - 1)} \text{ și } f_v = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(n_v - 1)}.$$

Rezultă pentru distanța care separă cele două focare:

$$\Delta f = f_r - f_v = \frac{R_1 R_2 (n_r - n_v)}{(R_1 + R_2)(n_r - 1)(n_v - 1)};$$

$$\Delta f = \frac{0{,}5 \cdot 1(1{,}525 - 1{,}510)}{(0{,}5 + 1)(1{,}510 - 1)(1{,}525 - 1)} = 1{,}87 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

4.1.33. Prima lentilă ar da o primă imagine la distanța $p_1' = \frac{p_1 \cdot f}{p_1 - f} = 0{,}110$ m; aceasta va juca rol de obiect virtual pentru lentila divergentă și aflîndu-se la $p_2 = p_1' - d = 0{,}60$ m, adică între focar și lentila divergentă, aceasta va da o imagine finală reală, răsturnată în raport cu obiectul și aflată la distanța $p_2' = \frac{p_2 f_2}{f_2 - p_2} = 1{,}80$ m față de lentila divergentă.

4.1.34. 1°. Convergența primei lentile este:

$$C_1 = \frac{1}{f_1'} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right).$$

Distanța focală-imagine a acestei lentile este: $f_1' = \frac{-R}{n_1 - 1}$.

Convergența celei de-a doua lentile este:

$$C_2 = \frac{1}{f_2'} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Distanța focală a lentilei a doua este: $f_2' = \frac{RR'}{(n_2 - 1)(R' + R)}$.

2°. Convergența obiectivului constituit din cele două lentile alipite este:

$$C = C_1 + C_2 \text{ sau } \frac{1}{F'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{R'(n_2 - n_1) + R(n_2 - 1)}{RR'}.$$

Distanța focală-imagine a obiectivului este:

$$F' = \frac{1}{\frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}}.$$

3°. Deoarece obiectivul este acromatic, $F'_{galben} = F'_{albastru} = 12$ cm, relația $\frac{1}{F'} = \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}$ se scrie în lumină galbenă: $\frac{1}{12} = -\frac{0{,}105}{R} + \frac{0{,}512}{R'}$ și în albastru: $\frac{1}{12} = -\frac{0{,}111}{R} + \frac{0{,}518}{R'}$ și scăzînd cele două relații se obține: $0 = \frac{0{,}006}{R} + \frac{0{,}006}{R'}$ rezultă $R = R' = 4{,}88$ cm.

4.1.35. Notînd cu F distanța focală a sistemului (fig. 4.51) R și folosind formula lentilelor subțiri

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \quad \text{rezultă} \quad F = 15 \text{ cm}.$$

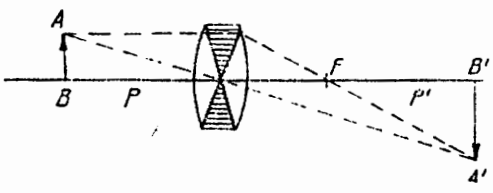


Fig. 4.51.

Notînd cu x distanța focală a lentilei divergente (lichidă) și folosind relația care dă convergența sistemului:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x} + \frac{1}{f},$$

rezultă $x = -30$ cm.

Notînd cu R raza de curbură, aceeași pentru toți dioptrii sistemului, din formula care dă convergența uneia din lentilele identice, în funcție de indicele de refracție:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{2}{R}\right), \quad \text{rezultă } R = 20 \text{ cm}$$

și aceeași formulă, scrisă pentru lentila divergentă

$$\frac{1}{(-x)} = (n' - 1)\left(\frac{2}{-R}\right), \quad \text{dă } n' = \frac{4}{3}.$$

4.1.36. 1°. Fie p_1, p_1' și p_2, p_2' distanțele obiect-lentilă, respectiv lentilă-ecran, în cele două cazuri.

Ținînd seama de relațiile din enunțul problemei și folosind formulele lentilelor subțiri avem:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} \quad (1); \quad p_2 = p_1 + a \quad (2);$$

$$m_1 = \frac{p_1'}{p_1}, \quad m_2 = \frac{p_2'}{p_2}. \quad (3)$$

Introducînd (2) și (3) în (1) obținem:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{m_1p_1}=\frac{1}{p_1+a}+\frac{1}{m_2(p_1+a)},\quad \text{rezultînd: } p_1=\frac{m_2a(1+m_1)}{m_1-m_2}.$$

Înlocuind valorile numerice: $a=5$ cm, $m_1=\frac{i_1}{o}=\frac{20}{5}=4$, $m_2=\frac{i_2}{o}=\frac{10}{5}=2$, obținem $p_1=25$ cm, $p_1'=100$ cm, $f_1=20$ cm.

Din formula convergenței: $\frac{1}{f_1}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, obținem

$$n=1+\frac{1}{f_1}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=1+\frac{18}{2{,}20}=1{,}45,\ n=1{,}45.$$

2°. Notînd: $p=d-p_1'=110-100=10$ cm, p' și $f=30$ cm, elementele celei de-a doua lentile, obținem:

$$p'=\frac{pf}{p-f}=\frac{10\cdot 30}{10-30}=-15 \text{ cm}.$$

Deci imaginea finală se află la distanța:

$D=d+(-p')=110-15=95$ cm față de prima lentilă (fig. 4.52).

$$D=95 \text{ cm}.$$

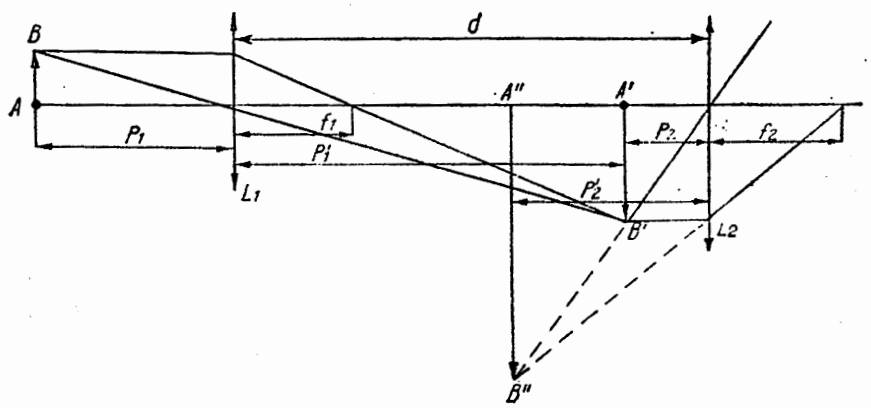


Fig. 4.52.

3°. Imaginea este virtuală, răsturnată și mărită, sistemul comportîndu-se ca un microscop. Dimensiunea imaginii finale o deducem din:

$$\frac{B''A''}{BA}=\left(\frac{B''A''}{B'A'}\right)\left(\frac{B'A'}{BA}\right)=\left(\frac{p_1'}{p_1}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)=\left(\frac{100}{25}\right)\left(-\frac{15}{10}\right)=-6,$$

de unde: $B''A''=6$, $BA=30$ cm.

4.1.37. 1°. Din relația: $\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$ rezultă $p'=p\frac{i}{o}=60$ cm și din:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'};\ f=\frac{pp'}{p+p'}=20 \text{ cm}.$$

Din: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right)$, rezultă

$$R = f(n-1) = 10 \text{ cm}.$$

2°. $\frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) = \left(\frac{n - n_a}{R \cdot n_a}\right)$; $f' = \frac{n_a}{n - n_a} \cdot R = 80$ cm.

3°. $p_1' = \frac{p_1 f'}{p_1 - f'} = \frac{30 \cdot 80}{30 - 80} = -48$ cm; $i' = \delta \frac{p_1'}{p_1} = 5 \cdot \frac{48}{30} = 8$ cm

4°. $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_x}$; $f_x = -26{,}6$ cm (lentilă divergentă).

4.1.38. Folosind notaţiile obişnuite: p, p', f pentru distanţele obiect-lentilă, lentilă-imagine, respectiv distanţa focală şi $x = p + p'$, formula lentilelor subţiri se scrie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{x - p},$$

din care scoatem pe x în funcţie de p:

$$x = \frac{p^2}{p - f},$$

care pentru imaginile reale trebuie să satisfacă: $p \in (f, \infty)$.

Distanţa x va fi minimă pentru:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{p^2 - 2pf}{(p-f)^2} = 0$$

cu soluţia acceptabilă

$p = p_0 = 2f$, rezultînd pentru distanţa minimă obiect-imagine:

$$x_0 = x(p_0) = \frac{p_0^2}{p_0 - f} = \frac{4f^2}{2f - f} = 4f.$$

4.1.39. 1°. Folosind relaţiile pentru lentilele subţiri:

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} \text{ şi } \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

deducem din prima: $p' = 3p$, care introdusă în cea de-a doua relaţie dă:

$$p = \frac{4f}{3} = \frac{120}{3} = 40 \text{ cm}; \quad p' = 3 \cdot p = 120 \text{ cm}.$$

2°. Prin interpunerea lamei transparente între obiect şi lentilă, se obţine o imagine A_1B_1 mai apropiată de lentilă şi care joacă rolul de obiect pentru aceasta. Apropierea este dată de

$$d = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

În acest caz, distanţa de la imaginea-obiect (A_1B_1) la lentilă este

$$p_1 = p - e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 40 - 9\left(1 - \frac{1}{1{,}8}\right) = 36 \text{ cm}.$$

Distanța de la lentilă pînă la locul unde aceasta va da imaginea $A'B'$ este:

$$p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = \frac{36 \cdot 30}{6} = 180 \text{ cm}.$$

Deci ecranul trebuie depărtat de lentilă cu:

$$l = p_1' - p' = 180 - 120 = 60 \text{ cm}.$$

3°. Imaginea $A''B''$ dată în final de oglinda plană este reală, deoarece obiectul $A'B'$ pentru oglinda plană este virtual; $A''B''$ este simetrică cu $A'B'$ în raport cu planul oglinzii plane, deci egală cu $A'B'$, paralelă cu axa sistemului, punctul B'' aflîndu-se pe verticala OB'', la distanța $OB'' = OB' = p_1' - LO = 180 - 100 = 80$ cm.

4°. Prin plasarea cuvei cu apă în drumul razelor reflectate de oglinda plană O, acestea sînt deviate și se obține o imagine finală $A'''B'''$, deplasată în sensul de înaintare al razelor de lumină, adică spre fundul cuvei; deplasarea este $d = B''B''' = h\left(1 - \frac{1}{n_a}\right)$, unde h este grosimea stratului de apă, iar n_a indicele de refracție al apei. Pentru ca imaginea finală $A'''B'''$ să se formeze pe fundul cuvei, aceasta trebuie să se afle sub axa sistemului, la o distanță $OB''' = OB'' + B''B''' = 80 + 20\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 85$ cm (fig. 4.53).

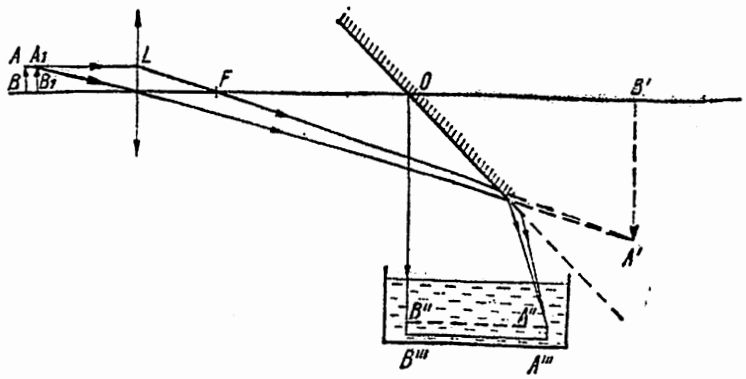


Fig. 4.53.

4.1.40. Pentru lentilă avem:

$p = 30$ cm, $f = 20$ cm și $p' = \frac{pf}{p - f} = 60$ cm, adică lentila ar da o imagine $A'B'$ reală, situată la distanța $p' = 60$ cm de lentilă, ceea ce ar însemna în spatele oglinzii convexe.

Imaginea $A'B'$ constituie obiect virtual pentru oglindă, obiect aflat la $p_1 = VB' = 10$ cm în spatele oglinzii.

Pentru oglindă corespunde: $p_1 = -10$ cm, $f_1 = -\frac{R}{2} = -20$ cm și

$$p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = \frac{(-10) \cdot (-20)}{-10 + 20} = 20 \text{ cm}.$$

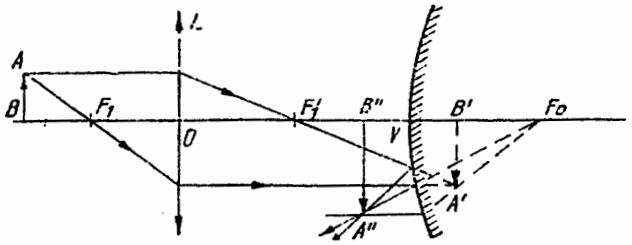


Fig. 4.54.

Imaginea finală $A''B''$ (fig. 4.54) este reală, mai mare decît obiectul și la 20 cm de vîrful oglinzii, spre lentilă, respectiv la distanța:

$$OB'' = OV - B''V = 50 - 30 = 20 \text{ cm de lentilă.}$$

4.1.41. Formula lentilelor convergente subțiri dă:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{f}, \text{ de unde } f = \frac{1}{3} \text{ m.}$$

Ochiul este hipermetrop și se corectează cu lentile convergente de convergență

$$C = \frac{1}{f} = +3 \text{ dioptrii.}$$

4.1.42. Înlocuind în formula lentilelor:

$p = \infty$ și $p' = -1$ m se obține: $f = p' = -1$ m de unde: $C = \frac{1}{f} = -1$ dioptrie, lentila trebuie să fie divergentă de o dioptrie.

4.1.43. Amplitudinea de acomodare este dată de:

$$K = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ dioptrii.}$$

4.1.44. În figura 4.55, pentru obiectiv avem:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_{ob}} \text{ sau } \frac{1}{p_1} = \frac{1}{0{,}8} - \frac{1}{16}$$

rezultă:

$$p_1 = 0{,}842 \text{ cm și } \frac{p_1'}{p_1} = 19.$$

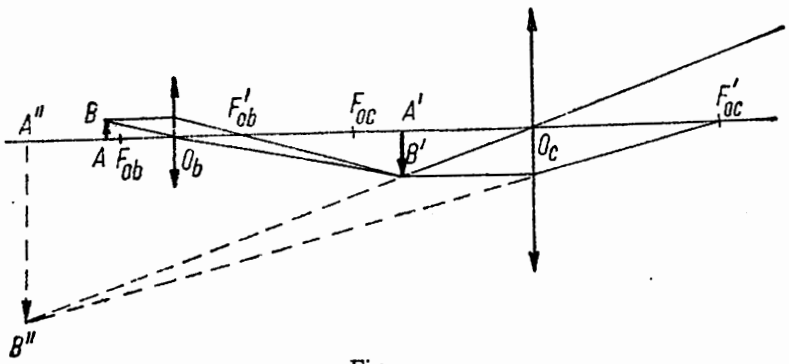


Fig.

Pentru ocular: $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_{oc}}$ sau $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{2,5}$

rezultă:

$$p_2 = 2,272 \text{ cm} \quad \text{și} \quad \frac{p_2'}{p_2} = 11.$$

Mărirea microscopului este $G = 19 \times 11 = 209$.

4.1.45. Convergența unui ochi normal atunci cînd privește obiecte așezate la infinit este

$$C = \frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{p'} \rightarrow C = \frac{1}{p'},$$

p' fiind distanța de la centrul optic al cristalinului la retină.

Pentru obiecte situate la distanțe finite p de ochi, convergența ochiului devine:

$$C' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + C$$

considerînd că p' a rămas practic, constant.

Rezultă: $\Delta C = C' - C$; $\Delta C_1 = 1\text{d}$, $\Delta C_2 = 4\text{d}$, $\Delta C_3 = 10\text{d}$.

4.1.46. Notînd cu f' distanța focală a lentilei adiționale, trebuie ca:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \text{ de unde rezultă: } f' = 30 \text{ cm}.$$

Lentila adițională trebuie să fie convergentă cu $f' = 30$ cm.

4.1.47. a) Distanța focală a obiectivului este:

$$f_{ob} = \frac{1}{C} = 1 \text{ cm}.$$

Aparatul fiind pus la punct pentru infinit, imaginea dată de obiectiv se formează la distanța $p' = f_{ob} + D = 17$ cm și din formula lentilelor rezultă $p = \frac{17}{16}$ cm și deci $\gamma_{ob} = \frac{p'}{p} = 16$.

b) Din $p = \frac{D}{f_{ob} f_{oc}} = 4\, G_c$, se obține:

$$f_{oc} = \frac{D}{4G_c \cdot f_{ob}} = 2,5 \text{ cm}.$$

4.1.48. Grosismentul lunetei este $G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = 25$.

Notînd cu α unghiul sub care se vede discul Lunii prin lunetă avem

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = 25 \text{ tg } 15', \text{ rezultă } \alpha = 12°27'2''.$$

Notînd cu Δl deplasarea ocularului lunetei, putem scrie

$$\frac{1}{f_{ob}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_{ob} + \Delta l} \quad \text{și rezultă } \Delta l = 0,5 \text{ cm}.$$

4.1.49.

a) $E = \frac{I}{r^2} = \frac{72}{(1,2)^2} = 50$ lx.

b) $E = \frac{I \cdot \cos i}{r^2} = \frac{I \cdot \cos 30°}{r^2} = 50 \cdot 0,866 = 43,3$ lx.

4.1.50.

$$\Phi = I \cdot \Omega = 66{,}5 \text{ cd} \cdot 4\pi \text{ sr} = 836 \text{ lm}.$$

4.1.51.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}; \quad \frac{20}{40} = \frac{x^2}{(8-x)^2} \quad \text{de unde:}$$

$$x^2 + 6x - 9 = 0, \quad \text{deci: } x_1 = 1{,}24 \text{ m și } x_2 = -7{,}24 \text{ m}.$$

4.1.52.

a) $L_a = \dfrac{I}{(p/2)^2} + \dfrac{I}{(p+p/2)^2} = \dfrac{25 \text{ cd}}{(0{,}30 \text{ m})^2} + \dfrac{25 \text{ cd}}{(0{,}90 \text{ m})^2} = 310 \dfrac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$

b) Sursa de lumină aflîndu-se în focarul oglinzii concave, după reflexie, lumina formează un fascicul aproximativ cilindric, diametrul secțiunii acestuia fiind $i = 15$ cm. Dacă neglijăm fenomenele de absorbție și împrăștiere pe distanțele relativ mici care intră în problemă și oglinda are un coeficient de reflexie apropiat de unitate, atunci intensitatea luminii din fasciculul reflectat este practic egală cu aceea care ajunge de la sursă la suprafața oglinzii, iar intensitatea luminii recepționate de instrument este suma dintre intensitatea luminii primite direct de la sursă și intensitatea luminii reflectate de oglinda concavă, respectiv, iluminarea:

$$L_b = \frac{25 \text{ cd}}{(0{,}30 \text{ m})^2} + \frac{25 \text{ cd}}{(0{,}30 \text{ m})^2} = 550 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

4.1.53.

$$E = \frac{I \cos i}{r^2} = \frac{I \dfrac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}}{(\sqrt{h^2+a^2})^2} = \frac{I \cdot h}{(h^2+a^2)^{3/2}} = 25 \text{ lx}.$$

4.1.54. $\eta = \dfrac{100 \text{ cd} \cdot 4\pi \text{ sr} \cdot 161 \cdot 10^{-3} \text{ W/lm}}{100 \text{ cd} \cdot 0{,}5 \text{ W}} = \dfrac{4}{100}.$

$$Q = \frac{4}{100} \cdot 0{,}5 \text{ W} \cdot 100 \text{ cd} \cdot 3\,600 \text{ s} = 7\,200 \text{ J} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}.$$

4.1.55. Energia luminoasă trebuind să fie aceeași în cele două cazuri, rezultă:

$$E_1 t_1 = E_2 t_2; \quad t_2 = t_1 \frac{E_1}{E_2} = t_1 \frac{I_1/r_1^2}{I_2/r_2^2}, \quad t_2 = t_1 \frac{I_1 r_2^2}{I_2 r_1^2} = 6 \text{ secunde}.$$

4.1.56. $R = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{400 \text{ lm}}{3{,}14 \cdot 0{,}6 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 5{,}3 \cdot 10^5 \text{ lm/m}^2.$

4.1.57. Celula fotoelectrică primește un flux luminos $\Delta\Phi$ emis sub unghiul solid $\Delta\Omega$:

$$\Delta\Phi = I \Delta\Omega = I \frac{\Delta S}{D^2} = \frac{I \cdot \pi d^2}{4D^2},$$

de unde

$D = \dfrac{d}{2}\sqrt{\dfrac{\pi I}{\Delta\Phi}}$ și cum distanța maximă căutată corespunde la $\Delta\Phi = 0{,}2$ lm:

$$D = \frac{27{,}5}{4}\sqrt{10 \cdot \pi} = 38{,}5 \text{ cm}.$$

4.1.58. a) $d = 2f \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cong f\,\alpha_{(rad)} = \frac{2\pi}{15 \cdot 45} 50 = 0{,}46$ cm.

b) $\frac{E'}{E} = \frac{\pi D^2/4}{\pi d^2/4} = \frac{D^2}{d^2} = 383.$

4.1.59. 1°. Lungimea de undă a luminii monocromatice folosite este:

$$\lambda = \frac{i \cdot a}{D} = \frac{10^{-3} \times 6 \cdot 10^{-4}}{1} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 6\,000 \text{ Å}.$$

2°. Dacă deplasăm sursa primară S în S' (fig. 4.21, *b*), dispozitivul nu mai are plan de simetrie: sursele secundare, coerente în continuare, nu mai sînt sincrone și în studiul fenomenului trebuie ținut seama de diferența de drum $\delta = |SS_2M| - |SS_1M|$. Figura de interferență suferă o translație. Franja luminoasă centrală nu va mai fi în O', ci în O''.

În M, diferența de drum este:

$$(S'S_1 + S_1M) - (S'S_2 + S_2M) = (S'S_1 - S'S_2) + (S_1M - S_2M) = \delta' + \delta =$$

$$= \frac{SS' \cdot a}{d} + \frac{a \cdot x}{D} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{0{,}75} + \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot x}{1}; \text{ (cu } x = OM).$$

Franja centrală se obține pentru: $\delta + \delta' = n\,\lambda$ cu $n = 0$ de unde: $\delta + \delta' = 0$, $x = -8$ mm sau $O'O'' = -8$ mm. Franja centrală s-a deplasat cu 8 mm pe ecranul E. Semnificația semnului $-$ constă în aceea că deplasarea sursei și a sistemului de franje se produce în sensuri opuse.

4.1.60. 1°. Din expresia interfranjei $i = \frac{\lambda D}{a}$ rezultă:

$$\lambda = \frac{i \cdot a}{D} = \frac{7{,}2}{12} \cdot \frac{3}{3\,000} = 0{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 6\,000 \text{ Å}.$$

2°. Prin deplasarea sursei din S în S', franja centrală se deplasează din O în O' (fig. 4.22, *a*). Drumurile parcurse de undele luminoase provenind de la sursa aflată în S' și trecînd prin S_1 și S_2 pînă la O' sînt egale: $S'S_1 + S_1O' = S'S_2 + S_2O'$ și pentru că $S'S_1 > S'S_2$, rezultă $S_1O' < S_2O'$, adică O' este mai jos decît O pe ecranul E. Franja centrală din O' s-a deplasat în sens invers deplasării fantei-sursă S'. Din egalitatea drumurilor parcurse de cele două unde scrisă sub forma: $S_2O' - S_1O' = S'S_1 - S'S_2$, în care: $S_2O' - S_1O' = \frac{ax}{D}$ și $S'S_1 - S'S_2 = \frac{az}{d}$, rezultă:

$$\frac{ax}{D} = \frac{az}{d} \text{ sau } x = \frac{D}{d} z = \frac{300}{50} \cdot 0{,}5 = 3 \text{ cm}.$$

3°. Pentru ca undele provenind de la cele două fante să interfere în fază ($\varphi = 0$) în O, trebuie ca drumurile optice parcurse de acestea să fie egale: or, prezența lamei în drumul fasciculului care trece prin fanta S_2 echivalează cu un drum optic suplimentar $\delta = (n - 1)e$ pentru acesta.

Rezultă: $S'S_1 - S'S_2 = (n - 1)e = \frac{az}{d}$;

$$e = \frac{az}{(n-1)d} = \frac{3 \cdot 5}{0{,}5 \cdot 500} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

4°. Din $i = \frac{\lambda D}{a}$, rezultă $i_1 = 0{,}84$ mm și $i_2 = 1{,}26$ mm.

Din $\frac{i}{\lambda} = \frac{D}{a}$ rezultă: $\frac{i_1}{\lambda_1} = \frac{i_2}{\lambda_2}$ și din $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{3}$ rezultă $\frac{i_1}{2} = \frac{i_2}{3}$ sau $3i_1 = 2i_2 = 2{,}52$ mm; franjele luminoase din cele două sisteme de franje coincid la distanțe multiplu de 2,52 mm; o franjă întunecată corespunzătoare radiației cu λ_1 coincide cu o franjă luminoasă a radiației cu λ_2 la distanțe multiplu de 1,26 mm.

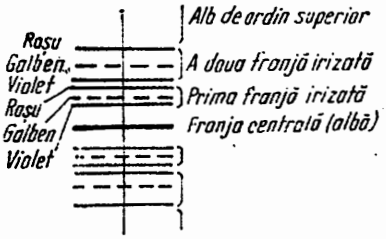


Fig. 4.56.

5°. În O se va forma franja centrală luminoasă corespunzătare tuturor radiațiilor emise de sursă, deoarece diferența de drum $\delta = S_2O - S_1O = 0$, pentru toate acestea (linia plină groasă din figura 4.56). Urmează cîteva franje irizate (colorate de la violet spre roșu), iar mai departe așa-zisul alb de ordin superior (partea haşurată mai slab).

6°. Spectrul observat cu ajutorul spectroscopului este un spectru canelat, adică un spectru continuu brăzdat de unele franje întunecate corespunzătoare anumitor radiații din spectrul sursei care se sting în anumite puncte din regiunea fantei spectroscopului. Diferența de drum δ dintre radiațiile care se sting în punctul M (de abscisă x) este:

$$\delta = \frac{ax}{D} = (2K + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (K \text{ întreg}).$$

$$\lambda = \frac{1}{2K + 1} \cdot \frac{2ax}{D}.$$

Aceste radiații trebuind să aparțină spectrului vizibil:

$$0{,}4\ \mu\text{m} \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8\ \mu\text{m} \text{ rezultă}$$

$$\frac{2 \cdot 4}{0{,}8} \leqslant 2K + 1 \leqslant \frac{2 \cdot 4}{0{,}4} \text{ sau } 10 \leqslant 2K + 1 \leqslant 20;$$

$4{,}5 < K < 9{,}5$; $K \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$; există deci cinci franje întunecate în spectrul observat, acestea corespunzînd radiațiilor cu $\lambda = \frac{2\delta}{2K + 1} = \frac{2\frac{ax}{D}}{2K + 1} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{2K + 1}$ mm;

$$\lambda = 7\,270\ \text{Å}, 6\,150\ \text{Å}, 5\,333\ \text{Å}, 4\,700\ \text{Å}, 4\,210\ \text{Å}.$$

7°. a) În expresia interfranjei $i = \frac{\lambda D}{a}$, prin introducerea dispozitivului în lichidul cu indice de refracție n, dimensiunile geometrice ale acestuia nu suferă nici o modificare; cea care se modifică este $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$ din cauza vitezei de propagare diferite a undelor luminoase în medii diferite:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} \text{ sau } \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c}{c'} = \frac{n'}{n} \rightarrow \lambda' = \lambda\frac{c'}{c} = \lambda\frac{n_0}{n} = 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{1{,}5} = 0{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{m}.$$

Rezultă: $i' = i\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{7{,}2}{12} \cdot \frac{4}{6} = 0{,}4$ mm.

b) $2L = ki$, $k = \frac{2L}{i} = \frac{13{,}2}{0{,}4} = 33$ franje luminoase.

8°. Frecvența unei radiații luminoase (electromagnetice) nu se modifică prin trecerea acesteia dintr-un mediu în altul.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}6 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s (considerînd mediul de la punctul 1° vidul)

$$c' = \frac{c}{n'} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

9°. a) Ambele fascicule traversează cele două lame (A și B) și parcurgînd drumuri optice egale, sistemul de franje nu suferă nici o deplasare.

b) Fasciculul ce vine de la fanta S parcurge un spațiu $l = 20$ cm prin vid ($n = 1$), aceasta echivalînd cu o scurtare a drumului față de celălalt fascicul, în consecință, sistemul de franje se deplasează în sensul spre S_2.

c) $\delta = \frac{ax}{D} = (n_a - 1) \cdot l = \frac{a \cdot 99{,}5 \cdot i}{D}$ $n_a = \frac{a \cdot 99{,}5 \cdot i}{D \cdot l} + 1$

$$n_a = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 99{,}5 \cdot \frac{7{,}2}{12}}{3 \cdot 0{,}2} + 1 = 1{,}000288.$$

10°. Pentru a putea obține franjele, trebuie ca imaginile S_1' și S_2' ale fantelor S_1 și S_2, date de lentila L, să se formeze în fața lentilei, adică:

$$p < \frac{D}{2}, \text{ deoarece } f > \frac{D}{2}.$$

În acest caz, formula lentilelor $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ dă $p' = -\frac{fp}{f - p}$.

Imaginile S_1' și S_2' (virtuale) sînt situate la distanța $\frac{fp}{f - p}$ în fața lentilei. Rezultă că distanța între fantele imagine (S_1', S_2') și ecranul E este

$$D' = \frac{fp}{f - p} + D - p = \frac{p^2 - Dp + Df}{f - p}.$$

Notînd $a' = S_1'S_2'$, avem $\frac{a'}{a} = \frac{f}{f - p}$ și interfranja:

$$i' = \frac{\lambda D'}{a'} = \frac{\lambda}{af}(p^2 - Dp + Df).$$

Expresia interfranjei este pozitivă cînd trinomul de gradul doi în p are discriminantul Δ negativ:

$$\Delta = D(D - 4f) < 0, \text{ deoarece } f > \frac{D}{2}.$$

Cazuri particulare: $-p = 0$ (lentila este lîngă fante), se obține $i = \lambda D/a$, adică aceeași interfranjă ca și în lipsa lentilei;

$-p = f$ (fantele se află în planul focal-obiect al lentilei) se obține:

$$i' = \frac{\lambda f}{a};$$

$-p = D - f$ (ecranul este în planul focal-imagine al lentilei) se obține același rezultat:

$$i' = \frac{\lambda f}{a}.$$

4.1.61. 1°. Punctul S_1, imaginea lui S dată de oglinda O_1, este simetric cu S în raport cu planul oglinzii, adică $\overline{\Delta S_1} = \overline{\Delta S}$. De asemenea, $\overline{\Delta S_2} = \overline{\Delta S}$; S, S_1 și S_2 se află deci pe un cerc cu centrul în Δ (fig. 4.25).

— Cîmpul de interferență este cel haşurat în figura 4.25 şi este definit de partea comună celor două fascicule reflectate.

— Locul franjei centrale este planul mediator al segmentului S_1S_2, adică planul ce trece prin Δ şi mijlocul segmentului S_1S_2.

2°. Din figura 4.25 rezultă:

a) $S_1S_2 = 2d\varepsilon$, ε fiind mic, putem înlocui coarda cu arcul şi:

$$\varepsilon = \frac{S_1S_2}{2d} = \frac{4{,}72}{2 \cdot 400} = 5{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ radiani.}$$

b) Distanța de la segmentul S_1S_2 la ecranul E este:

$$D = II' = I\Delta + \Delta I' \text{ şi pentru că } I\Delta \cong S\Delta = d,$$

$$D = d + d' = 0{,}4 + 2 = 2{,}4 \text{ m.}$$

Interfranja: $i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{S_1S_2} = \frac{0{,}59 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}4}{4{,}72 \cdot 10^{-3}} = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ m.

c) Lărgimea cîmpului pe ecranul E este: $2L = MM' \cong 2\varepsilon d' = 2 \cdot 5{,}9 \cdot 10^{-3} \times 2$;

$$2L = 23{,}6 \text{ mm.}$$

Abscisa unei franje întunecate pornind din I' este

$$x = (2k + 1)\frac{i}{2}, \text{ cum } -L \leqslant x \leqslant L$$

rezultă $-11{,}8 \leqslant (2k + 1)\frac{0{,}3}{2} \leqslant +11{,}8 \rightarrow K \in \{-39, -38, \ldots, 0, \ldots, 39\}$ există 79 franje întunecate.

3°. La o distanță x de franja centrală, diferența de drum între două radiații care interferă este:

$$\delta = \frac{S_1S_2 \cdot x}{D} = \frac{S_1S_2 \cdot x}{d + d'}.$$

Ordinul de interferență în acest punct este $k = \frac{\delta}{\lambda}$.

Franja va fi întunecată în acest punct pentru lungimile de undă care vor da un ordin de interferență semiîntreg:

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{d + d'}{S_1S_2};$$

$$\lambda = \frac{1{,}4 \cdot 4{,}72}{\left(k + \frac{1}{2}\right) 2{,}4 \cdot 10^3} = \frac{2{,}753 \cdot 10^{-3}}{k + \frac{1}{2}} \text{ (în mm).}$$

Deoarece λ este cuprins între $0{,}4 \cdot 10^{-3}$ mm şi $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ mm, $\left(k + \frac{1}{2}\right)$ va fi cuprins între: $\frac{2{,}753}{0{,}8} = 3{,}44$ şi $\frac{2{,}753}{0{,}3} = 6{,}88$.

Radiațiile care lipsesc din spectrul canelat vor fi în număr de patru:

$$k+\frac{1}{2}=3{,}5,\ \lambda=0{,}7866\cdot10^{-6}\ \text{m};\quad k+\frac{1}{2}=4{,}5,\ \lambda=0{,}612\cdot10^{-6}\ \text{m}.$$

$$k+\frac{1}{2}=5{,}5,\ \lambda=0{,}5005\cdot10^{-6}\ \text{m};\quad k+\frac{1}{2}=6{,}5,\ \lambda=0{,}4235\cdot10^{-6}\ \text{m}.$$

4.1.62. 1°. Din relația: $\sin\varphi=\frac{k\lambda}{a}$, unde $k=1$ (ordinul maximului), $a=\frac{1}{n'}$ deducem:

$$\lambda=\frac{a\sin\varphi}{k}=\frac{1}{2\cdot10^5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{4\cdot10^5}=25\cdot10^{-7}\ \text{m}=2\,500\ \text{Å}.$$

2°. Distanța dintre maximul de ordinul întîi și maximul central este $i=f\cdot\operatorname{tg}\varphi\approx$ $\approx 0{,}28$ m.

3°. $\sin\varphi_r=\frac{\lambda_r}{a}$, $\sin\varphi_v=\frac{\lambda_v}{a}$; $\sin\Delta\varphi=\sin(\varphi_r-\varphi_v)\approx\sin\varphi_r\sqrt{1-\sin^2\varphi_v}-$ $-\sin\varphi_v\sqrt{1-\sin^2\varphi_r}=\frac{1}{a^2}\left(\lambda_r\sqrt{a^2-\lambda_v^2}-\lambda_v\sqrt{a^2-\lambda_r^2}\right)\approx\frac{1}{a}(\lambda_r-\lambda_v)=\frac{0{,}35\cdot10^{-6}}{0{,}5\cdot10^{-5}}=$ $=0{,}07$ rad. Deci

$$\Delta\varphi=0{,}07\ \text{rad}.$$

4.1.63. 1°. Pentru a obține un fascicul paralel, sursa trebuie așezată în focarul lentilei: $d=f$.

Din $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ cu $R_2=\infty$, rezultă

$$d=f=\frac{R}{n-1}=\frac{20}{1{,}65-1}=30{,}77\ \text{cm}.$$

2°. Din $n\lambda=d\sin\varphi$ cu $d=\frac{1}{N}$, rezultă

$$\lambda=\frac{1}{nN}\sin\varphi=\frac{0{,}5}{3\cdot250}=0{,}666\cdot10^{-6}\ \text{mm}=0{,}666\ \mu\text{m}.$$

4.1.64. Scriind legea refracției în cazul problemei, rezultă:

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin i_B}{\sin(90^\circ-i_B)}=\frac{\sin i_B}{\cos i_B}=\operatorname{tg}i_B=\frac{n_s}{n_a};$$

$$\operatorname{tg}i_B=\frac{1{,}52}{1},\quad i_B=57^\circ.$$

4.1.65. $I=I_{\text{Max}}\cos^2\theta=I_{\text{Max}}\cos^2 30^\circ=I_{\text{Max}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $\frac{I}{I_{\text{Max}}}=0{,}75$.

4.2.1. Ținînd seama de legile reflexiei se vede că drumul $ACB=A'CB$ este mai scurt decît oricare alt drum $AC'B=A'C'B$, deoarece $A'CB$ este o dreaptă (figura 4.57).

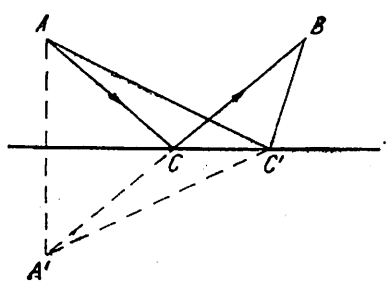


Fig. 4.57.

4.2.2. Un cerc cu raza de 50 cm.

4.2.3. Distanța $x=\frac{2\cdot r\cdot d}{r_1+r_2-2r}$.

Raza discului sursă $R=\frac{r(r_2-r_1)}{r_1+r_2-2r}$.

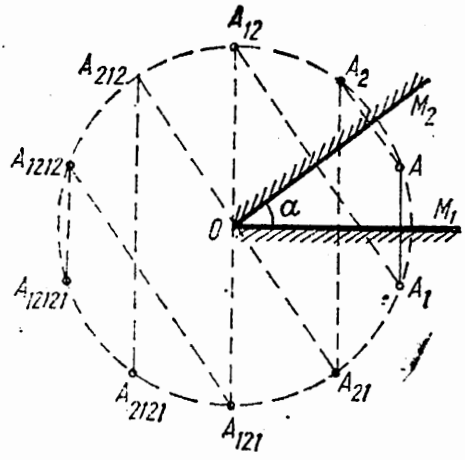


Fig. 4.58.

4.2.1. Considerăm cazul general: un punct luminos S aflat între fețele reflectătoare a două oglinzi plane care fac între ele un unghi diedru oarecare α (fig. 4.58).

Dacă razele de lumină emise de punctul luminos întîlnesc oglinda M_1, apoi M_2 și din nou M_1, M_2 și tot așa mai departe, ele vor da imaginile succesive S_1, S_{12}, S_{121}, ... și așa mai departe, fiecare jucînd rolul de obiect pentru oglinda care urmează în ordinea reflexiilor (fig. 4.58). Ele se află în planul trecînd prin S și perpendicular pe muchia diedrului format de cele două oglinzi, dispuse pe un cerc cu centrul în O și de rază OS; ele se repartizează în două serii urmînd ordinea reflexiilor în fiecare oglindă. Cum o rotație înlocuiește două simetrii succesive, se poate scrie de exemplu:

$$\widehat{S_1OS_{121}} = 2\ ^{\circ}C, \quad \widehat{S_{21}OS_{2121}} = 2\ ^{\circ}C.$$

Se poate arăta că numărul imaginilor pentru fiecare serie este limitat și că el crește cînd α scade.

a) $\alpha = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ rad.

Sistemul format din două oglinzi plane care fac între ele un unghi $\alpha = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ rad dă pentru un punct luminos S aflat între suprafețele reflectătoare ale celor două oglinzi un număr de trei imagini distincte (fig. 4.59).

b) $\alpha = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad.

După cum se poate urmări din figura 4.60, în cazul a două oglinzi plane care fac între ele un unghi $\alpha = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad, pentru un punct luminos S aflat între fețele reflectătoare ale acestora se obțin 5 imagini distincte.

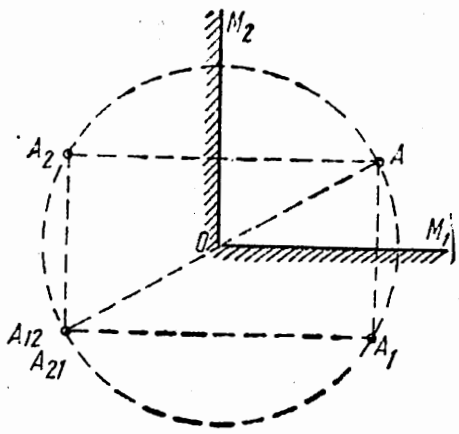


Fig. 4.59.

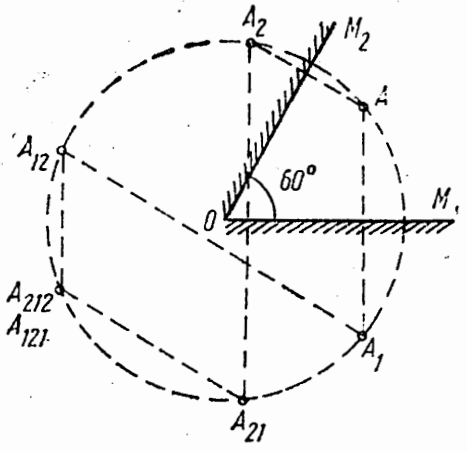


Fig. 4.60.

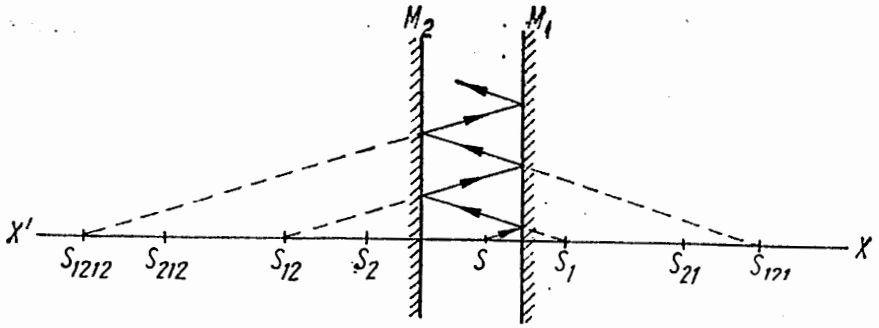


Fig. 4.61.

În cazul a două oglinzi plane care fac între ele un unghi $\alpha = \frac{\pi}{n}$, cu n număr întreg, o rază oarecare provenită de la punctul luminos S, după fiecare cuplu de reflexii pe M_1, apoi M_2 sau pe M_2 și apoi pe M_1 se rotește cu $\frac{2\pi}{n}$; după n cupluri, ea se rotește cu 2π rad, adică revine la direcția sa inițială. Or, după fiecare reflexie, raza trece printr-una din imagini și după $2n$ reflexii, imaginile corespunzătoare sînt confundate. Deci nu se pot obține decît $2n - 1$ imagini distincte. În cazul (a) cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$ s-au obținut $2 \cdot 2 - 1 = 3$ imagini distincte; în cazul (b) cînd $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$, s-au obținut $2 \cdot 3 - 1 = 5$ imagini distincte.

c) Cele două oglinzi sînt paralele cu fețele reflectătoare una spre cealaltă și un punct luminos S aflat între ele (fig. 4.61); ele dau o dublă infinitate de imagini ale punctului S, imagini aliniate pe dreapta $x'Sx$.

4.2.5. Unghiul pe care îl fac între ele normalele la oglinzi în I_1 și I_3 este de 60°; acesta este în același timp și unghiul pe care îl fac planele celor două oglinzi. Raza incidentă SI va suferi o deviere cu un unghi de $2 \times 60° = 120°$ după reflexiile pe cele două oglinzi M_1 și M_2 (fig. 4.62). Orientarea oglinzii M_3 trebuie să fie astfel încît ea să producă razei dublu reflectate I_2I_3 o deviere de 120° în sens invers precedentei; oglinda M_3 trebuie să facă un unghi de 60° cu I_2I_3 sau cu R_3 (se poate remarca că M_3 este paralelă la I_1I_2).

4.2.6. Din observarea figurii 4.26 rezultă că raza emergentă $I'R$ este antiparalelă la SI și prin rotirea ansamblului celor două oglinzi în jurul axei fixe ce trece prin O și este perpendiculară pe SI, raza $I'R$ rămîne în continuare antiparalelă la SI, iar aceasta fiind fixă, poziția lui $I'R$ este de asemenea fixă.

Punctul M de intersecție al normalelor la planele oglinzilor duse în I și I' se deplasează pe o paralelă la SI, trecînd prin O; el se va afla la o distanță minimă față de O, cînd unghiul de incidență $i = \frac{\pi}{4}$ și se depărtează spre infinit cînd $i = 0$ sau $\frac{\pi}{2}$.

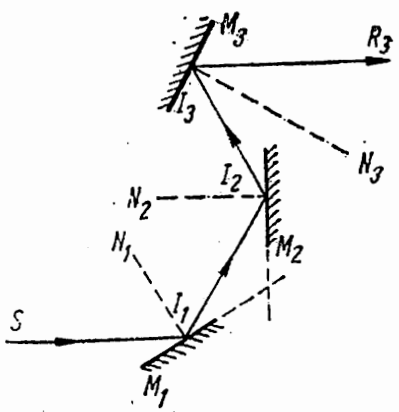


Fig. 4.62.

4.2.7. $\alpha = 17' 11'' = 0{,}005$ rad.

4.2.8. $\Delta = 2\varphi$.

4.2.9. $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$; $\quad i = o\frac{p'}{p}$.

și pentru că $p \gg p'$ putem considera $p' = f = R/2$ și:

$$i = R's = R_S \cdot \frac{R/2}{220\, R_S} = 10^{-2} \text{ m}.$$

4.2.10. Oglinda plană trebuie așezată la 80 cm de vîrful oglinzii concave.

4.2.11. a) $p_1 = 13{,}14$ cm și $p_2 = 41{,}86$ cm.

b) $d_1 = 80$ cm, $d_2 = 100$ cm, $d_3 = 20$ cm.

4.2.12. $d = 2{,}45$ m, $i = -2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m.

4.2.13. Oglindă convexă cu $f = -0{,}30$ m.

4.2.14. 1°. $\frac{1}{f_1} = (n-1)\frac{2}{R} = (1{,}5 - 1)\frac{2}{20} = \frac{1}{20}$; $\quad f_1 = 20$ cm,

$$f_2 = \frac{R_1}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}.$$

2°. $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$; $\quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30}$; $\quad p' = 60$ cm.

$$p_1 = d - p' = 100 - 60 = 40 \text{ cm} = 2\, f_1,$$

$$p_1' = p' = 2f_1 = 40 \text{ cm}.$$

$$p_2 = d_1 - p_1' = 10 \text{ cm}.$$

$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'}$; $\quad \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{20}$, $\quad p_2' = -20$ cm.

$$p_3 = p_1 + p_2' = 50 + 20 = 70 \text{ cm}.$$

$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3'}$; $\quad \frac{1}{p_3'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{70} = \frac{5}{140}$; $\quad p_3' = 28$ cm.

$$p_4 = d - p_3' = 100 - 28 = 72 \text{ cm}.$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_4'}; \quad p_4' = \frac{360}{13} \text{cm} = 27{,}7 \text{ cm}.$$

3°. $\frac{i}{o} = \frac{p_4' \cdot p_3' \cdot p_2' \cdot p_1' \cdot p'}{p_4 \cdot p_3 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p} = \frac{8}{13} = 0{,}616.$

4°. S se află în focarul lui L_1, iar centrul optic al oglinzii M va coincide cu focarul posterior al lui L_2 și distanța dintre lentile poate fi oricare.

4.2.15. $\hat{i} = \text{arctg}\, \frac{n_2}{n_1}$. Este cazul incidenței brewsteriene, ceea ce înseamnă că raza reflectată este total polarizată.

4.2.16. Deplasarea $\Delta = \frac{d \sin(i - r)}{\cos r} = 6{,}65$ cm.

4.2.17.

1) a) $h_1' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$; b) $L_1 = \frac{nh}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$.

2) a') $h_2' = \frac{h}{n}$; b') $L_2 = nh$.

4.2.18. Din legea refracției: $\frac{\sin i}{\sin r} = n_{2,1}$ rezultă:

$$\sin r_1 = \frac{\sin 30°}{1{,}4702}, \qquad r_1 = 19{,}88°.$$

$$\sin r_2 = \frac{\sin 30°}{1{,}4624}, \qquad r_2 = 19{,}99°.$$

$\Delta r = r_2 - r_1 = 0{,}11°$, radiația cu lungimea de undă mai mică fiind refractată mai mult.

4.2.19. 1) $t = 19{,}18 \cdot 10^{-8}$ s; 2) $\alpha = 60°$; 3) $S_g = 43{,}15$ m și $S_0 = 57{,}53$ m.

4.2.20. $\Delta = 2°30'$; $\hat{i}' = 4°30'$.

4.2.21. 1) Unghiul de emergență este egal cu unghiul de incidență.

2) Reflexia pe oglindă în cazul acesta se va face sub un unghi $r' = r + 2\alpha$ și la ieșirea din apă: $\frac{\sin (r + 2\alpha)}{\sin i_{em}} = \frac{1}{n}$, $\sin i_{em} = \sin (r + 2\alpha) \cdot n$.

3) Pentru a produce fenomenul de reflexie totală trebuie îndeplinită condiția $r + 2\alpha \geqslant l$, respectiv $\alpha \geqslant \frac{l - r}{2}$.

$$\alpha_{min} = 13°17'.$$

4.2.22. 1) a) Din condiția de deviație minimă rezultă $\hat{r} = \hat{r}' = \frac{A}{2} = 30°$ și din

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \sin i = n \sin r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \hat{i} = 45°.$$

b) $D_{min} = 2i - A = 90° - 60° = 30°$.

2) $\sin r' = \frac{1}{n}$; $r' = 45°$; $r = 60° - 45° = 15°$ și $i = \arcsin \sqrt{2}$.

4.2.23. Din enunțul problemei rezultă:

$$p_1 + p_1' = p_2 + p_2' \text{ și } \frac{p_1'}{p_1} = \frac{h'}{h}; \qquad \frac{p_2'}{p_2} = \frac{h''}{h}, \qquad h = \sqrt{h'h''} = 3{,}0 \text{ mm}.$$

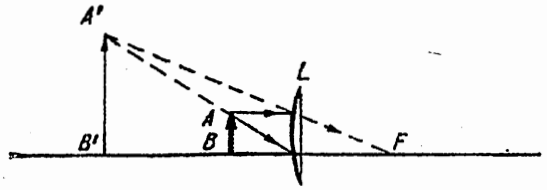
4.2.24. 1) $p_2' = 30$ cm, adică imaginea finală $A''B''$ se formează dincolo de lentila L_2, la 30 cm de aceasta și la 65 cm de obiectul AB. Imaginea este reală și raportul $\frac{A''B''}{AB} = \frac{p_1' \cdot p_2'}{p_1 \cdot p_2} = 6$.

2) Din $\frac{1}{f} = (n - 1)\frac{2}{R}$ rezultă $R = 2f(n - 1) = 10$ cm.

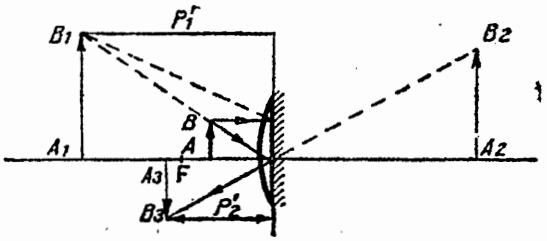
3) $n' = \frac{4}{3}$.

4.2.25. 1) Din $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$ rezultă $f = 20$ cm; din $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ și $\frac{i_1}{o} = -\frac{p'}{p}$ rezultă $p' = -60$ cm și $i_1 = 20$ cm, adică: imagine virtuală, dreaptă și mai mare decît obiectul (fig. 4.63, *a*).

2) Imaginea A_1B_1(fig. 4.63, *b*) dată de lentilă, în condițiile în care fața plană nu este argintată, servește ca obiect virtual pentru oglinda plană (fața argintată) care la rîndul său dă imaginea A_2B_2 simetrică cu A_1B_1 în raport cu planul oglinzii.



a



b

Fig. 4.63.

Imaginea A_2B_2 servește apoi ca obiect pentru lentilă dînd imaginea A_3B_3; $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'}$; $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{p_2'}{p'}$; rezultă $p_2' = 30$ cm și $i_2' = -10$ cm, adică imaginea finală este reală, răsturnată și de două ori mai mare decît obiectul (fig. 4.63, *b*).

Convergența sistemului este dublul convergenței lentilei neargintate, deoarece razele de lumină parcurg de două ori lentile

$$c' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_2'} = \frac{3}{0{,}30} = 10 \text{ dioptrii.}$$

4.2.26. 1) $c_1 = \frac{1}{f_1} = 8{,}3$ dioptrii; $c_2 = \frac{1}{f_2} = 5$ dioptrii.

2) imagine reală, la distanța $D = d + p_2' = 75$ cm de prima lentilă și $\frac{i_2'}{o} = \frac{3}{4}$.

4.2.27. Deoarece fasciculul de lumină străbate de două ori lentila, în convergența sistemului se ia de două ori convergența acesteia: $c = 2c_1 + c_2 = 2(n-1)\frac{2}{R} + \frac{2}{R} = \frac{1}{F}$,

$$F = \frac{R}{2(2n-1)} = 10 \text{ cm.}$$

4.2.28. 1) $\frac{1}{f_1} = \frac{(n_1 - 1)}{R_1}$; $\frac{1}{f_2} = \frac{(n_1 - 1)}{R_2}$.

$$c = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

2) $\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$;

$$n = \frac{n_1 R_2 + n_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

4.2.29. Din expresia convergenței unui sistem deducem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \left(\frac{n_1}{n_a} - n_a\right)\frac{2}{R} - \left(\frac{n_2}{n_a} - n_a\right)\cdot\frac{2}{R} = \frac{2}{R}\cdot\frac{n_1 - n_2}{n_a};$$

$$f = \frac{R}{2}\frac{n_a}{n_1 - n_2} = 35 \text{ cm}.$$

4.2.30. a) Din $\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{1}{R}$ rezultă $f_1 = -20$ cm. Din $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}$ rezultă $p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 10$ cm și $i_1 = -0\ \frac{p_1'}{p_1} = 4$ cm, adică imaginea este virtuală, dreaptă și mai mică decît obiectul.

b) Sistemul este constituit din trei lentile, dintre care două au distanțele focale $f_1 = f_2 = -20$ cm, iar cea de apă (convergentă) are distanța focală $f_3 = 15$ cm.

Din convergența sistemului: $c = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{F}$ rezultă distanța focală a sistemului: $F = -30$ cm.

În acest caz: $p_2' = -12$ cm și $i_2 = 4{,}8$ cm, adică imaginea este virtuală, dreaptă și mai mică decît obiectul.

4.2.31. Din expresia convergenței sistemului

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F} = 2\cdot(n - 1)\frac{1}{R} - (n' - 1)\frac{2}{R} = \frac{2}{R}(n - n').$$

Din convergența uneia din cele două lentile: $\frac{1}{F} = (n - 1)\frac{1}{R}$ se scoate $R = f(n - 1)$ și introdus în relația de sus, rezultă $n' = n\left(1 - \frac{f}{2F}\right) + \frac{f}{2F} = 1{,}4$.

4.2.32. a) Din $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ rezultă $f = 12$ cm și $c = \frac{25}{3}$ dioptrii.

b) Din relațiile: $c = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$; $f_1 = (n_1 - 1)\frac{2}{R_1}$ și $f_2 = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3R_1}\right)$, rezultă:

$R_1 = 65$ cm, $R_2 = 3R_1 = 195$ cm, $f_1 = 160$ cm și $f_2 = 70$ cm.

4.2.33. 1°. Prima lentilă este convergentă cu $f_1 = 50$ cm.

2°. Lentila a doua este divergentă cu $f_2 = -150$ cm.

3°. Introducerea cuvei cu apă are ca efect o micșorare a distanței obiect-lentilă ($p_1 = 125$ cm) și ca urmare, o micșorare a distanței lentilă-imagine, $p_1' = 83{,}33$ cm.

4.2.34. 1°. $f = 4{,}15$ cm, $c = 24$ dioptrii.

2°. $R = 4{,}15$ cm. 3°. $D = 25{,}2$ cm.

4.2.35. a) $f_{aer} = \dfrac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)} = 30{,}8$ cm, $c_{aer} = 3{,}25$ dioptrii.

b) $f_{apă} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n_{apă}}-1\right)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)} = 120{,}3$ cm, $c_{apă} = 0{,}9$ dioptrii.

c) $f_{cs} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n_{cs}}-1\right)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)} = 246{,}5$ cm, $c_{cs} = 0{,}46$ dioptrii.

4.2.36. 1°. Distanța dintre lentile este: $O_1O_2 = f_1 + f_2 = 10$ cm.

4.2.37. $p = 40$ cm, $p' = \dfrac{pf}{p-f} = 60$ cm;

imaginea virtuală $A_1'B_1'$ dată de oglinda plană joacă rol de obiect pentru lentilă (fig. 4.64)

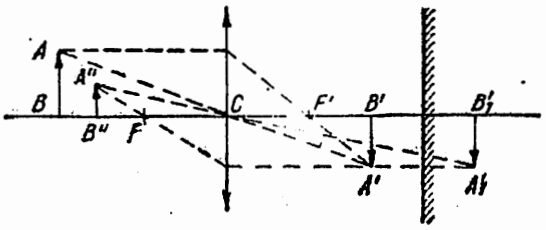


Fig. 4.64.

$$p_1 = 2x - p' = 2x - \frac{pf}{p-f};$$

$$p_1' = R \cong 2f = \frac{p_1 f}{p_1 - f};$$

$$x \cong f + \frac{pf}{2(p-f)} \cong 27 \text{ cm}.$$

4.2.38. $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m.

4.2.39. Strălucirea Soarelui este $\approx 1{,}5 \cdot 10^9$ nt.

4.2.40. $E' = 330 \cdot 10^6$ lx.

4.2.41. $\Phi = 628 \cdot 10^{-6}$ lm.

4.2.42. $\eta = 0{,}13\%$.

4.2.43. $t' = 46$ secunde.

4.2.44. $E = \dfrac{\Phi}{2\pi\, dl} = 700$ lx.

4.2.45. $R = E_0\left(1 + \dfrac{h^2}{r_0^2}\right) = 7 \cdot 10^2$ lx.

4.2.46. $h = r$; $E = \dfrac{BS}{4r^2} = 40$ lx.

4.2.47. $I = 2 \cdot 10^3$ cd.

4.2.48. Persoana este prezbită; are nevoie de ochelari cu lentile convergente. Punctul proxim al ochiului este punctul pentru care se obține o imagine virtuală la 50 cm de ochi, deci la 49 cm de lentilă: $p' = -49$ cm, $p = 25 - 1 = 24$ cm, $f = 31$ cm,

$$c = \frac{1}{f} \approx 3 \text{ dioptrii}.$$

4.2.49. $p' = -(25 - 1) = -24$ cm, $\quad c = \frac{1}{f} = -2{,}5$ dioptrii,

$$f = -40 \text{ cm}, \qquad p = 15 \text{ cm}.$$

4.2.50. 1°. Miopul folosește lentile divergente care să dea pentru obiecte situate la infinit imagini situate la distanța maximă de vedere clară a acestuia (50 cm).

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-50} - \frac{1}{\infty}, \qquad f = -50 \text{ cm}, \qquad p = \frac{1}{f} = -2 \text{ dioptrii}.$$

2°. $\frac{1}{-50} = \frac{1}{-5} - \frac{1}{p}$; $\quad p = -5{,}5$ cm.

4.2.51. $\delta = \frac{f'^2}{F'B} = 0{,}25$ m; $\qquad \Delta = -\frac{f'^2}{F'A} = 1$ m.

$$c = \frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ dioptrii}; \qquad \delta_1 = \frac{\delta}{c_m} = 0{,}20 \text{ m}.$$

4.2.52. 1) $p' = \frac{p \cdot f}{p - f} = 130$ mm.

2) $\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} = -25$;

3) $p' = -250$ mm, $\qquad f_{ob} = 20$ mm;

$p = 18{,}5$ mm în raport cu ocularul și $p_1 = 130$ mm de obiectiv.

Distanța între obiectiv și ocular este: $D = p + p_1 = 148{,}5$ mm.

4) $\frac{i'}{i} = 13{,}5$; $\qquad \frac{i'}{o} = 25 \times 13{,}5 = 337$.

5) $P = \frac{1}{f} = \frac{D - (f_1 + f_2)}{f_1 f_2} = 1\,250$; $\qquad G_o = \frac{P}{4} = 312$.

4.2.53. I. 1°. Franjele de interferență sînt rectilinii și paralele cu fantele S, S_1 și S_2. Franja centrală este în O ($\delta = 0$).

$$i = \frac{\lambda D}{a} = 0{,}84 \text{ mm}.$$

2°. Sistemul de franje se deplasează în bloc în jos cu distanța $x = y\frac{D}{d} = 2$ cm.

3°. Sistemul de franje se deplasează pe ecranul E de partea lamei care trebuie plasată, deci în fața fantei S_1.

Deplasarea este $x = \frac{(n-1)eD}{a}$, de unde:

$$e = \frac{ax}{(n-1)D} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

II. $i_1 = 0{,}84$ mm; $i_2 = 1{,}26$ mm.

$\frac{i_1}{\lambda_1} = \frac{i_2}{\lambda_2}$; $3i_1 = 2i_2 = 2{,}52$ mm; franjele luminoase corespunzînd celor două sisteme de franje coincid la distanțe multiple de 2,52 mm.

III. 1°. Se observă o franjă centrală luminoasă urmată de franje irizate (a se vedea răspunsul 5° de la problema 4.1.60).

2°. $\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)D} = \frac{4}{2k+1}$; $\quad 0{,}4\mu m < \lambda < 0{,}8\ \mu m$.

k are valorile: 2, 3, 4; λ are valorile: $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ m, $0{,}57 \cdot 10^{-6}$ m și $0{,}44 \cdot 10^{-6}$ m.

4.2.54. 1°. a) Cele două jumătăți ale lentilei se depărtează cu 2 mm.
b) Lărgimea zonei de interferență, pe ecranul E, este de 10 mm.

c) $\lambda = \frac{ia}{D} = \frac{\frac{8{,}19}{20} \cdot 4}{3\,000} = 5{,}46 \cdot 10^{-4}$ mm $= 5{,}46 \cdot 10^{-7}$ m.

2°. Sistemul de franje se deplasează în bloc în planul ecranului E spre fanta cu lama de sticlă în față, cu $\Delta x = 3$ mm.

3°. $\lambda = \frac{2\,ax}{(2k+1)D} = \frac{4}{2k+1}$; $\quad \lambda_1 = 4{,}21 \cdot 10^{-7}$ m;

$\lambda_2 = 4{,}71 \cdot 10^{-7}$ m; $\quad \lambda_3 = 5{,}33 \cdot 10^{-7}$ m; $\quad \lambda_4 = 6{,}15 \cdot 10^{-7}$ m.

4.2.55. $\lambda = \frac{\sin \varphi}{KN} \cong 5 \cdot 10^{-7}$ m.

4.2.56. $\lambda = 6\,481\ \text{Å} = 6{,}841 \cdot 10^{-7}$ m.

4.2.57. $K = \frac{1}{N} = 10^{-4}$ m; rețeaua trebuie să aibă $N = 10^4$ trăsături pe metru.

4.2.58. $\delta = x(n_e - n_0)$; δ fiind diferența de drum optic pentru cele două raze (extraordinară și ordinară):

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{x(n_e - n_0)}{\lambda}$$

rezultă: $x = \frac{\lambda}{8(n_e - n_0)} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 0{,}0072} = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$ m.

4.2.59. $\operatorname{tg} i_B = n$, $\quad i_B = 62°14'30''$.

4.2.60. $\operatorname{tg} i_B = n$, $i_B = 53°55'$ este unghiul făcut de fasciculul luminos cu normala la suprafața apei.

$\theta = 90° - i_B \approx 36°$ este unghiul făcut de fascicul cu planul suprafeței apei.

4.2.61. Din legea lui Malus: $I = I_0 \cos^2 \theta$,

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \theta = 45°.$$

4.2.62. $I = I_{01} \cos^2 30° = I_{02} \cos^2 60°$,

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{\cos^2 60°}{\cos^2 30°} = \frac{1}{3}.$$

5. TEORIA RELATIVITĂȚII ȘI FIZICĂ CUANTICĂ ELEMENTARĂ

5.0. BREVIAR

— În 1905, Einstein a stabilit bazele teoriei relativității restrînse, ceea ce a constituit o adevărată revoluție în fizică.

Principiile de bază ale fizicii clasice-newtoniene afirmă:

— Echivalența tuturor sistemelor de referință inerțiale, sau cu alte cuvinte: *toate legile mecanicii sînt invariante față de orice sistem de referință inerțial.* Relațiile de transformare sînt relațiile lui Galileo Galilei.

— Existența unui timp absolut, valabil pentru toate sistemele, aceasta avînd ca o consecință, dependența vitezei de propagare a luminii de sistemul de referință considerat.

Einstein substituie bazele mecanicii, stabilite de Galilei și Newton, cu principiile teoriei relativității restrînse:

a) Principiul relativității restrînse: *toate sistemele de referință inerțiale sînt echivalente*, cu completarea că acestea sînt echivalente nu numai pentru legile mecanicii ci pentru toate legile fizicii. Adică, ecuațiile matematice care exprimă legile naturii sînt invariante în raport cu anumite transformări de coordonate și de timp, cînd se trece de la un sistem de referință inerțial la altul.

b) Principiul invarianței vitezei maxime de interacțiune: *viteza maximă de transmisie a interacțiunilor este egală cu viteza de propagare a luminii în vid și este invariantă în raport cu orice sistem de referință inerțial și cu orice direcție de măsurare*; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s este o constantă universală.

c) Principiul de corespondență: *legile fizicii clasice nerelativiste se obțin ca un caz particular al legilor fizicii relativiste, pentru viteze relative mult mai mici decît viteza luminii în vid* ($v \ll c$).

Aceste principii generale ale teoriei relativității restrînse antrenează o serie de consecințe foarte importante.

1) *Transformările Lorentz.* În locul relațiilor de transformare a coordonatelor spațio-temporale date de Galileo Galilei, se impune grupul de transformare Lorentz. Legătura dintre coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) ale unui eveniment M (fig. 5.1) față de sistemul de referință (S) și coordonatele spațio-temporale (x', y', z', t') ale aceluiași eveniment față de sistemul (S'), (S') fiind în mișcare de translație uniformă în raport cu (S) cu viteza v orientată după direcția Ox și $O'x'$, este dată de:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{5.1}$$

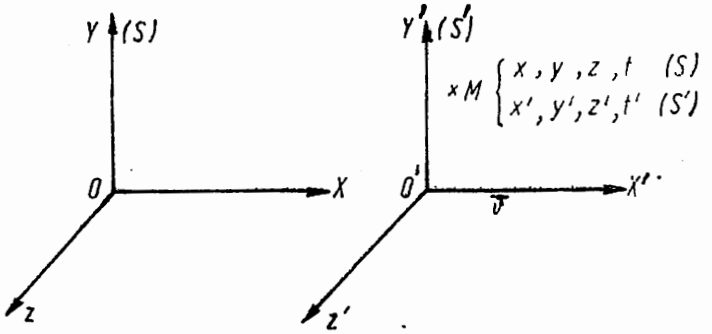


Fig. 5.1.

Transformările inverse sînt:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{5.2}$$

Se poate observa că pentru $v \ll c$, relațiile (5.1) și (5.2) se reduc la:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{5.3}$$

și

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \tag{5.4}$$

care reprezintă transformările Galilei valabile în mecanica clasică newtoniană.

2) *Contracția lungimilor.* O consecință a transformărilor Lorentz, constă în aceea că între lungimea $l_0 = x_2' - x_1'$ măsurată după direcția axei $O'x'$, a unui corp în repaus în raport cu referențialul (S'), de unde și denumirea de lungime proprie (l_0), și lungimea $l = x_2 - x_1$ a aceluiași corp în raport cu un sistem (S), (S') aflîndu-se în mișcare față de (S) cu vieza v constantă și orientată după x și x', există relația:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \text{sau} \quad l = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{5.5}$$

Adică etalonul de lungime proprie l_0 (în raport cu referențialul S' față de care acesta este în repaus) apare pentru un observator față de care sistemul (S') se mișcă uniform cu viteza v după x și x', contractat cu factorul $\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Aceasta este contracția Fitzgerald-Lorentz. Etalonul are lungimea maximă (l_0) în sistemul propriu.

3) *Dilatarea relativistă-einsteiniană a timpului.* Între durata $\Delta t'$ a unui fenomen care se produce într-un punct care este fix în raport cu sistemul de referință (S') (durata proprie) și durata Δt (durata cinematică) a aceluiași fenomen în raport cu sistemul (S), (S') fiind în mișcare cu viteza v față de (S), există relația:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{5.6}$$

4) ***Relativitatea simultaneității.*** Dacă două evenimente (A) și (B), sînt simultane ($t_A = t_B$, $x_A \neq x_B$) în raport cu sistemul de referință inerțial (S), ele nu mai sînt simultane în raport cu nici un alt sistem de referință inerțial ($t'_A \neq t'_B$).

5) *Teorema relativistă a compunerii vitezelor.* Dacă un punct material se deplasează cu viteza $\vec{u}'$ de componente u'_x, u'_y, u'_z în raport cu referențialul (S') care la rîndul său se deplasează după (X și X'), cu viteza $\vec{v}$ față de referențialul (S), componentele u_x, u_y, u_z ale vitezei $\vec{u}$ ale aceluiași punct material în raport cu (S) sînt date de expresiile:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \tag{5.7}$$

iar transformările inverse:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}. \tag{5.8}$$

6) *Variația relativistă a masei.* Între masa de repaus m_0 a unui corp și masa m a aceluiași corp aflat în mișcare cu viteza v, există relația

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{5.9}$$

7) *Relația dintre energia și masa unei particule libere.* Energia totală relativistă a unei particule libere este dată de expresia

$$E = mc^2, \text{ respectiv } E_0 = m_0c^2, \tag{5.10}$$

unde m și m_0 sînt masa în mișcare, respectiv masa de repaus a particulei și c este viteza luminii în vid.

— Fundamentarea fizicii cuantice moderne se produce prin anul 1900, cînd fizicianul M a x P l a n c k, pentru a da o explicare teoretică radiației corpului negru, a propus două ipoteze revoluționare în legătură cu oscilatorii armonici:

1°. Un oscilator nu poate avea orice energie, ci numai acele valori date de expresia:

$$E = nh\nu, \tag{5.11}$$

unde ν este frecvența oscilatorului, h este o constantă, numită *constanta lui Planck* și avînd valoarea $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js (cuanta de acțiune), n este un număr întreg numit *număr cuantic*. Expresia (5.11) arată că energia oscilatorului este cuantificată.

2°. Oscilatorul nu emite radiație continuu, ci în cantități discrete, numite *cuante*.

Einstein, în explicarea legilor efectului fotoelectric, preia și lărgește ideile lui Planck, afirmînd că nu numai energia emisă sau absorbită de oscilatori este cuantificată, ci și energia transportată de radiația electromagnetică; energia transportată de un fascicul de lumină în spațiu se prezintă sub formă de „porții" finite, numite *fotoni*. Energia unui foton este dată de

$$E = h\nu. \tag{5.12}$$

Cu ajutorul teoriei corpusculare (fotonice) a radiației electromagnetice se pot interpreta o serie de fenomene care nu puteau fi explicate cu ajutorul teoriei ondulatorii (lumina — undă electromagnetică). Aceste fenomene sînt: emisia liniilor spectrale, absorbția liniilor spectrale, efectul fotoelectric, efectul Compton etc.

— *Efectul fotoelectric* constă într-un proces de interacțiune a radiației electromagnetice cu substanța, proces prin care energia fotonului este transmisă electronilor din substanță. În cazul solidelor, se distinge efectul fotoelectric *extern* în care absorbția fotonilor este urmată de expulzarea de electroni din substanță și efectul fotoelectric *intern* în care electronii care au preluat energia fotonilor rămîn în corp schimbîndu-și însă starea lor energetică.

În cazul gazelor, efectul fotoelectric constă în ionizarea atomilor sau a moleculelor acestora, prin iluminare (fotoionizare).

Cercetările experimentale în legătură cu efectul fotoelectric extern, pe metale, au dus la următoarele legi:

1°. *Emisia de fotoelectroni dintr-un metal nu are loc decît dacă acesta este luminat cu lumină avînd lungimea de undă mai mică sau cel mult egală cu o anumită valoare* λ_0, *numită* p r a g f o t o e l e c t r i c *pentru metalul considerat*, adică,

$$I \neq 0, \text{ pentru } \lambda < \lambda_0 \text{ sau } \nu > \nu_0. \tag{5.13}$$

2°. *Numărul fotoelectronilor extrași din catod în unitatea de timp este proporțional cu intensitatea luminii;* sau cu altă expresie, curentul fotoelectronic de saturație este proporțional cu fluxul luminos care cade pe catod

$$I_S = C_1\Phi. \tag{5.14}$$

3°. *Viteza inițială maximă cu care fotoelectronii părăsesc metalul nu depinde de intensitatea luminii, ci numai de frecvența acesteia:*

$$E_c = \frac{m_e v_0^2}{2} = C_2\nu. \tag{5.15}$$

Randamentul cuantic al efectului fotoelectric este definit de numărul fotoelectronilor raportat la numărul fotonilor incidenți. Randamentul cuantic depinde de proprietățile substanței și de lungimea de undă a radiației.

Legile efectului fotoelectric nu pot fi interpretate decît în cadrul teoriei corpuscular-fotonice a luminii, fenomenul constînd într-o ciocnire foton-electron cu anihilarea fotonului, întreaga energie a acestuia fiind preluată de electron. Fenomenul are loc după ecuația:

$$h\nu = E_{ex} + E_c, \tag{5.16}$$

în care $h\nu$ este energia fotonului incident, E_{ex} energia cheltuită pentru scoaterea electronului din suprafața metalului și $E_c = \frac{m_e v_0^2}{2}$ este energia cinetică a electronului. Energia $E_c = h\nu - E_{ex}$ este energia cinetică maximă cu care fotoelectronul poate părăsi suprafața metalului; în majoritatea cazu-

rilor, din cauza unor ciocniri suferite în interiorul metalului, energia cinetică este mai mică.

Dacă fotoelectronilor expulzați din metal li se aplică o tensiune negativă, de frînare (U_f), pentru o anumită valoare a acesteia U_0, fotocurentul este anulat complet

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - h\nu_0 = eU_0. \tag{5.17}$$

— Pentru explicarea spectrelor de emisie și absorbție ale atomilor, în 1913, fizicianul danez N i e l s B o h r pornind de la modelul atomului propus de Rutherford și ținînd seama de ideile lui Planck referitoare la discontinuitatea energiei anumitor sisteme, pune bazele unei teorii a atomului, în special pentru atomul de hidrogen.

Bohr postulează în legătură cu atomul că:

1°. *Orbitele descrise de electron în jurul atomului sînt cuantificate, ele trebuind să satisfacă condiția ca momentul cinetic al electronului pe aceste orbite să fie un multiplu al constantei* $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$mv_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{5.18}$$

în care n este numărul cuantic principal, iar r_n este distanța la care se află electronul de nucleul atomului și v_n viteza cu care se mișcă electronul pe orbita n^a. Acestea sînt orbite staționare, ele satisfac condiția de echilibru între forța electrostatică și forța centrifugă

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}. \tag{5.19}$$

Din relațiile (5.18) și (5.19) se pot deduce expresiile razelor orbitelor staționare ale atomului de hidrogen:

$$r_n = n^2 \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} \tag{5.20}$$

și expresia energiei atomului în starea cuantică caracterizată de numărul cuantic n

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^4 m_e}{8h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.21}$$

2°. *Emisia și absorbția de energie de către atom are loc numai atunci cînd electronul trece prin salt, de pe o orbită staționară n pe o alta n', acest proces fiind de asemenea cuantificat*; energia emisă sau absorbită fiind

$$E = h\nu_{n-n'} = E_n - E_{n'} = \frac{e^4 m_e}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{5.22}$$

sau în funcție de frecvența radiației emise sau absorbite,

$$\nu_{n-n'} = \frac{e^4 m_e}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{5.23}$$

sau

$$\nu_{n-n'} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right), \tag{5.23}$$

cu

$$R_H = \frac{e^4 m_e}{8h^3\varepsilon_0^2} = 3{,}28 \cdot 10^{15}\ \text{Hz},$$

R_H purtînd numele de *constanta lui Rydberg* pentru atomul de hidrogen.

Totalitatea radiațiilor emise sau absorbite la trecerea electronului atomului de hidrogen dintr-o stare staționară în alta constituie *spectrul atomului*, acesta grupîndu-se în cinci serii spectrale. Frecvențele liniilor aparținînd fiecăreia din aceste serii se pot obține cu ajutorul relației (5.23) în care se dau lui n valorile 1, 2, 3, 4, respectiv 5 și pentru fiecare din acestea, n' luînd valorile $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, ...

În spectroscopie, în locul frecvenței, liniile spectrale sînt date de *numărul de undă* $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$, relația (5.23) luînd forma

$$\tilde{\nu} = \frac{R_H}{c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right), \tag{5.24}$$

unde $\mathcal{R}_H = \frac{R_H}{c} = 1{,}09677 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$.

Seriile spectrale ale atomului de hidrogen sînt:

seria Lyman cu $\tilde{\nu} = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; $n' = 2, 3, 4, 5, \ldots$ (5.25)

seria Balmer cu $\tilde{\nu} = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; $n' = 3, 4, 5, \ldots$ (5.26)

seria Paschen cu $\tilde{\nu} = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; $n' = 4, 5, 6, \ldots$ (5.27)

seria Brackett cu $\tilde{\nu} = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; $n' = 5, 6, 7, \ldots$ (5.28)

seria Pfund cu $\tilde{\nu} = \mathcal{R}_H\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; $n' = 6, 7, 8, \ldots$ (5.29)

— *Radiația X* este de aceeași natură cu radiația vizibilă, dar are lungimi de undă mult mai mici, de ordinul angströmilor ($1\text{Å} = 10^{-10}$ m) pînă la miimi de angström. Radiația X poate constitui un spectru continuu (spectru de frînare) sau un spectru de linii, specific atomului emițător.

Sursa de radiație X este un tub de descărcare electrică (tub Coolidge), în vid sau într-un gaz foarte rarefiat, pînă la 10^{-6} torr, cu catod incandescent care emite electroni prin efect termoelectronic. Tubul este prevăzut cu un al doilea electrod, anodul și un anticatod, care poate fi un electrod separat sau rolul său poate fi îndeplinit de anod.

Tuburilor li se aplică o diferență de potențial a cărei valoare depinde de frecvența radiației X ce vrem să obținem și poate varia între 10^4V și 10^6V.

Fenomenul care duce la emisia de radiație X cu spectru de linii constă în rearanjarea electronilor unui atom care a fost ionizat prin pierderea unui electron caracterizat de un număr cuantic principal mic. Dacă electronul pierdut prin ionizare a aparținut păturii K ($n = 1$), L ($n = 2$) etc., seria

respectivă, obținută în urma rearanjării electronilor, va fi o serie K sau o serie L etc. De exemplu, dacă electronul pierdut de pe pătura K este înlocuit de un electron de pe pătura imediat următoare (L), se obține o radiație de frecvență

$$\nu_{K\alpha} = \frac{E_K - E_L}{h}. \tag{5.30}$$

Frecvența unei aceleiași linii din spectrul de radiație X depinde de numărul atomic al elementului emițător după o lege dată de Moseley

$$\sqrt{\nu} = A(Z - B), \tag{5.31}$$

A și B fiind două constante caracteristice elementului.

— *Nucleul atomic* este partea centrală a atomului avînd dimensiuni de ordinul 10^{-15} m și avînd concentrată în el aproape întreaga masă a atomului. Toate nucleele sînt constituite din particule elementare numite *protoni* și *neutroni*. Protonii posedă o sarcină electrică pozitivă, egală în valoare absolută cu sarcina electronului, neutronii fiind electric neutri.

Numărul atomic Z reprezintă numărul de protoni din nucleu și totodată numărul de ordine al elementului în tabelul periodic al lui Mendeleev. În prezent sînt cunoscute nucleele cu Z avînd valori de la 1 la 105. Numărul neutronilor din nucleu (N) este egal sau mai mare decît numărul protonilor pentru elementele ușoare și se află în raportul $N/Z \approx 1{,}6$ pentru elementele de la finele tabelului lui Mendeleev.

Numărul de masă al nucleului reprezintă numărul total de nucleoni (protoni și neutroni) din nucleu: $A = Z + N$.

Un nucleu se reprezintă prin simbolul ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, X fiind simbolul elementului chimic de Z dat.

Nucleele avînd același Z, dar A diferit (deci N diferit) se numesc *izotopi*. În prezent se cunosc aproximativ 300 izotopi stabili și peste 1 000 izotopi instabili (radioactivi).

Nucleele nu au dimensiuni geometrice bine determinate, în sens convențional se vorbește despre o rază a nucleului, care se calculează după formula empirică

$$R = R_0 A^{1/3}, \text{ unde } R_0 = (1{,}3 \div 1{,}7) \cdot 10^{-15} \text{ m}. \tag{5.32}$$

Volumul nucleului este proporțional cu numărul nucleonilor conținuți.

Densitatea substanței nucleare este constantă pentru toate nucleele și valoarea sa este de ordinul 10^{17} kg/m^3.

Se numește *energie de legătură a nucleului* (energie de legătură a nucleonilor din nucleu) $\Delta E(A, Z)$ diferența dintre energia (relativistă) a nucleului (protoni și neutroni) și energia (relativistă) a nucleonilor respectivi în stare liberă

$$-\Delta E(A, Z) = \{M_N - [ZM_p + (A - Z)M_n]\}c^2, \tag{5.33}$$

unde M_N este masa nucleului, M_p și M_n masa protonului, respectiv neutronului și c viteza de propagare a luminii în vid.

Energia de legătură a nucleului este negativă și egală în valoare absolută cu lucrul mecanic necesar dezintegrării nucleului în nucleonii săi.

Sarcina unui nucleu este egală cu suma sarcinilor pozitive ale protonilor constituenți, în timp ce masa nucleului este numai aproximativ egală cu suma maselor nucleonilor. Diferența dintre suma maselor nucleonilor componenți

și masa nucleului *(defectul de masă)* se datorește energiei de legătură dintre nucleoni:

$$M_N = Zm_p + (A - Z)\, m_n - \Delta m \qquad (5.34)$$

unde Δm (defectul de masă) este legat de energia de legătură a nucleului prin

$$\Delta m \cdot c^2 = \Delta E(A, Z). \qquad (5.35)$$

— *Radioactivitatea.* Numim *radioactivitate* transformarea spontană a izotopilor instabili ai unui element chimic în izotopi ai unui alt element, însoțită de emisia anumitor particule (nuclee de heliu, spre exemplu). Numim *radioactivitate naturală* radioactivitatea în cazul izotopilor instabili existenți în natură. Se numește *radioactivitate artificială* radioactivitatea provocată izotopilor obținuți în reacțiile nucleare.

Folosind notațiile menționate pentru nucleu și nucleoni și ținînd seama că particula α este un nucleu de heliu, deci are simbolul ${}_2^4\mathrm{He}$, iar electronul care constituie particula β^- sau electronul pozitiv care constituie particula β^+ au masa neglijabilă ($A = 0$) în raport cu masa nucleonilor și sarcina $-e$ ($Z = -1$) respectiv $+e$ ($Z = +1$), putem reprezenta tipurile de dezintegrare ale nucleelor, după cum urmează:

dezintegrarea α: ${}_Z^A\mathrm{X} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{X}'$; (5.36)

dezintegrarea β^-: ${}_Z^A\mathrm{X} \rightarrow \beta^-({}_{-1}^{0}\mathrm{e}) + {}_{Z+1}^{A}\mathrm{X}'$, (5.37)

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + (\mathrm{e}^- + \tilde{\nu}_e); \quad (\tilde{\nu}_e = \text{antineutrin electronic})$$

dezintegrarea β^+: ${}_Z^A\mathrm{X} \rightarrow \beta^+({}_{+1}^{0}\mathrm{e}) + {}_{Z-1}^{A}\mathrm{X}'$, (5.38)

$$p \rightarrow n + (\mathrm{e}^+ + \nu_e); \quad (\nu_e \text{ neutrin electronic})$$

captura electronică (K): ${}_Z^A\mathrm{X} + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} \rightarrow {}_{Z-1}^{A}\mathrm{X}'$,

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_e;$$

fisiunea spontană: ${}_Z^A\mathrm{X} \rightarrow \sim{}_{Z/2}^{A/2}\mathrm{X}' + \sim{}_{Z/2}^{A/2}\mathrm{X}''$ (5.39)

radioactivitate protonică: ${}_Z^A\mathrm{X} \rightarrow {}_{+1}^{1}\mathrm{p} + {}_{Z-1}^{A-1}\mathrm{X}'$. (5.40)

În general, toate aceste tipuri de radioactivitate sînt însoțite de emisia de *radiații gama*, adică de un flux de fotoni, radiații electromagnetice de origine nucleară cu lungimi de undă de ordinul $10^{-11} - 10^{-13}$ m. Această emisie de fotoni reprezintă forma cea mai obișnuită de eliminare a energiei excedentare a produselor excitate rezultate din dezintegrarea radioactivă.

Dezintegrarea spontană a nucleelor atomice este un proces aleatoriu. Numărul de nuclee dintr-un anumit element radioactiv existenți într-o probă descrește cu timpul. Dacă N este numărul de nuclee din elementul radioactiv la momentul t, numărul de nuclee care se dezintegrează în timpul dt următor este dat de relația

$$-\mathrm{d}N = \lambda N \, \mathrm{d}t, \qquad (5.41)$$

λ fiind constanta radioactivă, caracteristică elementului și reprezintă probabilitatea dezintegrării unui anumit nucleu în unitatea de timp. După un interval de timp t, numărul de nuclee din elementul radioactiv, rămase nedezintegrate, este

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (5.42)$$

Aceasta este *legea dezintegrării spontane*, în care N_0 reprezintă numărul de nuclee din elementul radioactiv aflat în proba respectivă la momentul $t = 0$.

Pentru caracterizarea stabilității nucleelor la dezintegrarea spontană se folosește mărimea $\tau = \frac{1}{\lambda}$ *timpul de viață mediu* al izotopului radioactiv și *perioada* sau *timpul de înjumătățire* T care reprezintă timpul necesar pentru a se dezintegra jumătate din numărul de atomi prezenți la momentul $t = 0$ în proba respectivă, din acel element.

Timpul de înjumătățire rezultă din relația (5.42) scriind

$$N = \frac{N_0}{2}, \quad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \text{ sau } T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{5.43}$$

Valorile timpurilor de înjumătățire ale diferitelor elemente radioactive variază între limite foarte largi. Astfel, timpul de înjumătățire al izotopului $^{212}_{84}P_0$ al poloniului (numit și toriu C') este $3 \cdot 10^{-7}$ s, iar timpul de înjumătățire al izotopului $^{144}_{60}$Nd al neodimului este de $5 \cdot 10^{15}$ ani.

Activitatea A a unei substanțe radioactive este dată de numărul de atomi care se dezintegrează în unitatea de timp. Expresia activității o putem obține pornind de la relația (5.41) în care considerăm timpul egal cu unitatea, obținînd

$$A = \lambda N \text{ sau ținînd seama de (5.42): } A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{5.44}$$

Dacă nucleul obținut prin dezintegrarea unui nucleu inițial este de asemenea radioactiv și se dezintegrează la rîndul său dînd un nucleu stabil sau un nou nucleu radioactiv și așa mai departe, se obține un lanț de transformări radioactive.

Numărul de nuclee existente la un moment dat dintr-un anumit tip în funcție de timp este dat de o lege destul de complexă. În cazul a două tipuri de nuclee radioactive caracterizate de constantele radioactive λ_1 și λ_2, numărul de nuclee din cel de-al doilea element este dat de relația

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \tag{5.45}$$

5.1. PROBLEME CU REZOLVĂRI

5.1.1. O sferă cu diametrul D_0 în raport cu referențialul propriu (referențialul față de care sfera se află în repaus) se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza v față de un observator aflat în repaus.

a) Care este diametrul sferei măsurat de observator pe direcția de mișcare a sferei?

b) Ce se poate spune despre volumul sferei din punctul de vedere al observatorului aflat în repaus?

5.1.2. O bară a cărei lungime proprie este l_0 se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza v față de un observator în repaus. Direcția barei face un unghi φ_0 cu direcția vitezei. a) Care este lungimea cinematică l a barei (în raport cu observatorul față de care bara se mișcă)? b) Care este unghiul φ dintre direcția barei și viteza sa pentru observator?

5.1.3. Un punct material se deplasează cu viteza $\vec{v}$ (v_x, v_y, v_z) față de sistemul de referință inerțial (S): $Oxyz$. Un alt sistem de referință inerțial

(S'), $O'x'y'z'$, se deplasează cu viteza $\vec{u}$, paralelă cu Ox, față de sistemul de referință (S). Să se deducă viteza $\vec{v'}(v'_x, v'_y, v'_z)$ a punctului față de sistemul de referință (S').

5.1.4. Durata unui fenomen care se produce într-un punct fix în sistemul de referință (S'), $O'x'y'z'$, este $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Care este durata $\Delta t = t_2 - t_1$ a aceluiași fenomen pentru un observator solidar cu sistemul (S), $Oxyz$, față de care sistemul (S') se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza $\vec{v}$ orientată după Ox? Aplicație: $v = \frac{3}{4}c$, $\Delta t = 10$ secunde.

5.1.5. În urma cercetărilor s-a stabilit că particulele numite mezoni μ se dezintegrează spontan într-un electron și un neutrin și că timpul de viață al acestor mezoni, măsurat în laborator (referențialul propriu) este $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Admițînd că acești mezoni s-ar mișca cu o viteză-limită c, ei ar putea parcurge un spațiu maxim $S = c \cdot \tau_0 = 660$ m. În realitate s-a descoperit că astfel de mezoni se formează în atmosfera terestră, dintr-o componentă a radiației cosmice, la înălțimi de cîțiva kilometri și ajung totuși la suprafața Pămîntului. Să se explice această aparentă contradicție.

5.1.6. O navă cosmică zboară spre o stea aflată la distanța $D = 1$ an-lumină, cu viteza $v = \frac{2}{3}c$; după ce ajunge la stea, nava se întoarce. Să se calculeze diferența între timpul înregistrat de un ceasornic solidar cu Pămîntul și timpul înregistrat de un ceasornic identic, montat pe navă, pentru timpul scurs de la plecare pînă la înapoierea navei pe Pămînt.

5.1.7. Energia unor componente ale radiației cosmice este de $3 \cdot 10^9$ eV, iar energia lor de repaus este de 10^8eV. Ce distanță pot străbate aceste particule în atmosferă în mișcare uniformă, dacă timpul lor de viață în raport cu referențialul propriu este de $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ secunde?

5.1.8. Să se calculeze viteza unei particule a cărei energie totală este de 10 ori mai mare decît energia sa de repaus.

5.1.9. Un electron este accelerat de o diferență de potențial $U = 10^6$V. Să se calculeze viteza pe care o capătă electronul și raportul între masa pe care o are electronul la această viteză și masa sa de repaus.
Se cunosc: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

5.1.10. Energia relativistă a unei particule cu masa de repaus m_0 este $E_0 = m_0c^2$ și energia în mișcare cu viteza v este $E = mc^2$ și impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$.
a) Să se stabilească forma relativistă a relației dintre energia totală și impulsul unei particule care se mișcă liber.
b) Să se calculeze energia totală a unui electron care se mișcă cu viteza $v = 3 \cdot 10^7$ ms^{-1}, masa de repaus a electronului fiind $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

5.1.11. Să se calculeze energia, impulsul, masa relativistă (de mișcare) și frecvența unei radiații cu lungimea de undă (în vid) $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m.

5.1.12. Să se calculeze frecvența minimă pe care trebuie să o aibă radiațiile unui fascicul de lumină care căzînd pe suprafața unei celule fotoelectrice cu fotocatodul din cesiu să producă efectul fotoelectric. Lucrul de extracție al electronilor din cesiu este de $2{,}88 \cdot 10^{-19}$ J pentru un electron.

5.1.13. 1°. Pragul fotoelectric al fotocatodului unei celule este $\lambda_0 = 0{,}60$ μm. Să se evalueze lucrul de extracție al unui electron.

2°. Celula este luminată cu un fascicul de radiații cu $\lambda = 0{,}50$ μm. Care este viteza maximă cu care părăsesc electronii catodul?

3°. Să se determine valoarea potențialului de frînare (anularea fotocurentului) în cazul luminării cu lumina cu $\lambda = 0{,}50$ μm.

4°. Radiația cu care este luminată celula avînd $\lambda = 0{,}50$ μm, se aplică anodului celulei un potențial $U = +50$ V în raport cu catodul care emite electroni.

a) Care este energia cinetică maximă a electronilor care ajung la anod?

b) Catodul primește o putere constantă $P = 0{,}4$ mW sub formă de radiații. Intensitatea fotocurentului de saturație obținut este $I_S = 1{,}6$ μA. Să se determine randamentul fotonic (procentul de fotoni care interacționează cu electronii catodului).

c) Care este puterea P_A primită de anod care în final se disipă sub formă de căldură?

5.1.14. O radiație cu lungimea de undă $\lambda = 2{,}32 \cdot 10^{-7}$ m căzînd pe un electrod de platină eliberează un fotoelectron din suprafața acestuia. Lucrul de extracție a electronului din platină fiind $L_{ex} = 5{,}29$ eV, să se calculeze impulsul total primit de electrodul de platină în acest proces. Se precizează că fotoelectronul este expulzat după direcția fotonului incident și în sens opus acestuia. Masa electronului: $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

5.1.15. O lampă de 50 candele luminează normal de la distanța de 1 m fotocatodul unei celule fotoelectrice, a cărei suprafață emițătoare este de 2 cm^2. Sensibilitatea celulei este de 10^{-5} A $\cdot$ lm^{-1}. Care este intensitatea curentului fotoelectronic?

5.1.16. 1°. Potențialul de extracție a electronilor din cesiu este de 1,8 V. Să se calculeze frecvența și lungimea de undă a pragului fotoelectric, precum și viteza maximă a fotoelectronilor smulși din cesiu prin luminarea acestuia cu lumină ultravioletă cu $\lambda = 0{,}254$ μm.

2°. Pentru verificarea legii lui Einstein și determinarea constantei lui Planck se luminează cesiu, aflat într-o celulă fotoelectrică vidată, cu radiații cu $\lambda = 0{,}254$ μm și se aplică între catod care constituie metalul și anodul celulei, o tensiune de frînare. Ce tensiune trebuie aplicată pentru ca să nu sosească nici un fotoelectron pe anod?

5.1.17. Se concentrează pe catodul unei celule fotoelectrice, un fascicul de radiații cu $\lambda = 0{,}546$ μm, transportînd o putere $P = 1{,}515$ W; anodul celulei debitează în circuit un curent $I = 2$ mA. Curentul anodic este nul cînd $\lambda \leqslant 0{,}69$ μm.

1°. Care este randamentul cuantic η al catodului?

2°. Dacă anodul celulei se află la un potențial negativ $|V|$, în raport cu catodul și dacă facem să crească V (în valoare absolută), de la 0 la U, intensitatea i a curentului anodic are ca valoare

$$i = I\left(1 - \frac{V}{U}\right).$$

Să se exprime numeric această dependență.

5.1.18. Succesiv se luminează suprafața unui fotocatod cu radiații de lungime de undă $\lambda_1 = 2\,790$ Å și $\lambda_2 = 2\,450$ Å. Tensiunile de frînare $V_1 = 0{,}66$ V, respectiv $V_2 = 1{,}26$ V anulează fotocurentul în fiecare din cele două cazuri. Să se calculeze:

1°. constanta lui Planck;

2°. lucrul de extracție al metalului fotocatodului;

3°. frecvența de prag pentru metalul din care este făcut fotocatodul și lungimea de undă pentru care se mai poate obține efect fotoelectric;

4°. impulsul total transmis fotocatodului pentru fiecare proces de interacțiune, știind că electronul este expulzat după direcția de propagare a radiațiilor, dar în sens contrar.

5.1.19. Pragul fotoelectric al unui metal este $\lambda_0 = 4\,000$ Å. Se lasă să cadă pe acest metal un flux de fotoni cu lungimea de undă $\lambda = 3\,000$ Å. Se cere:

1. valoarea lucrului de extracție a unui electron din acest metal;
2. energia cinetică maximă a fotoelectronilor expulzați;
3. viteza fotoelectronilor;
4. impulsul fotonului incident;
5. masa fotonului incident.

5.1.20. 1°. Un fascicul paralel de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda = 5\,600$ Å și care transportă un flux de 10 mW cade pe fotocatodul unei celule fotoelectrice al cărei prag este $\lambda_0 = 6\,000$ Å. Să se determine:

a) energia cinetică maximă a unui fotoelectron expulzat din fotocatodul celulei în urma luminării cu lumină de 5 600 Å lungime de undă;

b) randamentul cuantic al efectului fotoelectric, știind că anodul celulei debitează un curent cu intensitatea $I = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ A.

2°. Fasciculul de lumină de la punctul 1° cade pe o prismă de unghi $A = 60°$ și este deviat cu un unghi $D = 30°$, prisma fiind așezată în poziția de deviație minimă. Se cere:

a) unghiul de incidență sub care intră fasciculul în prismă;

b) indicele de refracție al prismei pentru radiația dată;

c) sub ce unghi de incidență ar trebui să intre fasciculul în prismă pentru ca el să se reflecte total pe cea de-a doua față a prismei?

3°. Fasciculul de lumină de la punctul 1° cade normal pe o rețea de difracție. Să se calculeze constanta rețelei știind că maximul de difracție de ordinul al doilea se observă sub un unghi de 30° față de normala la planul rețelei.

5.1.21. Să se determine temperatura la care energia cinetică medie a moleculelor unui gaz perfect este egală cu energia fotonilor cu lungimea de undă $\lambda = 0{,}6$ μm.

5.1.22. Să se determine numărul de fotoni cu $\lambda = 0.6$ μm al căror impuls total este egal cu impulsul atomului de heliu la temperatura $T = 300$ K.

5.1.23. Pe o rețea de difracție cu constanta $d = 3 \cdot 10^{-6}$ m cade normal un fascicul de lumină monocromatică și se obțin pe un ecran franje. Două maxime vecine sînt observate sub unghiurile $\varphi_1 = 23°15'$ și respectiv $\varphi_2 = 36°52'$.

1. Să se calculeze energia și impulsul unei radiații din fascicul.

2. Să se calculeze impulsul total al fasciculului care cade pe rețeaua de difracție într-o secundă, suprafața acesteia fiind 5 cm², iar intensitatea fasciculului $I = 3 \cdot 10^{-3}$ W/cm².

5.1.24. Catodul unei celule fotoelectrice este luminat cu radiații cu $\lambda = 3\,500$ Å și apoi se aplică o diferență de potențial care frînează total fotoelectronii smulși. Se luminează apoi același fotocatod cu o radiație a cărei lungime de undă diferă cu 500 Å de cea precedentă și se constată că diferența de potențial necesară frînării fotoelectronilor este cu 0.59 V mai mare decît cea de la primul caz. Cunoscînd constanta lui Planck ($h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s) și viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), să se determine sarcina electronului.

5.1.25. Un fascicul de lumină monocromatică este divizat în două fascicule. Unul din fascicule cade normal pe o rețea de difracție cu $N = 500$ trăsături pe mm, iar al doilea fascicul cade pe o celulă fotoelectrică.

Să se determine:

1°. lungimea de undă λ_1 a radiației monocromatice, știind că maximul de difracție de ordinul doi se obține sub un unghi $\varphi = 30°$ față de normala la planul rețelei;

2°. numărul total al maximelor de difracție date de rețea pentru o radiație cu $\lambda_2 = 4\,500$ Å;

3°. să se verifice valoarea constantei lui Planck, știind că tensiunea de frînare a fotoelectronilor este de 0,690 V în cazul radiației cu $\lambda_2 = 4\,500$ Å și de 0,415 V în cazul radiației cu lungimea de undă λ_1 de la punctul unu;

4°. care este energia cinetică a unui fotoelectron emis de celulă pentru radiația cu $\lambda = 5\,000$ Å, dacă energia de extracție este de 2,3 eV?

5.1.26. Un izvor luminos emite lumină cu lungimea de undă $\lambda = 5\,000$ Å. Fasciculul luminos paralel emis cade normal pe o rețea de difracție.

Se cere:

1. numărul fotonilor incidenți pe rețea în timp de 1 minut, dacă puterea izvorului este $P = 20$ W;
2. constanta rețelei de difracție, dacă maximul de difracție de ordinul al doilea se formează sub unghiul $\varphi = 30°$;
3. distanța dintre maximul central (de ordinul zero) și maximul de ordinul doi pe un paravan pe care figura a fost proiectată cu ajutorul unei lentile, cu convergența $C = 2$ dioptrii;
4. se înlocuiește paravanul cu o celulă fotoelectrică de cesiu al cărui prag fotoelectric este $\lambda_0 = 6\,600$ Å. Să se determine:
   a) lucrul de extracție;
   b) viteza cu care este emis un electron.

5.1.27. O radiație monocromatică are în vid lungimea de undă $\lambda = 6\,000$ Å. Cunoscînd indicele de refracție al apei $n = \frac{4}{3}$ și viteza de propagare a luminii în vid $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s, să se calculeze:

1. lungimea de undă și viteza de propagare a radiației în apă;
2. energia fotonului;
3. raportul dintre frecvența radiației în apă și în vid.

5.1.28. Să se determine potențialul maxim la care se poate încărca o sferă de cupru prin efect fotoelectric, dacă este iradiată cu radiații cu lungimea de undă $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ m. Se cunosc: $L_{ex-Cu} = 4{,}47$ eV, $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J · s și $c = 3 \cdot 10^8$ ms^{-1}.

5.1.29. O celulă fotoelectrică cu stratul fotosensibil din cesiu are pragul roșu $\lambda_0 = 6\,600$ Å. Celula este luminată cu lumină monocromatică cu $\lambda = 5\,500$ Å. Să se afle:

1. viteza maximă a electronilor emiși;
2. energia cinetică maximă a unui electron, în condițiile în care celulei i se aplică o tensiune acceleratoare de 20 V;
3. tensiunea de frînare care trebuie aplicată celulei pentru ca să se anuleze complet curentul fotoelectronic.

5.1.30. O placă de zinc este luminată cu radiații cu $\lambda = 300$ Å. Să se calculeze pînă la ce distanță maximă de la suprafața plăcii se pot deplasa fotoelectronii emiși, dacă există un cîmp de frînare pe direcția mișcării de 10 V/cm, iar lucrul de extracție pentru zinc este de 3,74 eV.

5.1.31. Într-un tub de descărcare se găsește hidrogen atomic; acesta este iradiat cu o radiație monocromatică X astfel încît electronii atomilor de hidrogen trec în starea excitată caracterizată de numărul cuantic principal $n = 6$. Prin revenire direct în starea fundamentală, atomii emit o radiație care cade pe o placă de wolfram aflată în vid.

Să se calculeze lucrul de extracție pentru wolfram, știind că electronii smulși prin efect fotoelectronic rămîn pe suprafața plăcii de wolfram dacă li se aplică un potențial de frînare de 9 volți.

5.1.32. Niels Bohr în teoria sa consideră atomul de hidrogen ca fiind constituit dintr-un nucleu greu și fix în jurul căruia se rotește un electron, într-o mișcare circulară uniformă.

Nucleul posedă o sarcină electrică pozitivă egală în valoare absolută cu sarcina electronului (e).

a) Să se determine valoarea razei orbitei descrise de electron în jurul nucleului.

b) Cu ajutorul primului postulat al lui Bohr, să se arate că energia sistemului (nucleu-electron) nu poate avea decît valori discrete.

c) Cu ajutorul celui de-al doilea postulat de cuantificare enunțat de Bohr, să se arate că trecerile atomului de hidrogen în diferite stări de energie sînt însoțite de emisia sau absorbția unor radiații electromagnetice, ale căror lungimi de undă satisfac relația: $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$, R fiind o constantă, iar n și n' numere întregi.

d) Să se calculeze valoarea constantei R (constanta lui Rydberg).

e) Să se calculeze lungimile de undă extreme ale seriilor Lyman și Balmer din spectrul atomului de hidrogen.

Se cunosc: masa electronului $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, sarcina electronului $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, constanta lui Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js, viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ ms^{-1}, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ mF^{-1}, respectiv $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Fm^{-1}.

5.1.33. O radiație emisă de un ion de heliu (He^+) la tranziția electronului acestuia din starea de energie caracterizată de numărul cuantic $n = 2$ pe starea cu $n = 1$ este absorbită de un atom de hidrogen aflat inițial în starea fundamentală. În urma acestui proces, atomul de hidrogen este ionizat. Să se calculeze viteza cu care părăsește electronul atomul de hidrogen.

5.1.34. a) Să se estimeze intensitatea curentului electric datorat mișcării electronului în jurul nucleului atomului de hidrogen pentru orbita corespunzătoare stării fundamentale ($n = 1$) și stării cu $n = 2$.

b) Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic H_0 în centrul orbitei.

5.1.35. În spectrul atomului de hidrogen sînt cunoscute lungimile de undă a trei radiații: $\lambda_1 = 972{,}6$ Å, $\lambda_2 = 1\,025{,}8$ Å și $\lambda_3 = 1\,215{,}7$ Å. Să se calculeze lungimile celorlalte radiații care fac parte din aceeași serie a spectrului atomului de hidrogen.

5.1.36. Cîte radiații distincte poate să emită atomul de hidrogen aflat în starea excitată caracterizată de numărul cuantic n?

5.1.37. Să se calculeze frecvența și lungimea de undă a radiației corespunzătoare tranziției electronului atomului de hidrogen de pe nivelul cu numărul cuantic $n = 4$ pe nivelul cu număr cuantic $n = 2$.

5.1.38. Să se determine numărul cuantic n corespunzător stării excitate a ionului de He^+ dacă, trecînd în starea fundamentală, ionul emite două radiații consecutive cu $\lambda_1 = 1\,085$ Å și $\lambda_2 = 304$ Å.

5.1.39. Să se calculeze viteza maximă a electronilor care bombardează anticatodul unui tub Coolidge, sub o tensiune acceleratoare $U = 2\,500$ V și să se deducă limita inferioară a lungimii de undă a radiațiilor X obținute cu acest tub.

5.1.40. Să se calculeze energiile radiațiilor X care au lungimile de undă extreme: $\lambda_1 = 200$ Å și $\lambda_2 = 0{,}01$ Å.

5.1.41. Să se calculeze tensiunea de accelerare necesară obținerii într-un tub Coolidge a unor radiații X cu lungimea de undă de 0,01 Å și să se deducă raportul între masa electronilor accelerați de această tensiune și masa lor de repaus.

5.1.42. Un atom de hidrogen aflat în repaus emite o radiație corespunzătoare primei radiații din seria Lyman ($n = 1$, $n' = 2$). Să se calculeze viteza de recul a atomului.

5.1.43. Un fascicul paralel de radiații X cu lungimea de undă de 1,54 Å, căzînd pe suprafața plană a unui monocristal de nichel, dă un prim maxim de difracție după o direcție ce face un unghi $\varphi = 58°$. Să se determine distanța d dintre planele reticulare ale rețelei cristalului.

5.1.44. Să se calculeze lungimea de undă de Broglie asociată:
1° unui electron care se mișcă cu viteza: a) $10^2 ms^{-1}$; b) $10^4 ms^{-1}$, c) 10^6 ms^{-1};
2° unui neutron în mișcare cu viteza: a) 10^2 ms^{-1}, b) 10^4 ms^{-1}, c) 10^6 ms^{-1};
3° unei bile metalice de masă $m_0 = 10^{-4}$ g în mișcare cu viteza de 10 ms^{-1}.
Se cunosc: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

5.1.45. Energia de legătură a nucleului de ^4_2He este $E = 28{,}3 \cdot 10^6$ electronvolți. Se cunoaște masa protonului $M_p = 1{,}007276$ uam, masa neutronului $M_n = 1{,}008665$ uam. Să se calculeze masa atomică a heliului.

5.1.46. 1°. Fisiunea unui nucleu de uraniu (^{235}U) se face cu o diminuare a masei $\Delta m = 0{,}35 \cdot 10^{-27}$ kg. Care este energia E eliberată în acest proces de fisiune?
2°. Se folosește uraniul (^{235}U) drept carburant într-un reactor nuclear. Știind că în reactor se produc $N = 10^{13}$ fisiuni pe centimetru cub și secundă și că volumul util al reactorului este $V = 0{,}1$ m^3, să se calculeze puterea eliberată.

3°. Cîți atomi există în 1 g de ^{235}U (numărul lui Avogadro este $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1})? Reactorul conține 20 kg de uraniu-235 și acesta se schimbă cînd jumătate din atomii de uraniu au fost fisionați. Să se spună la ce interval de timp de funcționare se schimbă combustibilul (uraniul).

4°. Energia furnizată de reactorul de la punctul 2° alimentează o mașină termică ce funcționează între temperatura reactorului, $T_1 = 500$ K și aceea a mediului ambiant, $T_2 = 300$ K. Știind că randamentul mașinii este jumătate din randamentul unei mașini ce ar funcționa după ciclul Carnot, între aceleași temperaturi, să se calculeze puterea mașinii.

5°. Mașina de la punctul 4° servește la propulsarea unui submarin. Știind că rezistența opusă de apă la scufundarea submarinului este de forma $R = Kv^2$ cu $K = 4 \cdot 10^3$ kgm^{-1}, să se calculeze viteza atinsă de submarin, mașina funcționînd cu puterea întreagă pentru învingerea rezistenței apei.

5.1.47. Cunoscînd masa protonului $M_p = 1{,}007825$ u, masa neutronului $M_n = 1{,}008665$ u și masa unei particule α $M_{^4_2He} = 4{,}002603$ uam și 1 u $= \frac{10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}}$ kg, să se determine energia de legătură pentru o particulă α și energia eliberată în reacția:

$$^2_1D + ^2_1D \rightarrow ^4_2He.$$

5.1.48. Un nucleu al radioizotopului ^{200}Po, inițial în repaus, emite o particulă α de energie cinetică $E = 5{,}77$ MeV. Să se găsească viteza de recul a nucleului rezultat în urma dezintegrării. Ce fracțiune din energia eliberată în acest proces reprezintă energia de recul?

5.1.49. Radioactivitatea unei sări de radiu, datorită dezintegrării atomilor de radiu ^{226}Ra, se caracterizează prin dezintegrarea, în medie, a unui atom din 2 300 în timp de un an.

1°. Să se determine numărul de atomi dezintegrați în interval de o oră dintr-o sare care conține 1 g de radiu.

2°. O particulă α emisă prin dezintegrarea radiului pătrunde într-un cîmp de inducție magnetică B uniform și descrie o traiectorie circulară de rază r cu o viteză v, constantă în modul. Să se scrie relația: $E_\alpha = f(q, B, r, v)$.

3°. Un gram de radiu disipă în timp de o oră o energie de 35 calorii reprezentînd, practic, energia cinetică a particulelor α.

a) Să se calculeze energia cinetică a unei particule α.

b) Să se calculeze viteza particulei α, folosind rezultatele de la punctul 2° pentru: $B = 0{,}965$ T, $r = 40$ cm și $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C.

c) Să se calculeze masa m_α a unei particule α.

5.1.50. Nucleele radioactive artificiale ^{32}P și ^{131}I au timpuri de înjumătățire aproximate cu 14,3, respectiv 8 zile. Considerînd că în momentul inițial, numărul de nuclee radioactive de iod este de două ori mai mare decît numărul de nuclee de fosfor, să se calculeze după cît timp numărul de nuclee rămase nedezintegrate se inversează.

5.1.51. Un gram din cenușa unui os găsit cu ocazia unei săpături arheologice produce cinci dezintegrări β^- pe minut. Știind că un gram din cenușa unui os recent produce 15 dezintegrări β^- pe minut și că timpul de înjumătățire al radiocarbonului $^{14}_6C$ este 5 650 ani, se cere:

a) vîrsta osului găsit în săpături;

b) ecuația reacției de dezintegrare a $^{14}_6C$ și viteza electronului emis, energia cinetică a acestuia fiind de 156 keV.

Se neglijează variația relativistă a masei cu viteza. Se dau: $\ln 3 = 1{,}09861$ și masa electronului $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

5.1.52. 1°. Ce izotop se formează în urma dezintegrării izotopului radioactiv ^{226}Ra prin cinci dezintegrări α și patru dezintegrări β?

2°. Cîte dezintegrări α și β suferă ^{238}U care se transformă în final în izotopul stabil ^{206}Pb?

5.1.53. Prin dezintegrarea nucleului ^{210}Po (din starea fundamentală) prin emisie α, acesta expulzează particule α cu energia cinetică de 5,32 MeV sau de 4,50 MeV transmutîndu-se în nucleul ^{206}Pb în starea fundamentală și, respectiv, într-o stare excitată. Să se determine frecvența fotonului γ emis de nucleul excitat pentru a trece în starea fundamentală.

5.1.54. Un radioizotop cu constanta de dezintegrare λ_1 se transmută într-un alt radioizotop de constanta λ_2.

Admițînd ca la momentul inițial, preparatul conține numai N_1 nuclee din primul izotop, să se determine numărul de nuclee din cel de-al doilea izotop în funcție de timp.

5.1.55. Nucleul de sulf $^{32}_{15}$S ciocnit de un neutron se transformă într-un nucleu de fosfor radioactiv $^{32}_{16}$P emițînd un proton. Izotopul $^{32}_{15}$P* emite radiații β cu energia $E = 1{,}7$ MeV avînd timpul de înjumătățire $T = 15$ zile.

O anumită cantitate de sulf se află într-un calorimetru cu capacitatea calorică $C = 10^3$ J/K și prin bombardare cu neutroni, radiațiile β emise în timp de 1 minut ridică temperatura în calorimetru cu $\Delta\theta = 81{,}6$ K. Se neglijează pierderile. Se cere:

a) energia reacției de formare a izotopului $^{33}_{15}$P și schema acestei reacții;

b) cantitatea de sulf care a fost iradiată cu neutroni, știind că atomii de sulf sînt ciocniți în proporție de 1/100 și că toate radiațiile β au aceeași energie de 1,7 MeV.

Se dau: $M_{P^*} = 31{,}98409$ u; $M_n = 1{,}00898$ u, $M_{S^*} = 31{,}98224$ u; $M_{pr} = 1{,}00759$ u; 1 u = 931 MeV; $N_A = 6 \cdot 10^{23}$/mol.

5.1.56. Izotopul fosforului ^{32}P emite radiații cu energia de 1,7 MeV; să se calculeze cantitatea de fosfor necesară asigurării unui debit de căldură de 10 W, considerînd că toată energia radiațiilor se transformă în căldură și cunoscînd perioada de înjumătățire a ^{32}P, $T = 14{,}3$ zile.

5.1.57. Un nucleu aflat într-o stare de energie excitată poate să emită o radiație electromagnetică trecînd în starea fundamentală. Considerăm un nucleu de ^{57}Fe într-o stare excitată și presupunem că inițial, nucleul este în repaus. Cînd nucleul emite radiația electromagnetică, el suferă un recul după direcția și în sensul opus direcției după care este emis fotonul.

1°. Care este frecvența ν a unui foton de energie 14,4 keV și lungimea de undă a radiației corespunzătoare?

2°. Care este impulsul nucleului datorat reculului atunci cînd emite radiația de frecvență ν?

5.1.58. 1°. Care este în MeV energia de legătură per nucleon, în nucleul oxigenului $^{16}_{8}$O?

2°. Care este energia necesară pentru a smulge un neutron din nucleul $^{16}_{8}$O?

Se dau: masa protonului $M_p = 1{,}00728$ uam, masa neutronului $M_n = 1{,}00866$ uam, 1 uam = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J, masa nucleului $^{16}_{8}$O = 15,9949 uam și masa nucleului $^{16}_{8}$O = 15,0030 uam.

5.1.59. Cîtă energie se degajă prin fisiunea unui gram de $^{235}_{92}U$, dacă considerăm că randamentul este de 5% (din o sută nuclee, numai cinci suferă procesul de fisiune) și la fisionarea unui nucleu se degajă 200 MeV?

5.1.60. Se introduce o cantitate $m = 10^{-5}$ g de radiu în centrul unei sfere de sticlă, de rază interioară 8 cm. Pe o porțiune din peretele interior se aplică un mic ecran cu sulfură de zinc care este observat cu un microscop. Sfera este vidată. Radiul emite particule α în toate direcțiile și de fiecare dată cînd o particulă atinge ecranul, se observă o scintilație. Pe fiecare element de ecran, de suprafață 0,01 mm^2, se observă 19 scintilații în 100 secunde.

1°. Să se calculeze numărul de particule α emise de un miligram de radiu într-un minut.

2°. Particulele α poartă o sarcină electrică pozitivă. Armătura unui condensator cu capacitatea de 10^{-11} F captează jumătate din particulele α emise în vid de 1 mg de radiu, cealaltă armătură a condensatorului fiind legată la pămînt. În timp de 1 minut, diferența de potențial între armăturile condensatorului este de 147 V. Să se deducă valoarea sarcinii unei particule α.

3°. Volumul de heliu (măsurat în condiții normale: $t = 0°C$ și $p = 10^5$ N/m^2) degajat în timp de un an de 1 mg de radiu este 0,172 mm^3. Din datele problemei să se determine numărul lui Avogadro, adică numărul de atomi de heliu conținuți într-un atom-gram (volumul unui mol în condiții normale fiind $V_0 = 22\,400$ cm^3). Să se calculeze masa unei particule α.

4°. O masă $m' = 0{,}1$ g de radiu introdus într-un calorimetru degajă o cantitate de căldură de 14 calorii pe oră. Considerînd că 90% din această căldură provine din energia cinetică a particulelor α, să se determine viteza acestor particule.

5.1.61. Considerăm o cantitate $m = 4 \cdot 10^{-3}$ g radiu pur.

1°. Să se determine numărul n_0 de atomi de radiu conținuți în această cantitate (Ra^{226}, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}).

2°. Timpul de înjumătățire al radiului este $T = 1\,680$ ani. Cîte nuclee nedezintegrate vor rămîne din eșantionul respectiv după scurgerea unui timp egal cu T?

3°. Considerăm că la momentul $t = t_0 = 0$, numărul de nuclee de radiu nedezintegrate este n_0, iar la momentul $t = t_0 + dt$, numărul acestora a scăzut cu $dn = \lambda n_0 dt$. Să se determine constanta radioactivă λ pentru acest element.

4°. Să se calculeze masa Δm, din cantitatea m de la punctul 1°, cu care a scăzut aceasta într-un an.

5°. În acest interval de timp, masa m de radiu a eliberat o cantitate de căldură $Q = 2{,}05 \cdot 10^4$ J. Să se evalueze variația relativă a masei, produsă de reacția nucleară: $Ra \Rightarrow Rn + He$.

5.1.62. Un nucleu de uraniu $^{235}_{92}U$, prin bombardare cu un neutron $^{1}_{0}n$, se scindează (fisionează) în două nuclee ușoare cu eliberarea a 2 sau 3 neutroni, care la rîndul lor pot provoca fisiunea altor nuclee de uraniu.

1°. Printre reacțiile obișnuite citățm:

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{A}_{54}Xe + {}^{95}_{Z}Sr + 2\ {}^{1}_{0}n;$$

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{148}_{57}La + {}^{A'}_{Z'}Br + 3\ {}^{1}_{0}n.$$

Să se determine A, Z, A' și Z'.

2°. Fisiunea unui nucleu de uraniu-235 se face în medie cu o pierdere de masă de 0,21 u.a.m. Ce energie se degajă prin fisiunea unui nucleu?

5.1.1. a) D_0 se definește prin diferența abscisele extremităților diametrului: $D_0 = x_2' - x_1'$.

Diametrul D măsurat de observatorul aflat în repaus este

$$D = x_2 - x_1.$$

Folosind relațiile (5.1): $x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

și $D_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,

admițând că observatorul vizează simultan cele două extremități (x_2 și x_1) rezultă $t_2 - t_1 = 0$ și $D_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ sau $D = D_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

b) În ceea ce privește volumul sferei, din punctul de vedere al observatorului aflat în repaus, sfera în mișcare apare deformată, deoarece numai diametrul de pe direcția mișcării suferă contracția, în timp ce după z și y nu se contractă. Sfera apare ca un elipsoid de revoluție de axă mică $b = \frac{D}{2} = \frac{D_0}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ (după direcția mișcării) și axă mare $a = \frac{D_0}{2}$ invariabilă.

5.1.2. a) Luînd ca axă x paralela la direcția de mișcare a bazei și axa y perpendiculară pe aceasta (fig. 5.2) se poate scrie: $l_{0\text{-}x} = l_0 \cos \varphi$; $l_{0\text{-}y} = l_0 \sin \varphi$.

În raport cu sistemul xOy (fix), avem

$$l_x = l_0 \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; \quad l_y = l_0 \sin \varphi$$

și

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 = l_0^2 \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + l_0^2 \sin^2 \varphi,$$

sau

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}.$$

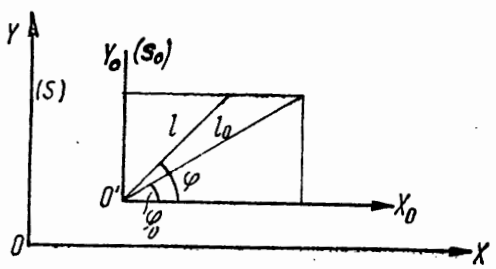


Fig. 5.2.

b) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{l_y}{l_x} = \dfrac{l_0 \sin\varphi_0}{l_0\cos\varphi_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,

adică unghiul făcut de direcţia barei cu direcţia de mişcare creşte pentru observatorul faţă de care bara se mişcă.

5.1.3. Diferenţiem formulele de transformare ale lui Lorentz pentru sistemul (S')(5.1):

$$dx' = \frac{dx - u\,dt}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},\quad dy' = dy,\quad dz' = dz,\quad dt' = \frac{dt - u\,dx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

şi întrucît componentele vitezei $\vec{v}'(x', y', z')$ sînt:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'},\quad v'_y = \frac{dy'}{dt'},\quad v'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

rezultă

$$v'_x = \frac{dx - u\,dt}{dt - u\,dx/c^2},\quad v'_y = \frac{dy\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{dt - u\,dx/c^2},\quad v'_z = \frac{dz\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{dt - u\,dx/c^2}$$

şi divizînd numărătorii şi numitorii prin dt:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_{x/c^2}},\quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - uv_{x/c^2}},\quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - uv_{x/c^2}}.$$

5.1.4. Folosind formula 4a din (5.2) care dă timpul t în funcţie de t':

$$t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

se obţine:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \dfrac{v}{c^2}x'_2 - \left(t'_1 + \dfrac{v}{c^2}x'_1\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1 + \dfrac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

şi dacă fenomenul se produce în punctul de abscisă $x' = x'_2 = x'_1$ rezultă

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\dfrac{9/16\cdot c^2}{c^2}}} = 15{,}2 \text{ secunde.}$$

Ceasornicul solidar cu sistemul (S)—$Oxyz$ măsoară un timp mai lung decît timpul propriu.

5.1.5. a) Aparenta contradicţie este explicată dacă ţinem seama de faptul că timpul nu este acelaşi pentru toate sistemele de referinţă.

Timpul de viaţă al mezonului μ care vine din atmosferă este $\tau_0 = 2{,}2\cdot 10^{-6}$ s în raport cu referenţialul propriu, referenţial care odată cu particula se deplasează cu viteza v pe care o vom lua egală cu $v = 0{,}998\cdot c$ (mai mică decît viteza luminii în vid).

Timpul τ marcat de ceasornicul observatorului din laboratorul de pe Pământ este dat de $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}063} = 32 \cdot 10^{-6}$ s, timp în care particula poate să parcurgă cu viteza $v = 0{,}998\ c$, o distanță $S = v \cdot \tau = 9\,580$ m.

b) La același rezultat se ajunge dacă se ține seama de efectul de contracție a lungimilor după direcția mișcării. Spațiul $S = c\tau_0 = 660$ m este un spațiu exprimat în raport cu referențialul laboratorului, față de care particula se află în mișcare. Spațiul propriu S_0 în raport cu referențialul propriu al particulei (față de care aceasta este în repaus) este dat de

$$S_0 = \frac{S}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

în care $v = 0{,}998 \cdot c$ este viteza cu care se deplasează referențialul propriu al particulei, deci viteza particulei față de referențialul laboratorului, și rezultă

$$S_0 = \frac{660}{0{,}063} = 9\,580 \text{ m.}$$

5.1.6. Dacă admitem că nava s-ar fi deplasat uniform cu viteza v, timpul în care nava a parcurs distanța D dus-întors înregistrat de ceasornicul de pe Pământ este $\tau = \frac{2D}{v}$, acesta fiind legat de timpul propriu (înregistrat de ceasornicul de pe navă) prin relația (5.6) : $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Diferența dintre cele două timpuri este:

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \tau - \tau\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{2D}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right);$$

$$\Delta\tau = \frac{2 \cdot 1 \cdot 365 \cdot 86\,400 \cdot 3 \cdot 10^8}{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^8}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{9}}\right) = 379 \text{ zile.}$$

5.1.7. Din raportul $\frac{E}{E_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 30$ rezultă

$$v = 0{,}9994 \cdot c = 2{,}9982 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Distanța străbătută este:

$$S = \tau v = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 19\,787 \text{ m.}$$

5.1.8. Energia de repaus a particulei este $E_0 = m_0c^2$, iar energia totală $E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 10;\ \frac{v^2}{c^2} = 0{,}99;\ v = 0{,}995 \cdot c;$$

$$v = 0{,}995 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}985 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

5.1.9. Electronul accelerat are o energie $E = mc^2 = m_0c^2 + eU$, unde m este masa în mișcare și este $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Din $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + eU$, prin înlocuirea valorilor numerice se obține $v = 2{,}58 \cdot 10^8\ ms^{-1}$ și

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1{,}96.$$

5.1.10. a) $E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $E^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ sau $E^2 - E^2\frac{v^2}{c^2} = m_0^2c^4$. (1)

Ținînd seama de expresia $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ridicată la pătrat: $p^2 = m^2v^2 = E^2\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$ și substituind în (1) se obține

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad (2)$$

b) Variația relativistă a masei cu viteza, pentru viteze de ordinul $\frac{c}{10}$ este neglijabilă și putem considera $m(v) \cong m_0$ și $p \cong m_0v$ și

$$E \cong \sqrt{m_0^2v^2c^2 + m_0^2c^4} = m_0c^2\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}};$$

$$E \cong 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \sqrt{1{,}01} = 8{,}202 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$$

5.1.11. $\varepsilon = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 3{,}31 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$.

$$|p| = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{-7}} = 1{,}106 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot m \cdot s^{-1}.$$

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c \cdot \lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 6{,}10^{-7}} = 0{,}37 \cdot 10^{-35}\ \text{kg (masa de mișcare)}.$$

$$\nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

5.1.12. $h\nu_0 = L_{ex}$; $\nu_0 = \frac{L_{ex}}{h} = \frac{2{,}88 \cdot 10^{-19}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} = 4{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz

sau

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3}{4{,}5} 10^{-6}\ \text{m}.$$

5.1.13. 1°. $L_{ex} = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{0{,}6 \cdot 10^{-6}} = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2{,}06\ \text{eV}$.

2°. Din legea dată de Einstein pentru efectul fotoelectric: $h\nu = L_{ex} + \frac{1}{2}mv^2$, rezultă: $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - L_{ex}$; $\left(\frac{}{}\right)$

punînd $\nu = \frac{c}{\lambda}$, obținem $v = \sqrt{\frac{2(h\nu - L_{ex})}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_0}\right)}{m}}$; numeric:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-20}}{9 \cdot 10^{-31}}} = 3{,}83 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

3°. Pentru anularea fotocurentului, deci a frînării fotoelectronilor astfel ca aceștia să nu ajungă pe anod, din legea efectului rezultă:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_0, \text{ adică } U_0 = \frac{mv^2}{2e} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-20}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}41 \text{ V}.$$

4° a) Electronii care au energie cinetică maximă la sosirea pe anod sînt aceia care părăsesc catodul cu energia cinetică maximă $= \frac{1}{2}mv_0^2$.

Aplicînd teorema energiei: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = eU$, de unde

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU + \frac{1}{2}mv_0^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 + 6{,}6 \cdot 10^{-20} = 8{,}07 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

De remarcat că energia cinetică cu care părăsesc electronii catodul pe seama energiei primite de la fotoni este practic neglijabilă (cu două ordine mai mică) în raport cu energia primită prin accelerarea produsă de diferența de potențial între anod și catod.

b) Din valoarea puterii primite de catod de la fluxul de radiații putem deduce numărul fotonilor care cad pe catod într-o secundă:

$$P = n \cdot h\nu, \; n = \frac{P}{h\nu}.$$

Din valoarea intensității fotocurentului de saturație putem deduce numărul de fotoelectroni extrași din suprafața catodului în unitatea de timp:

$$I_s = n' \cdot e, \; n' = \frac{I_s}{e}.$$

De unde, randamentul sau procentul de fotoni utili (care interacționează cu electronii din metal) este:

$$\frac{n'}{n} = \frac{I_s h}{P \cdot e} \cong 0{,}01 = 1\%.$$

c) Deoarece, chiar în cazul luminării unui fotocatod cu lumină monocromatică, nu toți electronii sînt expulzați cu aceeași energie cinetică, aceasta variind practic între valoarea zero și o valoare maximă $\frac{mv_{max}^2}{2} = h\nu - L_{ext}$. În primul caz, puterea primită de anod ar fi $P_1 = n'eU = I_sU = 8 \cdot 10^{-5}$ W, aceasta provenind de la generatorul electric care produce potențialul accelerator al anodului. În cazul electronilor care părăsesc catodul cu energia maximă, puterea pe care ar primi-o anodul ar fi $P_2 = n' \cdot 8{,}07 \cdot 10^{-18} = 8{,}07 \cdot 10^{-5}$ W.

În concluzie, puterea primită de anod este cuprinsă între aceste valori:

$$8 \cdot 10^{-5} \text{ W} \leqslant P \leqslant 8{,}07 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$$

5.1.14. Impulsul primit de electrodul de platină este datorat impulsului fotonului incident $\left(p_1 = \frac{h}{\lambda}\right)$ anihilat în metal și impulsul echivalent celui cu care pleacă fotoelectronul ($p_2 = mv$).

Din legea efectului fotoelectric scoatem viteza cu care pleacă electronul

$$\frac{hc}{\lambda} = L_{ex} + \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2(hc - L_{ex}\lambda)}{m \cdot \lambda}}.$$

Impulsul primit de electrod este:

$$p = \frac{h}{\lambda} + m\sqrt{\frac{2(hc - L_{ex}\lambda)}{m \cdot \lambda}};$$

$$p = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2{,}32 \cdot 10^{-7}} + 9{,}11 \cdot 10^{-31}\sqrt{\frac{2(6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} - 2{,}32 \cdot 8{,}46 \cdot 10^{-26})}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}32 \cdot 10^{-7}}} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-27} \text{ kgms}^{-1}.$$

5.1.15. Fluxul luminos primit de celulă este: $\Phi = I \cdot \Delta\Omega$;

$$\Delta\Omega = 2 \cdot 10^{-4} \text{ sr}; \quad \Phi = 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 10^{-2} \text{ lumen}.$$

Intensitatea curentului fotoelectric este:

$$i = 10^{-5} \cdot 10^{-2} = 10^{-7} \text{ A} = 0{,}1 \ \mu\text{A}.$$

5.1.16. 1°. Frecvența prag ν_0 rezultă din $h\nu_0 = eU$, adică

$$\nu_0 = \frac{eU}{h} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}8}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 4{,}35 \cdot 10^{14} \text{ Hz},$$

lungimea de undă de prag

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{4{,}35 \cdot 10^{14}} = 0{,}69 \ \mu\text{m}.$$

Energia corespunzătoare unei radiații considerate este:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

și energia cinetică maximă a fotoelectronilor este:

$$\frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_0) = hc\,\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0\lambda},$$

viteza maximă a acestora este $v_M = \sqrt{\frac{2hc}{m} \cdot \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0\lambda}} = 1\,020 \text{ ms}^{-1}$.

2°. Tensiunea de frînare este dată de:

$$eU = h(\nu - \nu_0) = hc\,\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0\lambda},$$

de unde

$$U = \frac{hc}{e} \cdot \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 \cdot \lambda} = 3{,}1 \text{ V}.$$

5.1.17. 1°. Fiecare foton al radiației incidente transportă energia:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5{,}46 \cdot 10^{-7}} = \frac{19{,}86}{5{,}46} \cdot 10^{-19} \text{ Joule}.$$

Fluxul de putere $P = 1{,}515$ W transportă deci

$$N = \frac{1{,}515}{19{,}86} \cdot 10^{19} \text{ fotoni.}$$

Fie η randamentul cuantic; N fotoni provoacă emisia a $n = \eta N$ electroni, fiecare din aceştia transportînd $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Intensitatea I a curentului debitat este: $I = \eta N e$, de unde $\eta = \frac{I}{N \cdot e}$, sau numeric:

$$\eta = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{19{,}86}{1{,}515 \cdot 5{,}46} \cdot 10^{-19} = 3 \cdot 10^{-3} = 3‰.$$

2°. Curentul anodic se anulează cînd $V = U$, adică atunci cînd energia cinetică, $\frac{1}{2} mv^2$, a electronilor care se îndreaptă de la catod spre anod este egală cu lucrul eU, efectuat contra cîmpului electrostatic:

$$U = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{e}.$$

În conformitate cu legea lui Einstein, această energie cinetică este diferenţa între energia $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, a fotonului incident şi energia de extracţie, $L_{ex} = \frac{hc}{\lambda_0}$, λ_0 reprezentînd pragul fotoelectric.

Rezultă

$$U = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 0{,}475 \text{ V};$$

avem deci

$$i = 2 \cdot 10^{-3}\left(1 - \frac{V}{0{,}457}\right) \text{A}.$$

5.1.18. 1°. $h\nu_1 = L_{ex} + \frac{1}{2} mv_1^2$; $h\nu_2 = L_{ex} + \frac{1}{2} mv_2^2$; $h(\nu_2 - \nu_1) = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$;

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = eV_1; \quad \frac{1}{2} mv_2^2 = eV_2; \quad h = e\frac{V_2 - V_1}{\nu_2 - \nu_1}, \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1}; \quad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2};$$

$$h = \frac{e}{c} \frac{(V_2 - V_1)(\lambda_1 \cdot \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$h = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \frac{0{,}6 \cdot 2\,790 \cdot 2\,450 \cdot 10^{-20}}{(2\,790 - 2\,450) \cdot 10^{-10}} = 6{,}43 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2°. $L_{ex} = h\nu_1 - eV_1$ sau $L_{ex} = h\nu_2 - eV_2$

sau

$$L_{ex} = 6{,}43 \cdot 10^{-34} \cdot 1{,}0752 \cdot 10^{15} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}66 = 5{,}86 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

3°. Pentru frecvenţa de prag: $\frac{mv^2}{2} = 0$.

$$L_{ex} = h\nu_0, \quad \nu_0 = \frac{L_{ex}}{h};$$

$$\nu_0 = \frac{5{,}86 \cdot 10^{-19}}{6{,}43 \cdot 10^{-34}} = 9{,}114 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1};$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{9{,}114 \cdot 10^{14}} = 3\,292 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3\,292 \text{ Å}.$$

4°. $P_{electrod} = P_{foton} - (-m_e v) = p + m_e v$,

$$P_1 = p_1 + m_e v_1 = \frac{h\nu_1}{c} + m_e v_1; \quad \frac{1}{2} m_e v_1^2 = h\nu_1 - L_{ex};$$

$$(m_e v_1)^2 = 2m_e(h\nu_1 - L_{ex}).$$

$$P_1 = \frac{h\nu_1}{c} + \sqrt{2m_e(h\nu_1 - L_{ex})} = \frac{h}{\lambda_1} + \sqrt{2m_e(h\nu_1 - L_{ex})};$$

urmînd același raționament obținem:

$$P_2 = \frac{h}{\lambda_2} + \sqrt{2m_e(h\nu_2 - L_{ex})}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține: $P_1 = 4{,}373 \cdot 10^{-25}$ kgms^{-1} și $P_2 = 6{,}179 \cdot 10^{-25}$ kgms^{-1}.

5.1.19. 1°. $L_{ex} = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$;

$$L_{ex} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 4{,}95 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

2°. $h\nu = L_{ex} + \frac{m_e v_{max}^2}{2}$; $h\frac{c}{\lambda} = L + E_c$; $E_{c_{max}} = \frac{hc}{\lambda} - L_{ex}$;

$$E_{c_{max}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-7}} - 4{,}95 \cdot 10^{-19} = 6{,}6 \cdot 10^{-19} - 4{,}95 \cdot 10^{-19} = 1{,}65 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

3°. $E_{c\text{-}max} = \frac{m_e v_{max}^2}{2}$; $v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{c\text{-}max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}6 \cdot 10^6$ ms^{-1}.

4°. $P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$; $p = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{-7}} = 2{,}2 \cdot 10^{27}$ kgms^{-1}.

5°. $\varepsilon = h\nu = mc^2$; $m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-7}} = 7{,}3 \cdot 10^{-36}$ kg.

5.1.20. 1°. a) $E_{c\text{-}max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}236 \cdot 10^{-19}$ J.

b) Randamentul efectului fotoelectric se definește prin raportul între numărul de fotoelectroni expulzați ($n_{electroni}$) și numărul de fotoni incidenți (n_{fotoni}).

$$\eta = \frac{n_{electroni}}{n_{fotoni}};$$

$$n_{fotoni} = \frac{\Phi}{\varepsilon} = \frac{\Phi}{h\frac{c}{\lambda}} = \frac{10^{-3}}{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{5{,}6 \cdot 10^{-7}}} = 2{,}8 \cdot 10^{15} \text{ fotoni}.$$

$$n_{electroni} = \frac{I}{e} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2{,}8 \cdot 10^{13} \text{ fotoelectroni}.$$

$$\eta = \frac{2{,}8 \cdot 10^{13}}{2{,}8 \cdot 10^{15}} = 0{,}001 = 1\%_{00}.$$

2°. a) $D_m = 2i_m - A$; $i_m = \frac{1}{2}(D + A) = 45°$.

b) $n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{D+A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)} = \sqrt{2} = 1{,}41.$

c) Din: $\sin i = n \sin r = n \sin (A - r')$ în care $r' \geqslant l$ cu $\sin l = \dfrac{1}{n}$

$$\sin i = n(\sin A \cos r' - \sin r' \cos A) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right),$$

$$\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{11}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}36, \quad i = 21^{\circ}5'.$$

3°. $d \sin \varphi = k\lambda$ cu $k = 2$; $d = \dfrac{2\lambda}{\sin \varphi} = 4\lambda = 22{,}4 \cdot 10^{-7}$ m.

5.1.21. Energia cinetică medie a mișcării de translație a moleculelor este dată de expresia

$$W_c = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T = \frac{3}{2}kT,$$

unde k este constanta lui Boltzmann.

Energia transportată de o radiație este: $\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$.

Din egalitatea $\dfrac{3}{2}kT = h\dfrac{c}{\lambda}$, rezultă $T = \dfrac{2}{3}\dfrac{hc}{k\lambda}$.

$$T = \frac{2}{3}\frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 1{,}6 \cdot 10^{4} \text{ K}.$$

5.1.22. Impulsul fotonului este $p = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$, iar impulsul unui atom de heliu, dacă considerăm că viteza pătratică medie este

$P_{He} = m\sqrt{\dfrac{3RT}{mN}} = \sqrt{3mkT}$ și este egal cu impulsul a n fotoni:

$$n\frac{h}{\lambda} = \sqrt{3mkT}; \quad n = \frac{\lambda}{h}\sqrt{3mkT} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} \cdot \sqrt{3{,}4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300},$$

$$n = 13\,500 \text{ fotoni}.$$

5.1.23. 1. Din condiția de maxime ($d \sin \varphi = n\lambda$) scrisă pentru maximul de ordinul n și cel de ordinul $n + 1$, rezultă: $\lambda = d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$ și

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2} = 33 \cdot 10^{-20} \text{J}.$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2} = 11 \cdot 10^{-28} \text{ kgms}^{-1}.$$

2. $P = n\dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{IS}{\varepsilon}p = \dfrac{IS}{h\dfrac{c}{\lambda}}\dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{IS}{c} = \dfrac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{3 \cdot 10^{8}} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ kgms}^{-1}.$

5.1.24. Legea efectului fotoelectric scrisă pentru cele două cazuri:

$$\frac{hc}{\lambda} = L_{ex} + eU_f; \quad \frac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} = L_{ex} + e(U_f + \Delta U).$$

Se scoate expresia lucrului de extracție (L_{ex}) din prima relație și se introduce în a doua și obținem:

$$e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda\Delta U(\lambda - \Delta\lambda)} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 500 \cdot 10^{-8}}{35 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}59 \cdot 30 \cdot 10^{-8}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ coulombi.}$$

5.1.25. 1°. $\lambda_1 = \dfrac{\frac{1}{N}\sin\varphi}{k} = \dfrac{\frac{1}{500}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2\,000}\text{ mm} = 5\,000$ Å.

2°. $k = \dfrac{\frac{1}{N}\sin\varphi}{\lambda_2} = \dfrac{\frac{1}{500}\cdot 1}{4{,}5 \cdot 10^{-4}} = 4{,}4$; se consideră numărul întreg $k = 4$ și numărul total $n = 4 + 4 + 1 = 9$ maxime.

3°. $h\nu_1 = h\nu_0 + eV_1$ și $h\nu_2 = h\nu_0 + eV_2$

rezultă

$$h(\nu_1 - \nu_2) = e(V_1 - V_2) \text{ și } h = \frac{e(V_1 - V_2)}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{e\lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot (V_1 - V_2) \cdot h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

4°. $E_c = h\nu - L_{ex} = \dfrac{hc}{\lambda} - L_{ex} = \dfrac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} - 2{,}3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J;

$$E_c = 0{,}28 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

5.1.26. 1°. $E = p \cdot t$, $E = 20 \cdot 60 = 1\,200$ J.

$$E = nh\nu = nh\frac{c}{\lambda}; \quad n = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{1\,200 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{21} \text{ fotoni.}$$

2°. $(a + b)\sin\varphi = k\lambda$.

$$a + b = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{1/2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2\mu\text{m.}$$

3°. $x = f \operatorname{tg}\varphi$ (fig. 5.3), $f = \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{2} = 0{,}50$ m.

$$x = 0{,}50 \operatorname{tg} 30° = 0{,}5\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}29 \text{ m.}$$

4°. a) $L_{ex} = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\dfrac{3 \cdot 10^8}{6{,}6 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^{-19}$ J.

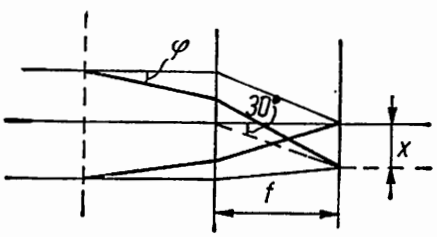


Fig. 5.3.

b) $h\dfrac{c}{\lambda} = h\dfrac{c}{\lambda_0} + \dfrac{1}{2}mv^2$;

$$\frac{1}{2}mv^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^{-34}\, 3 \cdot 10^8 \frac{1}{10^{-7}}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6{,}6}\right),$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{4{,}8}{5}10^{-19} = 9{,}610^{-20} \text{ J,}$$

$$v = 4{,}61 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

5.1.27. 1. $\lambda = 4\,500$ Å; $c = 2{,}25 \cdot 10^8$ m/s.

2. $\varepsilon = h\nu = 4{,}4 \cdot 10^{-19}$ J.

$\frac{\nu}{\nu_0} = 1$; frecvența rămîne constantă: $\nu = \nu_0 = \frac{c_0}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda}$.

5.1.28. Pe măsură ce sînt extraşi electroni din sferă, aceasta se încarcă electric căpătînd un potenţial pozitiv care se opune expulzării electronilor, aşa încît în final, fotonul incident va cheltui toată energia sa $\left(h\frac{c}{\lambda}\right)$ pentru extragerea electronilor.

Lucrul mecanic suplimentar, cheltuit din energia fotonului incident pentru învingerea potenţialului sferei, este:

$$\frac{hc}{\lambda} - L_{ex\text{-}Cu} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} - 4{,}47 = 1{,}73 \text{ eV}.$$

Rezultă $V = 1{,}73$ V (potenţialul maxim la care se poate încărca sfera).

5.1.29. 1°. $\frac{m\tilde{v}_0^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}$; $v_0 = 3{,}46 \cdot 10^6$ m/s.

2°. $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m\tilde{v}_0^2}{2} + eU = 3{,}3 \cdot 10^{-18}$ J.

3°. $U_{fr} = \frac{m\tilde{v}_0^2}{2e} = 0{,}36$ V.

5.1.30. $\frac{hc}{\lambda} - L_{ex} = e \cdot E \cdot d$; $d = 3{,}7$ cm.

5.1.31. Din: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$, punînd $n = 1$ şi $n' = 6$ se obţine λ pentru radiaţia emisă de atomii de hidrogen: $\lambda = 911$ Å.

Din: $h\nu = h\nu_0 + eU_f$, rezultă: $h\nu_0 =$ lucrul de extracţie $= h\nu - eU_f = h\frac{c}{\lambda} - eU_f = 4{,}5$ eV.

5.1.32. a) În mişcarea electronului pe traiectorie circulară în jurul nucleului este satisfăcută relaţia:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}. \tag{1}$$

Conform primului postulat de cuantificare a orbitelor electronilor rezultă

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) deducem:

$$v_n = \frac{e^2}{2nh\varepsilon_0} \text{ şi } r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi\, me^2} \tag{3}$$

adică viteza electronului şi respectiv, raza orbitei acestuia pentru orbita staţionară de număr cuantic n.

Pentru orbita cea mai apropiată de nucleu ($n = 1$) rezultă:

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi\, me^2} = \frac{(6{,}62 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{\pi \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2} = 0{,}528 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

$$v_1 = \frac{e^2}{2h\varepsilon_0} = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 2{,}18 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}.$$

Se remarcă faptul că viteza electronului în atom este mică în comparație cu $c = 3 \cdot 10^8$ ms^{-1}, deci nu sîntem obligați să ținem seama de efectele relativiste.

b) Energia electronului în mișcarea sa pe o orbită staționară în jurul nucleului este constituită din energia cinetică și energia potențială:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Luînd din (1) $mv_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_n}$ obținem

$$E_n = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Și înlocuind pe r_n cu expresia sa din (3) se obține:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} \tag{4}$$

unde n este un număr întreg, adică energia electronului ia numai acele valori care rezultă din expresia (4) în care dăm valori întregi lui n.

Pentru starea fundamentală a atomului de hidrogen ($n = 1$), energia sa are valoarea

$$E_1 = -\frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (8{,}85 \cdot 10^{-12})^2 (6{,}62 \cdot 10^{-34})^2} = 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13{,}6 \text{ eV}.$$

c) Conform postulatului de cuantificare a energiilor emise sau absorbite de atom la trecerea electronului de pe o orbită staționară pe alta, aceste energii apar sub formă de radiații electromagnetice ale căror frecvențe satisfac relația:

$$E_n - E_{n'} = h\nu_{n \to n'} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right),$$

iar numărul de undă $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ al radiației este dat de:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8ch^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

unde $R_\infty = \frac{me^4}{8ch^3\varepsilon_0^2}$ este o constantă și poartă numele de constanta lui Rydberg, iar n și n' sînt numere întregi.

d) Constanta lui Rydberg are valoarea:

$$R_\infty = \frac{me^4}{8ch^3\varepsilon_0^2} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}(1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8{,}3 \cdot 10^8 (6{,}62 \cdot 10^{-34})^3 \cdot (8{,}85 \cdot 10^{-12})^2} = 1{,}097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Remarcă. S-a constatat că, constanta lui Rydberg depinde totuși de atom, deoarece raportul între masa unui nucleon și masa unui electron este aproximativ 2 000, ceea ce nu ne îndreptățește să considerăm masa nucleului infinită în raport cu aceea a electronului și ca atare, la mișcarea electronului în jurul nucleului, trebuie să ținem soama și de mișcarea nucleului în jurul centrului comun de masă al sistemului; aceasta impune introducerea în expresia constantei lui Rydberg, în locul masei electronului, masa redusă a sistemului nucleu-electron; $\mu = \frac{m_e M_{\text{nucleu}}}{m_e + M_{\text{nucleu}}}$. Cu această corecție, constanta lui Rydberg pentru atomul de hidrogen are valoarea $R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7$ m^{-1}, valoare în bună concordanță cu rezultatele experimentale.

e) Lungimile de undă ale liniilor spectrului atomului de hidrogen pentru seriile Lyman și Balmer sînt date de:

$\frac{1}{\lambda_{Lyman}} = 1{,}09677 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$ cu $n' = 2, 3, 4, \ldots$ cuprinse între λ_1, corespunzător la $n' = 2$: $\lambda_{1-Lyman} = 1\,215$ Å și $\lambda_{\infty\ Lyman} = 912$ Å.

$\frac{1}{\lambda_{Balmer}} = 1{,}09677 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$; cu $n' = 3, 4, 5,$ cuprinse între $\lambda_{1-Balmer} =$ $= 6563$ Å și $\lambda_{\infty-Balmer} = 3\,647$ Å.

5.1.33. Radiația emisă de ionul de heliu are energia $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ și din formula Balmer-Rydberg, $\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right]$, rezultă: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcRZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) =$ $= hcR2^2 \cdot \frac{3}{2^2} = 3hcR$.

Atomul de hidrogen absoarbe energia fotonului, ionizîndu-se și electronul părăsește atomul cu o energie cinetică dată de:

$$E_c = 3hcR - E_i.$$

Energia de ionizare a atomului de hidrogen este dată de:

$$E_i = \frac{hc}{\lambda_i} \text{ cu } \lambda_i = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right), \text{ deci } E_i = hcR.$$

Rezultă $E_c = 3hcR - hcR = 2hcR$.
Viteza cu care părăsește electronul atomul de hidrogen rezultă din

$$\frac{m_e v^2}{2} = 2hcR, \text{ adică } v = \sqrt{\frac{4hcR}{m_e}} = 3{,}1 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}.$$

Observație. Nu s-a ținut seama de diferența între valoarea constantei lui Rydberg pentru ionul de heliu și respectiv, atomul de hidrogen, dar aceasta nu introduce erori sesizabile ($\sim 10^{-2}\%$). De asemenea, nu s-a ținut seama de reculul atomului de hidrogen.

5.1.34. a) $I = \frac{Q}{t} = \frac{e}{T} = e\nu_n$, unde ν_n este frecvența cu care se rotește electronul pe orbita a $n - a$: $\nu_1 = \frac{v_1}{2\pi r_1}$; $\nu_2 = \frac{v_2}{2\pi r_2}$, r și v fiind raza orbitei și respectiv, viteza electronului pe orbita respectivă.

Înlocuind expresiile razei și vitezei (vezi problema 5.32), se obține pentru starea fundamentală:

$$i_n = \frac{m e^5}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3}; \quad i_1 = 1{,}06 \text{ mA}.$$

5.1.35. Folosind formula lui Balmer (5.24), putem scrie

$$\frac{1}{\lambda_1} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1'^2}\right); \quad \frac{1}{\lambda_2} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2'^2}\right) \text{ și } \frac{1}{\lambda_3} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_3'^2}\right)$$

din care se deduc: n, n_1', n_2', n_3' și apoi pentru n găsit se găsesc celelalte valori ale lui n' și respectiv

$$\lambda_{4,5}, \ldots; \quad \lambda_4 = 18\,800 \text{ Å}, \quad \lambda_5 = 6\,570 \text{ Å}, \quad \lambda_6 = 4\,870 \text{ Å}.$$

5.1.36. În conformitate cu teoria lui Bohr, electronul atomului de hidrogen aflat în starea energetică de număr cuantic n poate să revină în starea fundamentală ($n = 1$) direct ($n \to 1$) emiţînd o radiaţie de frecvenţă ν_{n-1}, sau în trepte, făcînd orice combinare de cîte două nivele între cele n nivele:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5.1.37. Conform formulei (5.24) avem:

$$\frac{1}{\lambda_{4-2}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \text{ cu } R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

rezultînd $\lambda_{4-2} = 4\,861$ Å; $\nu_{4-2} = \frac{c}{\lambda_{4-2}} = 6{,}16 \cdot 10^{14}$ Hz.

5.1.38. Formula lui Balmer generalizată de Rydberg pentru ionii hidrogenoizi este:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right).$$

În cazul ionului de heliu He^+, constanta $R_{He} = 1{,}097 \cdot 10^7$ m^{-1} şi $Z = 2$. Pentru emisia primei radiaţii, formula este:

$$\frac{1}{1{,}085 \cdot 15^{-7}} = 1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 4 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}\right).$$

Pentru emisia celei de-a doua radiaţii:

$$\frac{1}{0{,}304 \cdot 10^{-7}} = 1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 4 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Rezultă: $n_3 = 5$.

5.1.39. $\frac{mv_{max}^2}{2} = eU$; $v_{max} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 3 \cdot 10^7$ ms^{-1}.

$$eU = h\nu_{max} = h\frac{c}{\lambda_{min}}; \quad \lambda_{min} = \frac{hc}{eU} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 5 \text{ Å}.$$

5.1.40. $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-8}} = 9{,}93 \cdot 10^{-18}$ J $= 62$ eV.

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-13}} = 198{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 1{,}23 \cdot 10^6 \text{ eV}.$$

5.1.41. $eU \geqslant \frac{hc}{\lambda}$; $U \geqslant \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-13} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}2 \cdot 10^6$ V.

$$\frac{m}{m_0} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = \frac{m_0 + \frac{eU}{c^2}}{m_0};$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{9 \cdot 10^{-31} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}}}{9 \cdot 10^{-31}} = 3{,}3.$$

5.1.42. Din legea conservării impulsului rezultă $\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = mv$, unde m este masa atomului şi lungimea de undă a radiaţiei este dată de $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$, adică: $\lambda = \frac{4}{3R}$.

Viteza de recul a atomului este: $v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{3hR}{4m}$;

$$v = \frac{3 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 1{,}0967 \cdot 10^{7}}{4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 3{,}25 \text{ ms}^{-1}.$$

5.1.43. Din legea lui Bragg: $2d \sin \varphi = k\lambda$ rezultă:

$$d = \frac{k\lambda}{2 \sin \varphi} = \frac{1 \cdot 1{,}54 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0{,}848} = 0{,}91 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

5.1.44. După teoria lui de Broglie, oricărei microparticule aflate în mișcare i se poate asocia o undă cu $\lambda_B = \frac{h}{mv}$.

1°. a) $\lambda_1 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{9}} = 61 \cdot 10^{-7}$ m; b) $\lambda_2 = 61 \cdot 10^{-8}$ m;

c) $\lambda_3 = 61 \cdot 10^{-10}$ m $= 61$ Å.

2°. a) $\lambda_1' = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{2}} = 4 \cdot 10^{-9}$ m; b) $\lambda_2' = 4 \cdot 10^{-11}$ m;

c) $\lambda_3' = 4 \cdot 10^{-13} = 0{,}04$ Å.

3°. $\lambda'' = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{10^{-7} \cdot 10} = 6{,}62 \cdot 10^{-18}$ m.

Observație. În cazul bilei, chiar la dimensiuni relativ mici și pentru viteze mici, caracterul ondulatoriu este neglijabil: lungimea de undă asociată acestei particule ($\lambda = 6{,}61 \cdot 10^{-18}$ m) este sub dimensiunile nucleului (10^{-15} m), deci imperceptibile.

5.1.45. În conformitate cu relația (5.33), masa nucleului de $^4_2$He este

$$M_{\text{He}} = 2M_p + 2M_n - \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Lucrînd cu unități atomice de masă, 1 u.a.m. $= \frac{1}{6{,}023} 10^{-23}$ kg $= 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ kg și echivalentul în eV al u.a.m. fiind

$$E_0 = \frac{(2{,}99793)^2}{1{,}6021 \times 6{,}023} 10^{16+19-26} = 9{,}314 \cdot 10^{8} \text{ eV}.$$

Defectul de masă Δm corespunzător energiei de legătură, exprimat în u.a.m. este:

$$\Delta m = \frac{28{,}3 \cdot 10^{6}}{9{,}314 \cdot 10^{8}} = 0{,}03038 \text{ u.a.m.}$$

Rezultă pentru masa nucleului de $^4_2$He:

$$M_{\text{He}} = 2(1{,}007276) + 2(1{,}008665) - 0{,}03038 = 4{,}00140 \text{ u.a.m.}$$

Masa atomului de heliu se obține adăugînd masa celor doi electroni:

$$M = 4{,}00140 + 2 \cdot 5{,}496 \cdot 10^{-4} = 4{,}0025 \text{ u.a.m.}$$

5.1.46. 1°. $E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}35 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 3{,}15 \cdot 10^{-11}$ J.

2°. $P_R = N \cdot V \cdot E = 10^{13} \cdot 10^{5} \cdot 3{,}15 \cdot 10^{-11} = 3{,}15 \cdot 10^{7}$ W.

3°. $N = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{235} \cong 2{,}56 \cdot 10^{21}$ atomi.

20 kg uraniu conțin $2{,}56 \cdot 10^{21} \cdot 2 \cdot 10^{4} = 5{,}12 \cdot 10^{25}$ atomi de uraniu.

Combustibilul se schimbă cînd jumătate, adică $2{,}56 \cdot 10^{25}$ atomi, au fisionat. Într-o secundă, numărul de fisionări este, conform enunțului de la punctul 2°, de $10^{19} \cdot 10^5 = 10^{18}$; rezultă că intervalul de timp pentru schimbarea combustibilului este

$$t = \frac{2{,}56 \cdot 10^{25}}{10^{18}} = 2{,}56 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 296 \text{ zile.}$$

4°. $P_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{500 - 300}{500} P_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{500} \cdot 3{,}15 \cdot 10^7 = 6{,}3 \cdot 10^6$ W.

5°. $P_m = Rv = kv^3$, $v = \sqrt[3]{\frac{P_m}{k}} = 11{,}65 \text{ ms}^{-1} = 42 \text{ km/h.}$

5.1.47. Energia de legătură pentru particula ${}^4_2\alpha$ este

$$(2M_p + 2M_n - M_\alpha)c^2 = 43{,}668 \cdot 10^{-13} \text{ J.}$$

Energia eliberată prin fuzionarea a doi deuteroni pentru formarea unei particule ${}^4_2\alpha$ este egală cu diferența dintre energia de legătură a particulei α și energia de legătură a celor doi deuteroni, adică $36{,}448 \cdot 10^{-13}$ J.

5.1.48. a) $E_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$, $P_\alpha^2 = 2m_\alpha E_\alpha = p_N^2 = m_N^2 v_N^2$.

$$v_N = \frac{\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}{m_N} = 3{,}4 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

b) $\frac{E_N}{E_\alpha + E_N} = 0{,}020.$

5.1.49. 1°. Numărul de atomi dezintegrați în timp de o oră este

$$n = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-9}}{226} \cdot \frac{1}{2\,300 \cdot 365 \cdot 24} = 133 \cdot 10^3 \text{ atomi.}$$

2°. $\frac{mv^2}{r} = qvB$; $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} qvBr = E_\alpha$.

3°. a) Făcînd abstracție de procesele ce urmează după dezintegrarea atomului de radiu ^{226}Ra, numărul de particule α fiind cel de la punctul 1°

$$E_\alpha = \frac{25 \cdot 4{,}18}{133 \cdot 10^{12}} = 1{,}1 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 7 \text{ MeV.}$$

b) $v = \frac{2E_\alpha}{qrB} = \frac{2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-12}}{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}965} = 1{,}88 \cdot 10^7$ m/s,

c) $E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$, $m_\alpha = \frac{2E_\alpha}{v^2} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg.

5.1.50. Folosind legea de dezintegrare radioactivă

$$\frac{N_I(t)}{N_P(t)} = \frac{N_{0-I} \cdot e^{-\lambda_I t}}{N_{0-P} \cdot e^{-\lambda_P t}}$$

de unde $e^{(\lambda_P - \lambda_I)t} = \frac{1}{4}$ sau $(\lambda_I - \lambda_P)t = 2 \ln 2$.

Dar $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, deci $t\left(\frac{1}{T_I} - \frac{1}{T_P}\right) \ln 2 = 2 \ln 2$:

rezultă: $t = 2 \frac{T_I T_P}{T_P - T_I} = 36{,}3$ zile.

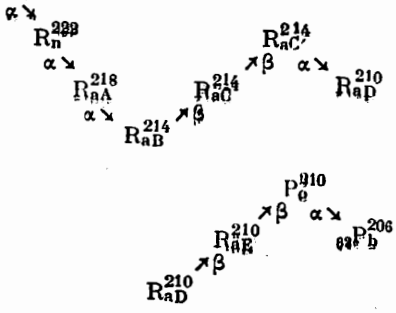
5.1.51. a) Din legea dezintegrării radioactive rezultă $5n = 15ne^{-\lambda t}$, $5 = 15e^{-\lambda t}$,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 3 = \frac{T}{\ln 2} \ln 3; \qquad t = \frac{5\,650 \cdot 1{,}09861}{0{,}698} = 8956{,}9 \text{ ani.}$$

b) $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + 156$ keV;

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 156 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-16}}{9 \cdot 10^{-31}}} \cong 2{,}855 \cdot 10^{8} \text{ m/s.}$$

5.1.52. 1°. ^{226}Ra



2°. 8 dezintegrări α și 6 dezintegrări β.

5.1.53. $\varepsilon = h\nu = 0{,}82$ MeV $= 131{,}2 \cdot 10^{-15}$ J.

$$\nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{131{,}2 \cdot 10^{-15}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 17 \cdot 10^{19} \text{ Hz.}$$

5.1.54. $N_2(t) = N_1(0) \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$.

5.1.55. a) $^{32}_{16}S + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{32}_{15}P^{*} + {}^{1}_{+1}p$; $^{32}_{15}P^{*} \rightarrow {}^{32}_{16}S + {}^{0}_{-1}\beta$.

$$M_{S32} + M_n - (M_{P32} + M_{pr}) = -0{,}00046 \text{ u;}$$

energia reacției (endoenergetică) este: $E = 0{,}00046 \times 931 \cdot 10^{6} = 0{,}428 \cdot 10^{6}$ eV.

b) Numărul de particule β emise și deci numărul de nuclee de $^{32}P^{*}$ care au suferit procesul menționat, în timp de un minut este: $\Delta N_\beta = -\dfrac{C\Delta\theta}{E} = 3 \cdot 10^{17}$, iar numărul total (inițial) de nuclee de ^{32}P este: $N_{P32} = \dfrac{\Delta N_\beta \cdot T}{t \ln 2} = 9{,}35 \cdot 10^{21}$.

Masa de sulf iradiată este: $m_{S32} = \dfrac{100\Delta N_{P32}}{N_{AV}} \cdot A_{S32} = 50$ g.

5.1.56. Numărul de nuclee de ^{32}P care trebuie să se dezintegreze într-o secundă, adică activitatea substanței, este dată de

$$\lambda N = \frac{N \ln 2}{T} = \frac{10}{1{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}} = 3{,}68 \cdot 10^{13} \text{ dezintegrări pe secundă.}$$

Rezultă că substanța conține $N = \dfrac{3{,}68 \cdot 10^{13} \cdot T}{\ln 2} = 6{,}55 \cdot 10^{19}$ atomi de fosfor; masa de fosfor conținută este:

$$m = \frac{N}{N_A} \cdot A = \frac{6{,}55 \cdot 10^{19}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 32 \text{ g} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ g.}$$

5.1.57. 1°. Energia fotonului de frecvență ν emis de nucleul excitat este:

$$\varepsilon = h\nu \text{ și deci } \nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{14{,}4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 3{,}48 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

și

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}48 \cdot 10^{18}} = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0{,}86 \text{ Å}.$$

Deci radiația emisă de nucleu este situată în gama radiației X.

2°. Fotonul emis de nucleu prin dezexcitare are un impuls $p' = \varepsilon/c$. Nucleul care era inițial în repaus va primi un impuls p, care în conformitate cu legea conservării impulsului este astfel ca $p + p' = 0$, deci

$$p = \varepsilon/c = \frac{h\nu}{c} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}48 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^8} = 7{,}68 \cdot 10^{-23} \text{ Jsm}^{-1}.$$

5.1.58. 1°. Ținînd seama de echivalentul în energie al u.a.m.: $1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}494 \cdot 10^{-10}$ J = 932,5 MeV și scriind defectul de masă:

$$\Delta E_{(\text{MeV})} = (8M_p + 8M_n - M_{{}^{16}_{8}O}) \cdot 932{,}5 = 123{,}68 \text{ Mev}.$$

Energia de legătură per nucleon este:

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{123{,}68}{16} = 7{,}73 \text{ Mev},$$

aceasta fiind o energie mare care explică stabilitatea deosebită a nucleului ${}^{16}_{8}O$.

2°. Reacția ${}^{16}_{8}O \rightarrow {}^{15}_{8}O + {}^{1}_{0}n$ necesită o energie (în MeV)

$$\Delta E' = 932{,}5[(15{,}0030 + 1{,}00866) - 15{,}9949] = 15{,}72 \text{ MeV}.$$

5.1.59. Numărul de atomi conținut într-un gram de uraniu este: $n_0 = \frac{N}{235}$ din care vor fisiona $n = \frac{0{,}05 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{235}$, iar energia degajată:

$$W = 200 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{0{,}05 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{235} = 8{,}19 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

5.1.60. 1°. $n = 9{,}15 \cdot 10^9$ particule;
2°. $Q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C;
3°. $N = 6{,}3 \cdot 10^{23}$; $m = 0{,}63 \cdot 10^{-23}$ g;
4°. $v = 17 \cdot 10^6$ ms^{-1}.

5.1.61. 1°. $n_0 = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{226} = 1{,}06 \cdot 10^{19}$ atomi.

2°. $n = \frac{n_0}{2} = \frac{1{,}06 \cdot 10^{19}}{2} = 5{,}3 \cdot 10^{18}$ atomi $= 2 \cdot 10^{-3}$ g radiu.

3°. La momentul $t = 0$, numărul nucleelor este n_0. În intervalul de timp dt se dezintegrează

$$dn = \lambda n \, dt \text{ nuclee.} \tag{1}$$

Prin integrarea relației (1) se obține numărul de nuclee rămase nedezintegrate la momentul t:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Folosind timpul de înjumătățire:

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}$$

sau $\ln \frac{1}{2} = -\lambda T$ sau $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{T}$;

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1\,680 \cdot 365 \cdot 86\,400} = 1{,}3 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}.$$

4°. Intervalul de un an este mic în comparație cu $T = 1\,680$ ani și din acest motiv folosim: $dn = -\lambda n_0 dt$ cu $dt = 1$ an.

Masa de radiu dezintegrată este:

$$m_d = \lambda m_0\ dt = 1{,}3 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 365 \cdot 86\,400,$$

$$m_d = 1{,}64 \cdot 10^{-9}\ kg = 1{,}64 \cdot 10^{-3}\ mg.$$

5°. Folosim relația lui Einstein dintre masă și energie

$$W = \Delta m \cdot c^2;\ \Delta m = \frac{E}{c^2}.$$

Masa de radiu dezintegrată într-un interval de timp de un an fiind m_d (cea calculată la punctul 4°), variația relativă a masei de radiu care s-a dezintegrat este:

$$\frac{\Delta m}{m_d} = \frac{E}{m_d c^2} = \frac{2{,}05 \cdot 10^4}{1{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

5.1.62. 1°. În reacțiile nucleare se conservă numărul de masă și numărul de sarcină:

$$92 + 0 = 54 + Z + 0;\ Z = 38;$$
$$235 + 1 = A + 95 + 2;\ A = 236 - 97 = 139;$$
$$235 + 1 = 148 + A' + 3;\ A' = 236 - 151 = 85;$$
$$92 + 0 = 57 + Z' + 0;\ Z' = 92 - 57 = 35.$$

2°. 1 u.a.m. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg. Variația de masă suferită de un nucleu de uraniu prin fisiune este:

$$\Delta m = 0{,}21\ \text{u.a.m.} = 0{,}21 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg = 3{,}49 \cdot 10^{-28}\ kg$$

care corespunde unei degajări de energie:

$$E = \Delta m c^2 = 3{,}49 \cdot 10^{-28} \times 9 \cdot 10^{16} = 3{,}14 \cdot 10^{-11}\ J = 196\ MeV.$$

6. TABELE CU CONSTANTE FIZICE

Tabelul 6.1

Unităţi fundamentale şi suplimentare în Sistemul Internaţional (SI) de unităţi:

Mărimea	Unităţi de măsură	Simbolul unităţii
	a) Unităţi fundamentale	
1. Lungimea	metru	m
2. Masa	kilogram	kg
3. Timpul	secunda	s
4. Intensitatea curentului electric	amper	A
5. Temperatura termodinamică	kelvin	K
6. Intensitatea luminii	candela	cd
7. Cantitatea de substanţă	kilomolul	kmol
	b) Unităţi suplimentare	
1. Unghiul plan	radian	rad
2. Unghiul solid	steradian	sr

Tabelul 6.2

Constante fizice

1. Acceleraţia căderii libere	$9{,}80665\ m/s^2 \approx 9{,}81\ m/s^2$
2. Raza medie a Pământului	6 400 km
3. Masa Pământului	$5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg
4. Distanţa medie între Pământ şi Soare	$1{,}5 \cdot 10^8$ km
5. Constanta atracţiei universale	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg \cdot s^2$
6. Temperatura de zero absolut	$-273{,}15°C \approx -273°C$
7. Numărul lui Avogadro	$6{,}023 \cdot 10^{26}\ kmol^{-1}$
8. Masa electronului	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
9. Sarcina electronului	$\approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C
10. Numărul lui Faraday	$9{,}65 \cdot 10^7$ C/kg echivalent
11. Constanta lui Planck	$6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J · s
12. Viteza luminii în vid	$2{,}99793 \cdot 10^8\ m/s \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$
13. Viteza sunetului în aer (0°C)	332 m/s
14. Masa protonului	$1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg
15. Masa neutronului	$1{,}6746 \cdot 10^{-27}$ kg
16. Unitatea atomică de masă (u.a.m.)	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
17. Constanta gazelor perfecte	$8{,}31\ J/mol \cdot K$
sau	$0{,}082\ atm \cdot dm^3/mol \cdot K$
sau	$1{,}98\ cal/mol \cdot K$

18.	Volum molar în condiții normale	22,41 $m^3/kmol$
19.	Permitivitatea vidului	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
20.	Permeabilitatea vidului	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$ H/m

Tabelul 6.3

Densitatea (în g/cm^3 sau 10^3 kg/m^3)

a) Corpuri solide

Aluminiu	2,7
Lemn	0,5—0,8
Fier (oțel)	7,8
Aur	19,3
Cupru	8,9
Parafină	0,9
Platină	21,5
Plexiglas	1,2
Plumb	11,3
Argint	10,5
Sticla	2,5—2,7
Fonta	7,0—7,8

b) Lichide

Benzină	0,70
Apă (4°C)	1
Apă de mare	1,03
Glicerină	1,26
Petrol	0,80
Mercur (0°C)	13,6

Se dau valorile pentru temperaturi cuprinse între 15—20°C.

Tabelul 6.4

Modulul lui Young (10^{10} N/m^2)

Aluminiu	6,9
Wolfram	38
Oțel	20
Cupru	9,8
Platină	16
Argint	7,4

Tabelul 6.5

Masa molară (kg/kmol)

Hidrogen	2
Oxigen	32
Azot	28
Heliu	4
Argon	39
Apă	18
Aer	28,9
Bioxid de carbon	44
Metan	16

Tabelul 6.6

Căldura specifică (J/kg · K)

Alama	380
Aluminiu	910
Apă	4 180
Cupru	390
Fier (oțel)	460
Gheață	2 040

Tabelul 6.7

Căldura specifică a gazelor la presiune constantă (J/kg · K)

Oxigen	910
Aer	1 000
Vapori de apă	1 860

Tabelul 6.8

Căldura latentă specifică de topire (kJ/kg) pentru solide și căldura latentă specifică de fierbere (kJ/kg) pentru lichide (la presiunea de 1 atm)

Aluminiu	393
Cupru	180
Fier	270
Gheață	330
Apă	2 260

Tabelul 6.9

Proprietăți termice ale apei

Căldura specifică (gheața)	0,5 kcal/kg
Căldura latentă specifică de topire a gheții	80 kcal/kg
Căldura specifică (apă)	1 kcal/kg K
Căldura latentă specifică de fierbere (la presiunea de 1 atm)	540 kcal/kg

Tabelul 6.10

Temperatura de topire (solidificare) (la presiunea de 760 mm Hg)

Substanța	°C
Aluminiu	658
Apă de mare	−2,5
Apă distilată	0
Wolfram	3 380
Fier	1 535
Cupru	1 083
Mercur	−39

Plumb	327
Argint	960
Oţel	1 400
Fontă	1 150

Tabelul 6.11

Temperatura de fierbere (la 760 mm Hg)

Substanţa	°C
Azot	−196
Aluminiu	2 330
Argon	−186
Apa	100
Hidrogen	−253
Heliu	−269
Fier	3 050
Oxigen	−183
Cupru	2 582
Neon	−246
Mercur	357
Plumb	1750

Tabelul 6.12

Coeficientul de dilataţie liniară pentru solide (în K^{-1})

Aluminiu	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$
Fier	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Cupru	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
Plumb	$2{,}9 \cdot 10^{-5}$
Oţel	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Sticla	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$

Tabelul 6.13

Coeficientul de dilataţie volumică pentru unele lichide (în K^{-1})

Apa (20°C)	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
Glicerina	$5 \cdot 10^{-4}$
Ulei	$7{,}2 \cdot 10^{-4}$
Petrol	$9 \cdot 10^{-4}$
Alcool	$11 \cdot 10^{-4}$
Mercur	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$

Tabelul 6.14

Permitivitatea pentru unele substanţe

Substanţa	relativă	absolută (F/m)
Apa	81	$71 \cdot 10^{-11}$
Aer	1,0006	$0{,}855 \cdot 10^{-11}$

Ulei de transformator	2,2	$1,9 \cdot 10^{-11}$
Parafină	2,1	$1,9 \cdot 10^{-11}$
Mica	6,0	$5,3 \cdot 10^{-11}$
Sticla	7,0	$6,2 \cdot 10^{-11}$
Titanat de bariu	1 200	$1\,100 \cdot 10^{-11}$
Ebonită	4,3	$3,8 \cdot 10^{-11}$

Tabelul 6.15

Rezistivitatea ρ (în $\Omega \cdot mm^2/m$ sau 10^{-6} Ωm) şi coeficientul α (în $grad^{-1}$) de dependenţă a rezistenţei de temperatură

Substanţa	ρ	α
Aluminiu	0,028	0,004
Wolfram	0,055	0,0051
Constantan	0,48	0,00002
Manganin	0,45	0,00003
Cupru	0,017	0,0043
Nichelină	0,42	0,0001
Platină	0,1	0,004
Mercur	0,958	0,0009
Plumb	0,21	0,004
Argint	0,016	0,004
Oţel	0,12	0,006
Zinc	0,060	0,004

Tabelul 6.16

Echivalentul electrochimic (10^{-6} kg/C)

Aluminiu	(Al)	0,093
Hidrogen	(H)	0,01045
Fer	(Fe)	0,29
Fer	(Fe)	0,19
Aur	(Au)	0,68
Oxigen	(O)	0,0829
Cupru	(Cu)	0,33
Natriu	(Na)	0,238
Nichel	(Ni)	0,30
Plumb	(Pb)	1,074
Argint	(Ag)	1,118
Zinc	(Zn)	0,34

Tabelul 6.17

Indicele de refracţie

Apă	1,33	Cuarţ	1,54
Aer	1,00029	Gheaţă	1,31
Glicerină	1,47	Sticlă	1,57—1,80

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hristev, V. Fălie, D. Manda. *Fizică*, manual pentru clasa a IX-a. Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
2. N. Stănescu, A. Negulescu, N. Hangea, *Fizică*, manual pentru clasa a X-a. Editura didactică și pedagogică, București, 1965.
3. V. Grecu, M. Rusu, E. Dobre. *Fizică*, manual pentru clasa a XI-a. Editura didactică și pedagogică, București, 1978.
4. L. Panaiotu, L. Georgescu, M. Rusu, D. Borșan. *Fizică*, manual pentru clasa a XII-a. Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
5. M. Oncescu, M. Petrescu-Prahova, I. Petrescu-Prahova, Tr. Popescu. *Fizica*. anul IV — liceu real. Editura didactică și pedagogică, București, 1974.
6. Tr. Creţu, C. Ghizdeanu, I. Vieroșanu. *Fizica pentru admiterea în învățământul tehnic superior*. Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
7. M. Preda, P. Cristea, *Probleme de electricitate*. Editura tehnică, București, 1978.
8. I. Bunget, L. Burlacu, D. Ciobotaru, A. Costescu, V. Florescu, L. Georgescu, M. Rusu. Compendiu de fizică. Editura științifică, 1971.
9. S. Strelkov, I. Elțin, I. Iakovlev. *Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală*. Editura tehnică, București, 1952, (tr. din l. rusă).
10. I. Irodov, I. Savéliev, O. Zamcha. *Recueil de problèmes de physique générale*. Editura Mir, Moscou, 1976.
11. C. Buzatu. *Culegere de probleme de fizică*. Editura tehnică, București, 1963.
12. C. Maican, A. Negulescu, D. Tănase, V. Atanasiu. *Culegere de probleme de fizică pentru învățământul mediu*. Editura didactică și pedagogică, 1963.
13. C. Necșoiu. *Culegere de probleme de fizică*. Editura tehnică, București, 1968.
14. L. Constantinescu, I. Marin, O. Constantinescu. *Probleme de fizică pentru liceu*. Editura didactică și pedagogică, București, 1971.
15. B. Bukhovtsev, V. Hrivchenkov, G. Myakishev, V. Shalnov. *Problems in Elementary Physics*. Mir Publishers, Moscow, 1971.
16. *Sbornik zadaci po obșemu kursu fiziki*. Editura Școala superioară, Moscova, 1972 (sub redacția A.N. Kuțenko și Iu. V. Pukleva).
17. V. L. Ghinsburg, L. M. Levin, M. S. Rabinovici, D. V. Sivuhin. E. S. Ceoerikova, *Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală*. Edit. tehnică, 1951, (tr. din l. rusă).
18. M. Atanasiu, V. Drobotă. *Fizică pentru admitere în facultate*. Vol. I și vol. II, Edit. Albatros, 1974.
19. M. Oncescu. *Mărimi și unități în fizică*. Vol. I, Edit. tehnică, București, 1955.
20. R. Grigorovici, M. Oncescu. *Mărimi și unități în fizică*. Vol. II, Edit. tehnică, București, 1958.

21. I. Isculescu, Gh. Ispăşoiu, V. Petrescu, *Sistemul internaţional de unităţi de măsură*. Edit. tehnică, 1970.

22. I. Druică-Zeletin, A. Popescu. *Culegere de probleme de mecanică şi acustică*. Edit. tehnică, 1974.

23. A. Hristov. *Probleme de căldură, fizică moleculară şi termodinamică pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*. Edit. tehnică, 1974.

24. G. Ionescu, V. Fochianu, C. Călin. *Probleme de fizică date la concursurile de admitere în învăţământul superior, pentru ingineri şi subingineri*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.

Nr. colilor de tipar : 27,5
Bun de tipar : 05.12.1980

Comanda nr. 252/5886
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.